2nd International Conference on Mathematics and Its Applications

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن

۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴- دانشگاه شهید چمران اهواز

همزمان با هفتادمین سالگرد تأسیس دانشگاه شهید چمران اهواز

محور های کنفرانس:

ریاضیات محض و کاربردی، آمار و احتمال، علوم کامپیوتر، یادگیری آماری، یادگیری ماشینی، آموزش ریاضی



آخرین مهلت ارسال مقالات: ۱۴۰۴/۰۳/۳۰
مهلت ثبت نهایی مقالات: ۱۴۰۴/۰۴/۳۰
برگزاری کنفرانس: ۲۹-۱۴۰۴/۰۵/۳۰

جهت کسب اطلاعات کنفرانس بارکد مقابل را اسکن کنید.

icma2025.scu.ac.ir

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC
Islamic World Science Citation Center
۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

مجموعه مقالات فارسی

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

۲۹ و ۳۰ مرداد ماه ۱۴۰۴

این کتاب شامل مجموعه مقالات فارسی **دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن** است. بدیهی است که نویسندگان محترم مسئول صحت مطالب، اصالت و ویرایش علمی و ادبی مقالات خود بوده و کمیته های علمی و اجرایی دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن مسئولیتی در این موارد ندارند.

عنوان: مجموعه مقالات فارسی دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
تنظیم: دکتر جلال چاچی و خانم محدثه آقاجری
ویراستار: دکتر جلال چاچی، دکتر رحیم چینی پرداز و دکتر احمد کاظمی فرد
طراح جلد: خانم محدثه آقاجری
تاریخ انتشار: مهر ماه ۱۴۰۴

پیشگفتار

کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن هر دوسال یکبار به میزبانی دانشگاه شهید چمران اهواز با حمایت انجمن ریاضی ایران، انجمن آمار ایران و دیگر سازمانهای حامی برگزار می‌شود. در این رویداد، محققان، ریاضیدانان و دانشجویان تحصیلات تکمیلی داخلی و خارجی دستاوردهای خود در زمینه‌های مختلف مربوط به ریاضی ارائه می‌دهند. در سال ۱۴۰۴ نیز طبق این روال، دانشگاه شهید چمران اهواز افتخار داشت تا در **هفتادامین سالگرد تاسیس دانشگاه** و با سابقه **حداقل پنجاه ساله گروه‌های آمار و ریاضی دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر**، این رویداد را در ۲۹ - ۳۰ مرداد ماه ۱۴۰۴ برگزار کند. امید بر این بود تا برگزاری این کنفرانس بستر مناسبی برای اعتلای دانش ریاضی در سطح کشور باشد. برای تحقق این منظور سعی بر این شد تا محورهای همایش متناسب با نیازهای جامعه علمی کشور انتخاب شود تا ضمن پوشش زمینه‌های تحقیقاتی مورد توجه، به دغدغه‌های جامعه علمی کشور در زمینه آموزش ریاضی و آموزش آمار بپردازد. همچنین این کنفرانس تلاش نمود تا با نگاه ویژه به زمینه‌های تحقیقاتی در علوم کامپیوتر، که اخیرا بسیار مورد توجه جامعه واقع شده است، پوشش مناسبی برای ارایه تحقیقات هوش مصنوعی و یادگیری آماری مهیا سازد.

بدین منظور، دبیرخانه کنفرانس پس از تصویب کنفرانس در دانشگاه شهید چمران اهواز، بلافاصله با تبلیغات فضای مجازی و معرفی سایت کنفرانس شروع به دریافت مقالات از نیمه بهمن ماه ۱۴۰۳ نمود. در طی مدت زمان اعلام شده برای دریافت مقالات، تعداد **۳۲۵** مقاله در سایت کنفرانس دریافت شد. کلیه مقالات، پس از بررسی اولیه اعضای کمیته علمی، توسط کمیته داوران کنفرانس مورد داوری و ارزیابی قرار گرفتند. طی فرآیند داوری مقالات که تا پایان تیرماه ۱۴۰۴ به طول انجامید، از **۳۲۵** مقاله ارسال شده، **۲۷۵** مقاله به صورت سخنرانی و پوستر پذیرفته شدند و **۵۰** مقاله از استانداردهای لازم جهت ارایه در کنفرانس برخوردار نشدند. این کنفرانس در نهایت در تاریخ ***۲۹ و ۳۰ مرداد ماه ۱۴۰۴*** با شرکت کنندگان فراوانی از جمله اعضای هیئت علمی و دانشجویان تحصیلات تکمیلی دانشگاه‌های معتبر سرتاسر ایران و برخی کشورهای خارجی مانند عمان، عراق، هند و برزیل در بستر مجازی برگزار شد.

در پایان دبیرخانه دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن بر خود لازم می‌داند از اعضای کمیته علمی، اعضای کمیته اجرایی و اعضای کمیته داوری کنفرانس نهایت تشکر و سپاسگزاری را داشته باشد. همچنین مراتب قدردانی خود را از حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، ریاست محترم دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی، گروه آمار و گروه علوم کامپیوتر و کلیه کارمندان و همکاران دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر دارد. در نهایت مراتب سپاسگزاری خود را از کمک‌های معنوی انجمن ریاضی ایران، انجمن آمار ایران، انجمن سیستم‌های فازی ایران، انجمن سیستم‌های هوشمند ایران، خانه ریاضیات اهواز و پایگاه استنادی علوم جهان اسلام اعلام می‌دارد و از خداوند منان آرزوی توفیق الهی و موفقیت‌های روز افزون برای تمامی شرکت کنندگان محترم در این کنفرانس را دارد.

رحیم چینی پرداز
دبیر علمی دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن

جلال چاچی
دبیر دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
مهر ماه ۱۴۰۴

محورهای کنفرانس

ریاضی

- آنالیز
- هندسه و توپولوژی
- گراف و ترکیبیات
- معادلات و سیستم‌های دینامیکی
- حل عددی معادلات و انتگرال
- جبر خطی عددی
- کنترل و بهینه‌سازی
- جبر
- کدگذاری و رمزنگاری
- آموزش ریاضی
- منطق ریاضی
- تحقیق در عملیات
- ریاضیات زیستی
- ریاضیات مالی
- نظریه اعداد
- کاربردهای ریاضی در سایر علوم

آمار

- آمار نظری
- آمار کاربردی
- احتمال و فرآیندهای تصادفی
- آمار زیستی
- آمار و احتمال فازی
- داده کاوی و علم داده
- یادگیری آماری
- کاربردهای آمار در سایر علوم

علوم کامپیوتر

- الگوریتمها و محاسبات، الگوریتم ژنتیک
- داده کاوی و سیستم‌های اطلاعاتی پایگاه داده عملیاتی و تحلیلی
- یادگیری ماشینی، یادگیری عمیق و شبکه‌های عصبی
- هوش مصنوعی و رباتیک اینترنت اشیا
- منطق فازی و سیستم‌های هوشمند و محاسبات نرم
- مدل‌سازی شناختی و تعامل انسان و استدلال دانش
- بینایی ماشین، پردازش تصویر، صوت و سیگنال
- پردارش تصاویر پزشکی و سیستم‌های تصویربرداری
- فن‌آوری تجهیزات پزشکی
- سیستم‌های واسط مغز و کامپیوتر

اعضای کمیته علمی

- دکتر رحیم چینی پرداز، دبیر کمیته علمی همایش
- دکتر جلال چاچی، دبیر همایش
- دکتر احمد کاظمی فرد، دبیر کمیته اجرایی همایش
- دکتر مهدی جلالوند، دبیر کمیته روابط عمومی همایش
- دکتر مهرداد نامداری، دانشگاه شهید چمران اهواز (نماینده انجمن ریاضی در کنفرانس)
- دکتر بهزاد منصوری، دانشگاه شهید چمران اهواز (نماینده انجمن آمار در کنفرانس)
- پروفسور امیدعلی شِهنی کرم‌زاده، ریاست انجمن ریاضی ایران
- پروفسور پیرپاولو دورسو، دانشگاه رم-ایتالیا
- پروفسور لیویا دی جیووانی، دانشگاه لویس-رم-ایتالیا
- دکتر محمد رضا صافی، تورنتو-انتاریو-کانادا
- دکتر سعید تفضلیان، دانشگاه کمپیناس-برزیل
- پروفسور بودینگ لیو، دانشگاه چینگهوا-پکن-چین
- پروفسور ماشاالله ماشین چی، سردبیر مجله سیستم‌های فازی ایران
- پروفسور غلامرضا محتشمی‌برزادران، استاد پیشکسوت آمار و رئیس اسبق دانشگاه بیرجند
- دکتر محمدرضا اکبرزاده توتونچی، دانشگاه فردوسی مشهد (نائب رئیس انجمن سیستم‌های هوشمند ایران)
- دکتر محمد شهرام معین، پژوهشگاه ارتباطات و فناوری اطلاعات (رئیس انجمن سیستم‌های هوشمند ایران)
- دکتر بردیا پنابحق، دانشگاه خوارزمی
- دکتر حامد احمدزاده، دانشگاه سیستان و بلوچستان
- دکتر علیرضا چاجی، دانشگاه بزرگمهر قاینات
- دکتر حمید ماجانی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر سید اسماعیل حسینی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر معصومه خیرخواه زاده، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر مهدی دهقانی درمیان، دانشگاه ملی مهارت
- دکتر سید محمود طاهری، دانشگاه تهران
- دکتر حامد فهیمی، دانشگاه فردوسی مشهد
- دکتر منصور سراج، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر محمدرضا آخوند، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر عباس افتخاریان، دانشگاه خلیج فارس

اعضای کمیته داوران

- دکتر حمید ماجانی، شهید چمران اهواز
- دکتر احمد کاظمی فرد، شهید چمران اهواز
- دکتر جلال چاچی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر وحید کشاورز، دانشگاه صنعتی شیراز
- دکتر مجید دره میرکی، دانشگاه خاتم الانبیا بهبهان
- دکتر سینا هدایتیان، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر کیانا ایزدیار، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر مجید فرهادی، دانشگاه علوم پایه دامغان

- دکتر حسین لرکی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر مهدی جلالوند، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر محمدرضا آخوند، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر زینب سبعه، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر بابک بابادی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر صدیقه طوبایی، دانشگاه آزاد اهواز
- دکتر سید اسماعیل حسینی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر بهزاد منصوری، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر محمد یاراحمدی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر معصومه خیرخواه زاده، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر مهدی درمیان، دانشگاه مهارت
- دکتر زهره کفایتی، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) قزوین
- دکتر حدیث آزین، دانشگاه حکیم سبزواری
- دکتر محسن زیوری رضاپور، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر علیرضا چاجی، دانشگاه بزرگمهر قاینات
- دکتر حامد فهیمی، دانشگاه فردوسی مشهد
- دکتر مریم داودیان، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر هادی بصیرزاده، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر محمدحسین رحمانی دوست، دانشگاه نیشابور
- دکتر نساء اسحق نیموری، دانشگاه پیام نور
- دکتر اکرم صفری هفشجانی، دانشگاه پیام نور
- دکتر محمد علی سیاوشی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر منصور سراج، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر مهرداد نامداری، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر بردیا پنابحق، دانشگاه خوارزمی
- دکتر عباس افتخاریان، دانشگاه خلیج فارس

اعضای کمیته اجرایی

- دکتر بهزاد منصوری، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر صدیقه طوبایی، دانشگاه آزاد اهواز
- دکتر محمد یاراحمدی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر زینب سبعه، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر حسین لرکی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر بردیا پنابحق، دانشگاه خوارزمی
- دکتر علیرضا چاجی، دانشگاه بزرگمهر قاینات
- دکتر حمید ماجانی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر معصومه خیرخواه زاده، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر محمدرضا آخوند، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر حبیبه صادقی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر علی دارابی، دانشگاه شهید چمران اهواز
- دکتر عباس افتخاریان، دانشگاه خلیج فارس
- دکتر مجتبی اصفهانی، دانشگاه ولایت ایرانشهر
- آقای سید حسین علوی، دانشجوی دکترای دانشگاه علامه طباطبایی تهران
- آقای سید طاها موسوی، دانشجوی دکترای دانشگاه علم و صنعت ایران

فهرست مقالات فارسی

آزمون فرض یکطرفه در محیط فازی
جلال چاچی، خیرالله هندالی ۱

خواص موروثی A^{**}- دوتصویری و φ- A^{**}- دوتصویری جبرهای باناخ
ابراهیم تمیمی ۸

حلقه‌های شدیداً دوطرفه
سیدجمال هاشمی‌زاده دزفولی، فاطمه حسن‌زاده ۱۸

دیدگاه نقطه ثابت بروئر در تعادل نش
سید علی محمد محسنی الحسینی ۲۳

آموزش هدفمند ریاضیات در معماری: گامی به‌سوی درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضی و تقویت تخیل فضایی در آموزش عالی معماری
بهزاد کفاش، سیدعباس زرگرچی ۳۴

چندجمله‌ای هوسویا برای گراف نردبان موبیوس
سارا شکرالهی یانچشمه ۴۶

ارزیابی و پیش‌بینی مبتنی بر شبکه‌های عصبی در تحلیل‌های آماری
سیمین منصوری بروجنی، ایوب طاهری ۵۰

دوگان بهینه $g-$قاب از طریق شبه‌وارون و بهینه‌سازی وزنی
سمیه صادقی دیزج، اصغر رحیمی، اسماعیل علیزاده ۶۰

آزمون جایگشتی ضریب همبستگی اسپیرمن استوار
منصوری بروجنی، سیمین، گل‌زاده گروی، احسان ۶۷

بررسی رابطه ایده‌آل‌ها در جبر کامیان-پسک
مریم کشول رجب‌زاده، سهیلا سیدبویر ۷۷

ایده‌آل پوچساز در جبر کامیان-پسک
مریم کشول رجب‌زاده، سهیلا سیدبویر ۸۲

ساختن تابع عضویت یک مجموعه فازی
خیرالله هندالی ۸۷

یافتن معکوس ماتریس‌های بلوکی مزدوج هنکل
فاطمه رضائیان، مریم شمس سولاری، مریم مومنی، هادی روحانی قهساره، سارا شکراللهی یانچشمه ۹۸

محاسبه معکوس ماتریس‌های هنکل با بهره‌گیری از خواص ساختاری ماتریس‌های توپلیتز
فاطمه رضائیان، مریم شمس سولاری، مریم مومنی، هادی روحانی قهساره، سارا شکراللهی یانچشمه ۱۰۳

کاربرد روش سینک–گالرکین در حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری معمولی و جزیی با شرایط مرزی
زهره مرادی، امید نیکان، حمید مسگرانی ۱۰۸

مدل انتقال واریانس برای شناسایی داده‌های پرت در مدل‌های خطی با خطا در اندازه‌گیری تحت محدودیت ریج
بابک بابادی ۱۱۵

ارزیابی عملکرد روش تدریس لایه به لایه در درس ریاضی برای دانش‌آموزان پایه هشتم شهرستان اهواز
سهیلا سیدبویر، مریم کشول رجب‌زاده ۱۲۵

ارزیابی عملکرد تدریس ریاضیات واقع‌بینانه در درس ریاضی برای دانش‌آموزان پایه نهم شهرستان اهواز
سهیلا سیدبویر، مریم کشول رجب‌زاده ۱۳۱

جواب‌های غیرمغلوب ضعیف یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی
مریم مکروم، منصور سراج ۱۳۷

تحلیل شبکه‌های آموزشی با نظریه گراف: شناسایی تأثیرگذاران و الگوهای یادگیری با معیارهای مرکزیت
ماندانا مکاری ۱۵۶

تأثیر افزودن یال‌ها به گراف دور بر معیار بی‌نظمی آلبرتسون
راحله خاکباز ۱۶۵

تأثیر حذف یال‌ها از گراف کامل بر معیار بی‌نظمی آلبرتسون
راحله خاکباز ۱۷۲

ویژگی فضاهای موضعاً QHC
فاطمه حیدری ۱۷۸

مدل سازی داده‌های چند متغیره آمیخته طولی پیوسته_گسسته با استفاده از توابع مفصل جفتی واین
کوثر پولادگر، محمدرضا آخوند، محمدرضا زادکرمی ۱۸۳

نقش پراکندگی امواج درهندسه فراکتال
وحید رفیعی، علی لیلتن، فاطمه شریفی ۱۹۰

معادله هلمهولتز و جواب‌های اساسی آن
وحید رفیعی، فاطمه شریفی ۱۹۶

هماهنگ‌سازی تعمیم یافته از سیستم‌های دیفرانسیل‌پذیر آشوبناک
وحید رفیعی، فاطمه شریفی ۲۰۱

معرفی یک شاخص نابرابری درآمد جدید
میرزایی، شهریار ۲۰۵

توسعه الگوریتم دایکسترا برای شبکه با وزن‌های فازی شهودی بازه‌ای مقدار
سارا احمدی، مدینه فرنام ۲۱۱

تحلیلی مقایسه ای بر دو الگوریتم پرایم و کروسکال در حل مسئله کمترین درخت پوشا تحت عدم قطعیت
مدینه فرنام، سارا احمدی ۲۲۲

تحلیلی مقایسه‌ای بر مدیریت ریسک پیش از بحران در شبکه‌های بزرگراهی با استفاده از مدل کوله‌پشتی بازه‌ای
مدینه فرنام ۲۲۹

کاربرد مدلسازی ریاضی در درمان بیماری‌های قلبی
مریم مسعودی آرانی ۲۳۶

رتبه‌بندی استان‌های کشور در چارچوب توسعه پایدار با رویکرد DEA مبتنی بر داده‌های بازه‌ای
ملیحه امینی، محمد خدابخشی ۲۴۱

تولید اعداد با روش غربال استوانه‌ای: یک رویکرد نوین در رمزگشایی اعداد اول
هاجر امرایی ۲۵۲

قضیه نقطه ثابت برانچیاری با استفاده از مفهوم wـفاصله
ظهیر مظلومی‌نژاد، میثم جعفری ۲۵۸

گروه‌های تقارنی و کاربردهای آنها در رمزنگاری
میعاد باوی ۲۶۴

مدل‌سازی ریاضی و شبیه‌سازی مونته‌کارلو برای مدیریت سرمایه و کاهش ریسک در بازارهای مالی
عباسعلی شریفی، حجت امامی ۲۷۶

استفاده از یادگیری ماشین برای پیش‌بینی موفقیت کمپین‌های بازاریابی بانکی
علی حیدری، حجت امامی، عباسعلی شریفی ۲۸۸

یک روش شبه‌نیوتن حافظه محدود با شروع اولیه مبتنی بر یک الگوریتم گرادیان تطبیقی برای حل مسائل بهینه‌سازی مقیاس بزرگ
زهرا مهدور، مسعود فاطمی ۲۹۴

ماتریس بی‌نظمی گراف
راحله خاکباز، جواد بهادری ۳۰۵

مدل خودبازگشتی صحیح مقدار مرتبه اول با عملگر دوجمله‌ای و با نوآوری‌های پیچش پواسون‌ـα تا هندسی در صفر تعدیل‌یافته
مریم شالباف، غلامعلی پرهام ۳۱۲

ارائه یک روش کلی برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید
جواد باولی، هادی بصیر زاده ۳۲۳

آموزش ریاضی بر اساس واقعیت افزوده
ندا توانایی، شهریار ارم ۳۲۹

بازطراحی جستجوی خطی در بهینه‌سازی چندهدفه با رویکردی نوین
نیلوفر صالحی‌مکاری، هادی بصیرزاده ۳۳۷

بهینه‌سازی چندهدفه با الگوریتم ترکیبی $SA-CG$
نیلوفر صالحی‌مکاری، هادی بصیرزاده ۳۴۳

یک رویکرد بهینه‌سازی چندهدفه مبتنی بر الگوریتم کلونی مورچگان برای مسیریابی خودروهای الکتریکی
نیلوفر صالحی‌مکاری، هادی بصیرزاده ۳۵۰

برآورد گشتاور مثلثاتی پارامترهای توزیع ون میزس وزنی
فاطمه شاه سنایی ۳۵۸

مقایسه و ارزیابی عملکرد برآورد لیو در مدل های آمیخته با استفاده از رویکرد یادگیری ماشین افراطی
مهتاب طلادزفولی، عبدالرحمن راسخ ۳۶۲

معرفی یک برآوردگر جدید برای آنتروپی رنی
ملیحه عباس نژاد ۳۷۰

مقایسه چند معیار برای شکل توزیع
مهدی مهدی‌زاده ۳۷۹

بررسی جواب‌های دستگاه معادلات شکار و شکارچی لزلی- گاِور
محمدحسین رحمانی‌دوست، نجمه توفیقی ۳۸۵

شناسایی و اولویت بندی استراتژیهای تاب آوری در زنجیره تامین
ملیحه ابراهیمی، الهام حسین زاده ۳۹۰

پایداری و تحلیل انشعاب در یک مدل اپیدمی SIR گسسته
عاطفه نیک‌سرشت، علی دارابی ۳۹۷

تحلیل و پیش‌بینی بار مراجعه به مراکز درمانی با استفاده از مدل‌های آماری و یادگیری ماشین
سمیه آقائی ۴۰۷

تحلیل و پیش‌بینی داده‌های کلان با استفاده از مدل‌های آماری و یادگیری ماشین
سمیه آقائی ۴۱۱

یادگیری ماشین و کاربرد آن در شناسایی ترکیبات اشیای باستانی
محمد رضا بحرینی بهزادی ۴۱۵

یادگیری ماشین برای پیش بینی میزان مصرف آب محصولات کشاورزی
محمد رضا بحرینی بهزادی ۴۲۴

استفاده از الگوریتم رقابت استعماری ترکیبی برای حل مسئله جدول زمانی امتحانات دانشگاه
سید وحید جلالی، مهدی یداللهی ۴۳۳

ارائه یک روش جدید برای زمانبندی سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری ترکیبی
سید وحید جلالی ۴۴۲

وجود و چندگانگی جواب برای بعضی از مسایل بیضوی منفرد با روش تغییراتی
سجاد بهوندی ۴۵۰

تحلیل کیفی عملگر بیضوی مسایل بیضوی در فرم همگرایی
سجاد بهوندی ۴۶۰

انشعاب هاپف در یک سیستم شکار و شکارچی تاخیری
جواد حدادی، رضا خوشسیر، زهره اسکندری، احمد رئیسی، عقیل خلیلاوی ۴۷۶

انشعابات در یک سیستم شکار و شکارچی
جواد حدادی، احمد رئیسی، رضا خوشسیر، زهره اسکندری، عقیل خلیلاوی ۴۸۵

کنترل پایداری نقطه تعادل در یک سیستم شکارو شکارچی تاخیری
جواد حدادی، رضا خوشسیر، زهره اسکندری، احمد رئیسی، عقیل خلیلاوی ۴۹۷

بررسی پایداری نقاط ثابت در یک سیستم شکارو شکارچی
جواد حدادی، احمد رئیسی، زهره اسکندری، رضا خوشسیر، عقیل خلیلاوی ۵۰۳

ارزیابی پیشرفت و پسرفت بهره وری سود با استفاده از اندیس مالم کوئیسن گلوبال
اسماعیل ممبینی، سیدعلی خالقی ۵۱۱

اندیس مالم کوئیست گلوبال و کاربرد آن در سنجش بهره‌وری اقتصادی
اسماعیل ممبینی، نسترن ممبینی ۵۲۳

مسئله جابجاشدگی کمین و ثابت توکشیدگی بهین در فضاهای باناخ
نسترن ممبینی، اسماعیل ممبینی ۵۳۲

معرفی واژه‌نامه‌های تخصصی حوزه ریاضی: هزارواژه، واژه‌نامه برخط و اصطلاحنامه ریاضی
فاطمه احمدی‌نسب، زهرەسادات ناصری ۵۴۰

نقد و بررسی مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی از منظر کاربرد واژگان تخصصی
فاطمه احمدی‌نسب، زهرەسادات ناصری ۵۴۷

بررسی مقایسه‌ای برآوردهای بیزی پارامترهای توزیع GU-XE تحت توابع زیان مختلف
ناهید سنجری فارسی‌پور، کوثر تقوی نسب ۵۵۳

پیش‌بینی حجم رواناب ورودی به مخزن سد زاینده‌رود با استفاده از مدل‌های سری زمانی SARIMA
حمید قربانی ۵۵۶

پیش‌بینی حجم رواناب ورودی به مخزن سد زاینده‌رود با استفاده از مدل‌های شبکه عصبی NNAR و MLP و مقایسه کارایی آنها با مدل SARIMA
حمید قربانی ۵۶۵

حل عددی معادلات انتگرال تصادفی منفرد نوع آبل با تکنیک ماتریس عملیاتی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته
آتنا غیاثی ۵۷۳

حل عددی خطی معادلات انتگرال با هسته تکین بر پایه چندجمله‌ای‌های برنشتاین
آتنا غیاثی ۵۸۴

طراحی و پیاده‌سازی سیستم مدیریت حافظه کش توزیع شده و خود ترمیم مبتنی بر Hashing Consistent بهبود یافته و پروتکل Gossip در معماری میکرو سرویس‌های بانکی
محمد همایون، مهدی جلالوند ۵۹۳

تشخیص و پیش‌بینی خرابی پیش‌رونده در تجهیزات دوار صنعتی با استفاده از شبکه‌های کانولوشنی-ترانسفورمر ترکیبی و تحلیل سیگنال ارتعاش (مطالعه موردی توربین بادی)
محمد همایون، مهدی جلالوند ۵۹۹

اثربخشی سبک حل مسئله به روش پولیا بر یادگیری فعال و عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان
پوریا خطیبی، شریفه رضاقلی، محمود فرهادیان ۶۰۴

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

آزمون فرض یکطرفه در محیط فازی

جلال چاچی [۱] خیرالله هندالی [۲]

[۱,۲] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

در این مقاله یک روش جدید برای آزمون فرضیه‌های آزمون بر اساس متغیرهای تصادفی فازی ارائه می‌شود. این روش مبتنی بر آزمون فرضیه‌های است که بر اساس $h-$برش‌های پارامتر فازی به وجود می‌آیند. این فرضیه‌ها در اندازه α و بر اساس داده‌هایی که از $h-$برش‌های مشاهدات متغرهای تصادفی فازی به‌دست می‌آیند، آزمون می‌شوند. شیوه آزمون این فرضیه‌ها بر اساس مقایسه $p-$مقدار هر آزمون با اندازه α است. سپس با معرفی معیاری به آزمون فرضیه‌های فوق می‌پردازیم. با ارائه یک مثال به بررسی روش ارائه شده در این مقاله می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: متغیرهای تصادفی فازی، متغیرهای تصادفی فازی نرمال، پارامتر فازی

۱ مقدمه

آزمون فرضیه ها یکی از اهداف استنباط آماری است. در آمار کلاسیک تمام مولفه های یک مدل از قبیل داده‌ها، فرضیه‌ها و نحوه به دست آوردن آزمون باید دقیق (بدون ابهام) باشند. در عمل و دنیای واقعی خیلی مواقع با داده‌های مبهم، مانند "حدودا ۱۰ "، "کم و بیش نزدیک پنج"، "نسبتا بزرگتر از ۱۰۰ " و ...، مواجه هستیم. بنابراین گاهی اوقات نیاز به بررسی فرضیه فازی مانند "میانگین حدودا ۱۰ است" داریم. همچنین ممکن است بخواهیم یک فرضیه را در سطح معنی‌داری نادقیقی آزمون کنیم. بنابراین در ادامه به بررسی آزمون فرض آماری در محیط فازی میپردازیم.

۲ مفاهیم مقدماتی

۱.۲ مجموعه‌های فازی

فرض کنید $\mathbb{X}$ یک مجموعه مرجع باشد. مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{X}$ با تابع عضویت $\tilde{A} : \mathbb{X} \to [۰, ۱]$ مشخص می‌شود. در این مقاله فرض می‌شود مجموعه مرجع، مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد. برای هر

[1] jalal.chachi@scu.ac.ir
[2] hendalikhyrala72@gmail.com

$\tilde{A}_h = \{x \in \mathbb{X} \,|\, \tilde{A}(x) \geq h\}$ به‌صورت مجموعه دقیق h−برش مجموعه فازی $\tilde{A}$، $h \in (۰, ۱]$ تعریف می‌شود و $\tilde{A}$. بستار مجموعه $\{x \in \mathbb{X} \,|\, \tilde{A}(x) > ۰\}$ تعریف می‌شود. مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال نامیده می‌شود هرگاه برای حداقل یک عضو $x \in X$، $\tilde{A}(x) = ۱$. مجموعه فازی $\tilde{N}$ از $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی گوییم هرگاه $\tilde{N}$ یک مجموعه فازی نرمال با تابع عضویت نیم‌پیوسته بالایی باشد، یعنی برای هر $h \in \mathbb{R}$، مجموعه$\{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \geq h\}$ بسته باشد. مجموعه تمام اعداد فازی از $\mathbb{R}$ را با $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. حالت خاص و مهمی از عدد فازی، عدد فازی مثلثی است که با نماد $\tilde{N} = (n, s_l, s_r)_T$ نشان داده می‌شود که در آن n، s_l و s_r به‌ترتیب نشان دهنده مرکز، پهنای چپ و پهنای راست هستند. تابع عضویت و h−برش‌های عدد فازی مثلثی $\tilde{N}$ به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(x) &= \frac{x-(n-s_l)}{s_l} I_{[n-s_l,n)}(x) + \frac{(n+s_r)-x}{s_r} I_{[n,n+s_r]}(x), \\ \tilde{N}_h &= [n_h^l, n_h^u] = [n-(۱-h)s_l, n+(۱-h)s_r], \end{aligned}$$

که در آن $I_A(\cdot)$ تابع نشانگر مجموعه A است.

۲.۲ متغیرهای تصادفی فازی

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ یک فضای احتمال، $\mathcal{X} : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ یک تابع فازی مقدار و $X \sim f_{\underline{\theta}}$ یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار با پارامتر $\underline{\theta} = (\theta_۱, \ldots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$ باشند. همچنین فرض کنید کلیه متغیرهای تصادفی، بر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ تعریف شوند. تابع فازی مقدار $\mathcal{X} : \Omega \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$ را یک متغیر تصادفی فازی گوییم، اگر و فقط اگر برای هر $h \in [۰, ۱]$، توابع $X_h^l : \Omega \to \mathbb{R}$ و $X_h^u : \Omega \to \mathbb{R}$ متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار باشند (که در آن $\forall \omega \in \Omega;\ \mathcal{X}(\omega)_h = [X_h^l(\omega), X_h^u(\omega)]$) [۱۴]. متغیرهای تصادفی فازی $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ را هم‌توزیع گوییم اگر برای هر $h \in [۰, ۱]$، $X_h^l \overset{D}{=} Y_h^l$ و $X_h^u \overset{D}{=} Y_h^u$، و آنها را مستقل گوییم هرگاه هر عضو مجموعه $\{X_h^l, X_h^u \,|\, h \in [۰, ۱]\}$ از هر عضو مجموعه $\{Y_h^l, Y_h^u \,|\, h \in [۰, ۱]\}$ مستقل باشد [۹].
متغیر تصادفی فازی $\mathcal{X}$ را هم‌توزیع با متغیر تصادفی X با پارامتر فازی $\tilde{\underline{\theta}} = (\tilde{\theta}_۱, \ldots, \tilde{\theta}_p)$ گوییم، هرگاه برای هر $h \in [۰, ۱]$، $X_h^l \sim f_{\underline{\theta}_h^l}$ و $X_h^u \sim f_{\underline{\theta}_h^u}$، که در آنها، $\underline{\theta}_h^l = (\theta_{۱h}^l, \ldots, \theta_{ph}^l)$، $\underline{\theta}_h^u = (\theta_{۱h}^u, \ldots, \theta_{ph}^u)$ و $\tilde{\theta}_{jh} = [\theta_{jh}^l, \theta_{jh}^u]$، $j = ۱, \ldots, p$ [۹].
برای مثال، گوییم $\mathcal{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین فازی $\tilde{\theta}$ و واریانس فازی $\tilde{\sigma}^۲$ است، هرگاه برای هر $h \in [۰, ۱]$، $X_h^l \sim N(\theta_h^l, \sigma_h^{۲l})$ و $X_h^u \sim N(\theta_h^u, \sigma_h^{۲u})$. در این حالت، اصطلاحاً گوییم $\mathcal{X}$ دارای توزیع $N(\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}^۲)$ است و می‌نویسیم $\mathcal{X} \sim N(\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}^۲)$.

تعریف ۱.۲ ([۹])**.** گوییم $\underline{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_۱, \ldots, \mathcal{X}_n)$ یک نمونه تصادفی فازی nتایی از توزیع نرمال با میانگین فازی $\tilde{\theta}$ و واریانس فازی $\tilde{\sigma}^۲$ است، هرگاه $\mathcal{X}_i$ها متغیرهای تصادفی فازی نرمالِ مستقل و

هم‌توزیع، با میانگین فازی $\tilde{\theta}$ و واریانس فازی $\tilde{\sigma}^{۲}$ باشند. در این حالت می‌نویسیم $\mathcal{X}_{۱}, \ldots, \mathcal{X}_{n} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}^{۲})$.

نتیجه ۱.۲ ([۹]). فرض کنید $\mathcal{X}_{۱}, \ldots, \mathcal{X}_{n} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\tilde{\theta}, \tilde{\sigma}^{۲})$، آنگاه برای هر $h \in [۰, ۱]$، $X^{l}_{۱h}, \ldots, X^{l}_{nh} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^{l}_{h}, \sigma^{۲l}_{h})$ و $X^{u}_{۱h}, \ldots, X^{u}_{nh} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^{u}_{h}, \sigma^{۲u}_{h})$. در حالتی که $\tilde{\sigma}^{۲} = I_{\{\sigma^{۲}\}}$، یعنی واریانس یک مقدار دقیق باشد، برای هر $h \in [۰, ۱]$، $X^{l}_{۱h}, \ldots, X^{l}_{nh} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^{l}_{h}, \sigma^{۲})$ و $X^{u}_{۱h}, \ldots, X^{u}_{nh} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^{u}_{h}, \sigma^{۲})$. در این حالت می‌نویسیم $\mathcal{X}_{۱}, \ldots, \mathcal{X}_{n} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\tilde{\theta}, \sigma^{۲})$.

۳.۲ فرض فازی و تابع آزمون فازی

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\tilde{\Theta} = \mathcal{F}(\Theta)$ رده‌ی اعداد فازی بر فضای پارامتر Θ و $\tilde{\theta}_{۰}$ یک عدد فازی معلوم در $\tilde{\Theta}$ باشد. در این‌صورت

۱. هر فرضیه به‌صورت "$\tilde{H} : \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_{۰}$" یک فرضیه ساده نامیده می‌شود.

۲. هر فرضیه به‌صورت "$\tilde{H} : \tilde{\theta} \succ \tilde{\theta}_{۰}$" یک فرضیه یکطرفه راست نامیده می‌شود. در این حالت فضای پارامتر فرضیه $\tilde{H}$، یعنی $\tilde{\Theta}_{۱}$، عبارت است از

$$\tilde{\Theta}_{۱} = \{\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta} \mid \theta^{l}_{h} > \theta^{l}_{۰h},\ \theta^{u}_{h} > \theta^{u}_{۰h}\ ; \quad \forall h \in (۰, ۱]\}.$$

مثال ۱.۲. فرض کنید $\tilde{\Theta} = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ فضای پارامتر مربوط به میانگین فازی توزیع نرمال $N(\tilde{\theta}, ۱)$ باشد. در این‌صورت

۱. فرضیه "$\tilde{H} : \tilde{\theta} = (۱, ۱, ۲)_{T}$" یک فرضیه ساده است.

۲. فرضیه "$\tilde{H} : \tilde{\theta} \succ (۱, ۱, ۲)_{T}$" یک فرضیه یکطرفه راست است. این فرضیه معادل است با

$$\tilde{H} : \tilde{\theta} \in \tilde{\Theta}_{۱} = \{\tilde{\theta} \in \tilde{\Theta} \mid \theta^{l}_{h} > h,\ \theta^{u}_{h} > ۳ - ۲h; \quad \forall h \in (۰, ۱]\}".$$

تعریف ۳.۲. تابع $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}^{n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\{۰, ۱\})$ را یک تابع آزمون فازی گوییم هرگاه $\tilde{\varphi}(\cdot)$ درجه رد و درجه پذیرش فرضیه‌های $\tilde{H}_{۰}$ و $\tilde{H}_{۱}$ را به‌صورت یک مجموعه فازی از $\{۰, ۱\}$، برای هر عضو $\underline{\mathcal{X}} \in \mathcal{F}^{n}(\mathbb{R})$ نشان دهد. "۰" و "۱" به‌ترتیب برای پذیرش و رد فرضیه $\tilde{H}_{۰}$ به‌کار می‌روند و $\mathcal{F}(\{۰, ۱\})$ رده‌ی مجموعه‌های فازی بر مجموعه $\{۰, ۱\}$ است.

۳ آزمون فرض یکطرفه در محیط فازی

در این بخش می‌خواهیم توجه خود را به آزمون فرضیه در مورد میانگین توزیع نرمال فازی معطوف می‌نماییم. به‌ویژه می‌خواهیم براساس نمونه تصادفی فازی $\mathcal{X}_{۱}, \ldots, \mathcal{X}_{n}$ از توزیع $N(\tilde{\theta}, \sigma^{۲})$ با واریانس

ثابت $\sigma^۲$، فرضیه‌های

$$\tilde{H}_۰ : \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_۰ \qquad vs \qquad \tilde{H}_۱ : \tilde{\theta} \succ \tilde{\theta}_۰. \tag{۱}$$

را در اندازه α آزمون کنیم. احتمال خطای نوع اول که عبارت است از احتمال رد فرضیه $H_۰$ وقتی که درست باشد را با α نشان می‌دهیم. در این فرضیه‌ها، $\tilde{\theta}_۰$ یک عدد فازی معلوم در $\mathcal{F}(\Theta)$ است.

برای آزمون فرضیه‌های فازی (۱)، ابتدا در هر سطح $h \in [۰, ۱]$ فرضیه‌های زیر را متناظر با فرضیه‌های فازی (۱) در نظر می‌گیریم

$$H^l_{۰h} : \theta^l_h = \theta^l_{۰h} \;\; vs \;\; H^l_{۱h} : \theta^l_h > \theta^l_{۰h}, \qquad H^u_{۰h} : \theta^u_h = \theta^u_{۰h} \;\; vs \;\; H^u_{۱h} : \theta^u_h > \theta^u_{۰h}. \tag{۲}$$

حال چون $\mathcal{X}_۱, \ldots, \mathcal{X}_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\tilde{\theta}, \sigma^۲)$، طبق نتیجه ۱.۲ برای هر $h \in [۰, ۱]$ داریم

$$X^l_{۱h}, \ldots, X^l_{nh} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^l_h, \sigma^۲), \qquad X^u_{۱h}, \ldots, X^u_{nh} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^u_h, \sigma^۲). \tag{۳}$$

از این نمونه‌ها برای آزمون فرضیه‌های (۲) در اندازه α استفاده می‌کنیم. نواحی رد متناظر با فرضیه‌های صفر (۲) به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌باشند

$$C^l_h = \{\underline{x}^l_h | \bar{x}^l_h > a^l_h\}, \qquad C^u_h = \{\underline{x}^u_h | \bar{x}^u_h > a^u_h\}. \tag{۴}$$

که در آن‌ها $\bar{x}^l_h = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^n x^l_{ih}$، $\bar{x}^u_h = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^n x^u_{ih}$، و مقادیر a^i_h و b^i_h برای $i = l, u$، چندک‌هایی از توزیع آماره‌های $\bar{X}^i_h$ هستند که به‌گونه‌ای تعیین می‌شوند تا نواحی رد (۴) در اندازه α شوند، یعنی

$$P_{\theta^i_{۰h}}\left\{\bar{X}^i_h \in C^i_h\right\} = \alpha$$

بر اساس نمونه‌های (۳)، هر فرضیه صفر (۲) در اندازه α رد می شود اگر و فقط اگر این نمونه‌ها در ناحیه رد متناظر با آن فرضیه قرار گیرد. یک روش دیگر برای آزمون فرضیه‌های (۲)، که هم‌ارز با روش بالا است، استفاده از تعریف $P-$مقدار است. $P-$مقدارِ فرضیه‌های (۲) به‌ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$Pv\left(\bar{x}^l_h\right) = P_{\theta^l_{۰h}}\left\{\bar{X}^l_h \geq \bar{x}^l_h\right\}, \qquad Pv\left(\bar{x}^u_h\right) = P_{\theta^u_{۰h}}\left\{\bar{X}^u_h \geq \bar{x}^u_h\right\}. \tag{۵}$$

در روش آزمون فرضیه‌های آماری با استفاده از $P-$مقدار، فرضیه صفر رد می‌شود اگر و فقط اگر $P-$مقدار آزمون کمتر از α باشد. بنابراین با مقایسه مقادیر $P-$مقدار (۵) با α فرضیه‌های (۲) را آزمون می‌کنیم. با آزمون فرضیه‌های (۲) برای تمام hها بر اساس $P-$مقدار، مجموعه‌های زیر به‌دست می‌آیند

$$A^l_{\tilde{\theta}_۰;\alpha} = \left\{h \in [۰, ۱] \,\middle|\, Pv\left(\underline{x}^l_h\right) \geq \alpha\right\}, \qquad A^u_{\tilde{\theta}_۰;\alpha} = \left\{h \in [۰, ۱] \,|\, Pv\left(\underline{x}^u_h\right) \geq \alpha\right\},$$

و قرار می‌دهیم $R^l_{\tilde{\theta}_۰;\alpha} = \left(A^l_{\tilde{\theta}_۰;\alpha}\right)^c$ و $R^u_{\tilde{\theta}_۰;\alpha} = \left(A^u_{\tilde{\theta}_۰;\alpha}\right)^c$. این مجموعه نمایانگر مقادیری از h هستند که برای آن‌ها روش آزمون بر مبنای $P-$مقدار بر اساس داده‌های (۳)، منجر به پذیرش

فرضیه‌های صفر (۲) در اندازه α شده است و مجموعه‌های $R^l_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha}$ و $R^u_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha}$ نمایانگر مقادیری از h هستند که برای آن‌ها روش آزمون بر مبنای $P-$مقدار بر اساس داده‌های (۳)، منجر به رد فرضیه‌های صفر (۲) در اندازه α شده است.

تعریف ۱.۳. در مسئله آزمون فرضیه‌های فازی (۱) بر اساس $P-$مقدار، فرضیه فازی $\tilde{H}_{\cdot}$ در مقابل $\tilde{H}_1$ را با درجه

$$DA = \frac{\mathcal{L}\left(A^l_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha} \cup A^u_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha}\right)}{\mathcal{L}\left(A^l_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha} \cup A^u_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha} \cup R^l_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha} \cup R^u_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha}\right)} = \frac{\mathcal{L}\left(A^l_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha} \cup A^u_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha}\right)}{۲},$$

می‌پذیریم و با درجه $DR = ۱ - DA$ رد می‌کنیم، که در آن $\mathcal{L}(A)$ اندازه لبگ مجموعه A است.

مثال ۱.۳. یک شرکت لاستیک‌سازی می‌خواهد متوسط عمر لاستیکی را که به تازگی تولید کرده است برآورد کند. ۲۴ لاستیک توسط ۶ ماشین هم‌مدل مورد آزمایش قرار می‌گیرند. به دلیل برخی محدودیت‌ها، طول عمر لاستیک‌ها را نمی‌توان به‌دقت ثبت کرد، و لذا داده‌ها به‌صورت اعداد فازی مثلثی زیر گزارش شده‌اند (داده‌ها برگرفته از مرجع [۸] می‌باشند)

$(۳۲۶۱۱, ۸۹۱, ۸۸۶)_T$	$(۳۳۰۵۲, ۴۶۷, ۷۳۵)_T$	$(۳۲۶۱۷, ۵۲۴, ۶۳۸)_T$	$(۳۳۹۷۸, ۷۱۲, ۹۱۱)_T$
$(۳۲۴۶۶, ۵۲۳, ۷۴۶)_T$	$(۳۳۴۶۳, ۳۶۸, ۶۶۸)_T$	$(۳۲۴۵۵, ۴۷۸, ۵۷۹)_T$	$(۳۳۴۱۸, ۶۱۲, ۴۹۰)_T$
$(۳۳۵۴۳, ۶۴۳, ۷۹۲)_T$	$(۳۳۱۲۷, ۷۱۲, ۹۴۵)_T$	$(۳۳۰۷۰, ۹۰۱, ۸۹۸)_T$	$(۳۱۶۲۴, ۸۸۱, ۸۳۶)_T$
$(۳۱۵۶۵, ۳۷۸, ۶۷۲)_T$	$(۳۲۵۹۷, ۴۱۲, ۵۸۹)_T$	$(۳۰۸۸۱, ۵۵۴, ۵۶۴)_T$	$(۳۳۲۲۴, ۵۳۷, ۶۸۴)_T$
$(۳۱۸۳۸, ۸۹۳, ۹۰۱)_T$	$(۳۲۵۸۴, ۹۴۵, ۹۵۸)_T$	$(۳۴۰۵۳, ۸۴۵, ۸۲۳)_T$	$(۳۴۰۳۶, ۶۱۳, ۷۳۵)_T$
$(۳۴۱۵۷, ۶۹۳, ۸۱۷)_T$	$(۳۳۸۴۴, ۷۸۴, ۶۰۵)_T$	$(۳۲۸۰۰, ۸۶۶, ۶۴۵)_T$	$(۳۲۲۹۰, ۷۷۹, ۷۷۴)_T$

با توجه به نتایج و تجربیات قبلی می‌توان فرض کرد که داده‌ها از یک توزیع نرمال فازی با واریانس ۷۴۷۰۰۰ هستند. می‌خواهیم فرضیه فازی $\tilde{\theta} = (۳۲۰۰۰, ۲۰۰۰, ۲۰۰۰)_T$: $\tilde{H}_{\cdot}$ را در مقابل فرضیه‌های دوطرفه، یکطرفه راست و یکطرفه چپ فازی در اندازه $\alpha = ۰/۰۵$ آزمون کنیم.
با استفاده از حساب اعداد فازی، داریم

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{X}} &= (۳۲۸۸۷, ۶۶۷, ۷۴۵)_T,\\
\bar{\mathcal{X}}_h &= [\bar{x}^l_h, \bar{x}^u_h] = [۳۲۲۲۰ + ۶۶۷h, ۳۳۶۳۲ - ۷۴۵h],\\
\tilde{\theta}_{\cdot h} &= [\theta^l_{\cdot h}, \theta^u_{\cdot h}] = [۳۰۰۰۰ + ۲۰۰۰h, ۳۴۰۰۰ - ۲۰۰۰h].
\end{aligned}$$

از طرفی

$$X^l_{۱h}, \ldots, X^l_{۲۴h} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^l_{\cdot h}, ۷۴۷۰۰۰), \qquad X^u_{۱h}, \ldots, X^u_{۲۴h} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\theta^u_{\cdot h}, ۷۴۷۰۰۰).$$

۱. **آزمون فرضیه‌های** $\tilde{H}_{\cdot}:\tilde{\theta}=(۳۲۰۰۰,۲۰۰۰,۲۰۰۰)_T$ **در مقابل** $\tilde{H}_{۱}:\tilde{\theta}\succ(۳۲۰۰۰,۲۰۰۰,۲۰۰۰)_T$
در هر سطح $h\in[۰,۱]$، $P-$مقدار آزمون فرضیه‌های یکطرفه

$$H^l_{\cdot h}:\theta^l_h=۳۰۰۰۰+۲۰۰۰h \qquad vs \qquad H^l_{۱h}:\theta^l_h>۳۰۰۰۰+۲۰۰۰h,$$
$$H^u_{\cdot h}:\theta^u_h=۳۴۰۰۰-۲۰۰۰h \qquad vs \qquad H^u_{۱h}:\theta^u_h>۳۴۰۰۰-۲۰۰۰h.$$

به صورت زیر است

$$Pv\left(\bar{x}^l_h\right) = P_{\theta^l_{\cdot h}}\left\{\bar{X}^l_h\geq\bar{x}^l_h\right\}=\Phi\left[\sqrt{\frac{۲۴}{۷۴۷۰۰۰}}(۱۳۳۳h-۲۲۲۰)\right],$$
$$Pv\left(\bar{x}^u_h\right) = P_{\theta^u_{\cdot h}}\left\{\bar{X}^u_h\geq\bar{x}^u_h\right\}=\Phi\left[\sqrt{\frac{۲۴}{۷۴۷۰۰۰}}(۳۶۸-۱۲۵۵h)\right].$$

و $A^l_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha}=\emptyset$، $A^u_{\tilde{\theta}_{\cdot};\alpha}=[۰/۵۲۴۵,۱]$. بنابراین فرضیه $\tilde{H}_{\cdot}$ در اندازه $\alpha=۰/۰۵$ با درجه ۰/۲۳۷۷ پذیرفته می‌شود و با درجه ۰/۷۶۲۳ رد می‌شود.

۴ نتیجه‌گیری

گزاره هایی که در بالا بیان شدند، نحوه ساخت آزمون های آماری را برای فرضیه های فازی با استفاده از داده های فازی نشان می دهند.البته آزمون های مشابهی را با معیارهای دیگر از قبیل معیار امکان برتری اکید نیز می توان ساخت. آزمون های پیشنهادی خوشتعریف هستند، زیرا اگر از داده های دقیق به جای مشاهدات فازی استفاد کنیم و فرضیه های فازی را با انواع دقیق آنها جایگزین کنیم، این آزمون ها تبدیل به آزمون های معنی داری کلاسیک می شوند. بکارگیری این آزمون ها در عمل بسیار ساده هستند. از آنجا که ابهام هم در داده ها و هم در فرضیه ها وارد شده است، خروجی این آزمون ها نیز به صورت فازی هستند. به عبارتی، آزمون های پیشنهاد شده منجر به تصمیم گیری فازی درباره رد یا پذیرش فرضیه تحت مطالعه می شوند.

مراجع

[1] Aummann, R.J. (1965), *Integrals of set-valued function*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 12: 1-12.

[2] Feng, Y. (2000), *Gaussian fuzzy random variables*, Fuzzy Sets and Systems, 111: 325-330.

[3] Filzmoser, P., Viertl, R. (2004), *Testing hypotheses with fuzzy data: the fuzzy p-value*, Metrika 59:21-29.

[4] Parchami, A., et al. *Fuzzy p-value in testing fuzzy hypotheses with crisp data* , Statistical Papers

[5] Puri, M.L., Ralescu, D.A. (1985), *The concept of normality for fuzzy random variables*, The Annals of Probability, 13, No. 4: 1373-1379.

[6] Puri, M.L., Ralescu, D.A. (1986), *Fuzzy random variables*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 114: 409-422.

[7] Viertl, R. (2002), *Statistical inference with non-precise data*, Encyclopedia of Life Support Systems. UNESCO, Paris.

[8] Wu, H.C. (2005), *Statistical hypotheses testing for fuzzy data*, Information Sciences, 175: 30-57.

[9] Wu, H.C. (2009), *Statistical confidence intervals for fuzzy data*, Expert Systems with Applications, 36: 2670-2676.

[10] Zadeh, L.A. (1965), *Fuzzy sets*, Information and Control, 8: 338-353.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

خواص موروثی $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویری و φ- $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویری جبرهای باناخ

ابراهیم تمیمی [۱]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولایت

چکیده

در این مقاله، خواص موروثی $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویری جبرهای باناخ که به حاصلضرب تانسوری تصویری آنها منتقل می‌شود را بررسی می‌کنیم. همچنین، خواص موروثی φ- میانگین‌پذیری چپ(راست) و φ- میانگین‌پذیری داخلی آنها را مطالعه می‌کنیم و مثالهایی برای تایید نتایج بدست آمده، ارایه می‌دهیم. در ادامه، نتایج موروثی دیگری در زمینه نامبرده مورد بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: $\psi \otimes \varphi$- $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}$- دوتصویر، $\psi \otimes \varphi$- میانگین‌پذیر، میانگین‌پذیری داخلی، میانگین‌پذیری چپ، ضرب تانسوری تصویری

۱ مقدمه

مفهوم ميانگين‌پذيري (براي گروه‌هاي گسسته) توسط ج. فون نويمان در سال ۱۹۲۹ آغاز شد كه در آن، يک گروه گسسته ميانگين‌پذير است هرگاه يک اندازهٔ احتمال جمعی پاياي چپ موجود باشد. پس از آن م. م. دي اين مفهوم را به طور رسمی براي تمام گروه‌های فشرده موضعی معرفی كرد. بعدها اين مفهوم توسط ب. ا. جانسون در سال ۱۹۷۲ براي جبرهاي باناخ توسيع داده شد و از آن پس به عنوان يک موضوع تحقيقاتی جالب، مورد توجه قرار گرفت [۸]. در سال ۲۰۰۶ قهرمانی و همكاران مفهوم ضعيف‌تر ميانگين‌پذيري تقريبی را معرفی كردند و توانستند بسياري از نتايج مربوط به ميانگين‌پذيري را تعميم دهند. در سال ۲۰۰۸ كانيوث، لائو و پيم مفهوم φ- ميانگين‌پذيري جبرهاي باناخ را معرفی كردند [۱۱] كه اين تعريف با الهام از تعريف ميانگين‌پذيري چپ F- جبرها كه قبلاً توسط لائو [۱۲] انجام شده بود، شكل گرفت. اين مفهوم مورد توجه بسياري قرار گرفت و ثابت شد كه φ- ميانگين‌پذيري رابطهٔ نزديكی با وجود يكهٔ تقريبی كران‌دار براي $\ker\varphi$ دارد. مفهوم φ- ميانگين پذيري در [۱۰] و به‌طور مستقل در [۱۳] معرفی شد. اخيرا، نسخه‌های ديگر اين مفهوم توسط تميمی و غفاری نيز مورد بررسی قرار گرفت [۱۲، ۱۱]. فرض كنيد $\mathcal{A}$ يک جبر باناخ باشد.

[1] e.tamimi@velayat.ac.ir

براي یک تابعک خطی ضربی $\varphi \in \mathcal{A}^*$، $\mathcal{A}$ را φ- میانگین‌پذیر چپ می‌نامیم هرگاه $\mathcal{A}$ داراي یک φ- میانگین چپ باشد. یعنی، یک تابعک خطی کران‌دار m روي $\mathcal{A}^*$ وجود داشته باشد که براي هر $a \in \mathcal{A}$ و $f \in \mathcal{A}^*$، در شرط $m(\varphi) = ۱$ و $m(f.a) = \varphi(a)m(f)$ صدق کند. جبرهاي باناخ جابجایی، جبرهاي باناخ مشخصه میانگین‌پذیر و جبرهاي باناخ داراي یکۀ تقریبی کران دار، مثال‌هایی از جبرهاي باناخ φ- میانگین‌پذیر داخلی هستند.

هلمسکی در دهه ۱۹۸۰ جبرهاي باناخ دوتصویر را تعریف کرد که تا به اکنون به عنوان یکی از ابزارهاي مهم در همانستگی جبرهاي باناخ شناخته می‌شود [۳]. فرض کنید به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$، $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ یک نگاشت ضربی باشد یعنی $\pi_{\mathcal{A}}(a \otimes b) = ab$. در این صورت جبر باناخ $\mathcal{A}$، دوتصویر نامیده می‌شود هرگاه همریختی $\mathcal{A}$- دومدولی پیوسته $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوري که $\pi_{\mathcal{A}} \circ \rho = id_{\mathcal{A}}$. پس از آن مفاهیم دیگري که قوي‌تر یا ضعیف‌تر از این مفهوم بودند نیز تعریف و مورد بررسی قرار گرفتند. به عنوان مثال، ژانگ در سال ۱۹۹۹ جبرهاي باناخ دوتصویر تقریبی را معرفی کرد [۲۳]. سهامی و پورعباس در سال ۲۰۱۴ با الهام از تعریف φ- میانگین‌پذیري مفهوم جبرهاي باناخ φ- دوتصویر را معرفی کردند و خواص آن را مورد بررسی قرار دادند [۲۲]. پس از آن نیز تحقیقات گسترده‌ای روی این مفهوم براي بسیاري از جبرها از جمله جبر گروهی، جبر اندازه، جبر نیم گروهی و جبرهاي لیپشیتزی صورت گرفت. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و φ یک تابعک خطی ضربی کران‌دار ناصفر روی $\mathcal{A}$ باشد در این صورت $\mathcal{A}$، φ- دوتصویر نامیده می‌شود هر گاه همریختی $\mathcal{A}$- مدولی پیوسته $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ موجود باشد به طوري که $\varphi \circ \pi_{\mathcal{A}} \circ \rho(a) = \varphi(a)$. نویسندگان در [۱۹] مفهوم جبرهاي باناخ $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر را معرفی کردند و رابطۀ آنها را با برخی از مفاهیم همانستگی مطالعه کردند.

در این مقاله، به بررسی خواص موروثی A^{**}- دوتصویري جبر باناخ $A = \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ می‌پردازیم. همچنین، رابطۀ بین این مفهوم با مفهوم $\varphi \otimes \psi$- میانگین‌پذیری داخلی و $\varphi \otimes \psi$- میانگین‌پذیري چپ را به‌دست می‌آوریم. در واقع، ارتباط بین $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}$- دوتصویري و $\varphi \otimes \psi$- میانگین‌پذیري را بررسی می‌کنیم. جبرهاي باناخ $\psi \otimes \varphi$-$(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}$- دوتصویر را بررسی کرده و ارتباط آنها را با برخی دیگر از مفاهیم همانستگی به دست می‌آوریم.

۲ نتایج اصلی

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و X یک $\mathcal{A}$- دومدول باناخ باشد. در این صورت فضاي دوگان X یعنی X^* با اعمال مدولی زیر یک $\mathcal{A}$- دومدول باناخ است:

$$(a.f)(x) = f(x.a), \quad (f.a)(x) = f(a.x); \qquad (a \in \mathcal{A}, x \in X, f \in X^*).$$

اگر $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ فضاي حاصل‌ضرب تانسوري تصويري باشد در اين صورت $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ يک $\mathcal{A}$- دومدول باناخ با اعمال مدولی زیر است:

$$a.(b\otimes c)=ab\otimes c,\ \ (a\otimes b).c=a\otimes bc;\qquad (a,b,c\in\mathcal{A}).$$

بنابراين $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A})^*$ با اعمال مدولی زیر يک $\mathcal{A}$- دومدول باناخ است:

$$(a.f)(b\otimes c)=f(b\otimes ca),\ \ (f.a)(b\otimes c)=f(ab\otimes c);\qquad (a,b,c\in\mathcal{A},f\in(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A})^*).$$

به‌طور مشابه می‌توان $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A})^{**}$ را به عنوان يک $\mathcal{A}$- دومدول باناخ در نظر گرفت. به يک تابعک خطی ضربی ناصفر روي جبر باناخ $\mathcal{A}$ يک مشخصه گفته می شود و مجموعهٔ تمام مشخصه‌هاي روي $\mathcal{A}$ را با نماد $\Delta(\mathcal{A})$ نمايش می‌دهيم. در سرتاسر اين مقاله، $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{**}$ نشانندهٔ طبیعی و $\pi_{\mathcal{A}}:\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ نگاشت ضربی باشد. آرنز در سال ۱۹۵۱ دو ضرب روي دوگان دوم يک جبر باناخ تعريف کرد تا بتواند آن را تبديل به يک جبر باناخ کند. در واقع اين ضرب ها توسيع ضرب معمولی روي جبر هستند. به اين ضرب‌ها ضرب آرنز اول و دوم گفته می‌شود که به ترتيب با نمادهاي $\square$ و $\diamondsuit$ نمايش داده می‌شوند و به صورت زير تعريف می‌شوند:

$$\langle F\square G,f\rangle=\langle F,G.f\rangle,\ \ \langle F\diamondsuit G,f\rangle=\langle G,f.F\rangle$$

و

$$\langle G.f,a\rangle=\langle G,f.a\rangle,\ \ \langle f.F,a\rangle=\langle F,a.f\rangle$$

و

$$\langle f.a,b\rangle=\langle f,ab\rangle,\ \ \langle a.f,b\rangle=\langle f,ba\rangle,$$

که در آن $F,G\in\mathcal{A}^{**}$، $f\in\mathcal{A}^*$ و $a,b\in\mathcal{A}$. دقت شود که اگر $\mathcal{A}$ يک جبر باناخ باشد و $\varphi\in\Delta(\mathcal{A})$ آنگاه توسيع يکتايی از φ به $\mathcal{A}^{**}$ موجود است که آن را با $\tilde{\varphi}$ نمايش می‌دهيم. در واقع براي هر $F\in\mathcal{A}^{**}$ قرار می‌دهيم $\tilde{\varphi}(F)=F(\varphi)$.
ابتدا تعريف جبرهاي باناخ $\mathcal{A}^{**}$- دوتصوير را ارائه می‌دهيم. براي جزئيات بيشتر به [۱۹] مراجعه شود.

تعریف ۱.۲. جبر باناخ $\mathcal{A}$ را $\mathcal{A}^{**}$- دوتصوير گوييم هر گاه همريختی پيوسته $\rho:\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{A}^{**}$ موجود باشد به طوريکه به ازای هر $a\in\mathcal{A}$،

$$\pi_{\mathcal{A}^{**}}\circ\rho(a)=\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(a)\qquad(۱)$$

که در آن $\pi_{\mathcal{A}^{**}}:\mathcal{A}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{A}^{**}\to\mathcal{A}^{**}$ عملگر ضربی با ضابطهٔ $\pi_{\mathcal{A}^{**}}(F\otimes G)=F\square G$ است.

مثالهای زير نشان می‌دهند که جبرهای باناخ ميانگين‌پذير نقش عمده‌ای در مبحث دوتصويری ايفا می‌کنند، همچنين جبرهای باناخی که $\mathcal{A}^{**}$- دوتصوير نيستند بسيار حائز اهميت‌اند.

مثال ۱.۲. الف) فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. اگر $\mathcal{A}^{۲}$ در $\mathcal{A}$ چگال نباشد آنگاه $\mathcal{A}$ نمی‌تواند یک جبر باناخ $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر باشد.

ب) فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی باشد. بنا بر قضیه جانسون و مفاهیم بالا اگر G میانگین‌پذیر نباشد آنگاه جبر گروهی $L^{۱}(G)$، $L^{۱}(G)^{**}$- دوتصویر نمی‌باشد.

ج) فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ با یکهٔ تقریبی کران‌دار باشد. اگر $\mathcal{A}$ میانگین‌پذیر نباشد آنگاه $\mathcal{A}$، $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر نخواهد بود.

د) فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ با یکهٔ تقریبی کران‌دار باشد اما شبه میانگین‌پذیر نباشد در این صورت $\mathcal{A}$، $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر نخواهد بود.

در قضیهٔ زیر به بررسی خاصیت دوتصویر بودن دو جبر باناخ مفروض و موروثی بودن این خاصیت برای حاصل‌ضرب تانسوری تصویری آنها می‌پردازیم. در واقع نشان می‌دهیم خاصیت مذکور تحت شرایطی، به حاصل ضرب تانسوری تصویری جبرهای باناخ منتقل می‌شود.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ $\mathcal{A}^{**}$- دو تصویر و $\mathcal{B}$ یک جبر باناخ $\mathcal{B}^{**}$- دو تصویر باشند. اگر $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ یک جبر باناخ باشد، آنگاه $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}$- دوتصویر است.

اثبات. تعریف می‌کنیم

$$\lambda : \mathcal{A}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{B}^{**} \to (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}, \qquad \lambda(\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(a)\otimes\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(b)) = \mathcal{K}_{\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}}(a\otimes b)$$

و قرار می‌دهیم $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}\otimes\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(a\otimes b) = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(a)\otimes\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(b)$، که در آن $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}\otimes\mathcal{K}_{\mathcal{B}} : \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B} \to \mathcal{A}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{B}^{**}$. ادعا می‌کنیم

$$\rho_{\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}}(:= \rho_{\mathcal{A}}\otimes\rho_{\mathcal{B}}) = \pi^{-۱}_{(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}} \circ \lambda \circ (\mathcal{K}_{\mathcal{A}}\otimes\mathcal{K}_{\mathcal{B}})$$

در رابطه‌ی

$$\pi_{(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}}(a\otimes b) = \mathcal{K}_{\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}}(a\otimes b)$$

صدق می‌کند، که در آن $\pi_{(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}} : (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}\widehat{\otimes}(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**} \to (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}$ عملگر ضربی با ضابطه‌ی $\pi_{(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}}(F\otimes G) = F\square G$ است. □

مثال زیر در جهت تایید قضیه ۱.۳ می‌باشد.

مثال ۲.۲. فرض کنید

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} ۰ & a & b \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} ; \ ۰ \neq a, ۰ \neq b \in \mathbb{C} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ a' & ۰ & ۰ \\ b' & ۰ & ۰ \end{pmatrix} ; \ ۰ \neq a', ۰ \neq b' \in \mathbb{C} \right\}.$$

در این صورت با جمع و ضرب اسکالر و ضرب معمولی ماتریسی و نرمهای زیر، $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر باناخ هستند

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = |a| + |b|, \quad (a, b \in \mathbb{C}),$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a' & 0 & 0 \\ b' & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = |a'| + |b'|, \quad (a', b' \in \mathbb{C}).$$

همچنین، $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ با ضرب

$$(\alpha \otimes \beta).(\gamma \otimes \delta) = \alpha\gamma \otimes \beta\delta, \quad (\alpha, \gamma \in \mathcal{A}, \ \ \beta, \delta \in \mathcal{B}) \qquad (۲)$$

یک جبر باناخ است. داریم

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{۲} &= (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}).(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\neq \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}. \end{aligned}$$

در نتیجه $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}$- دوتصویر نمی‌باشد. اینک نشان دهیم یا $\mathcal{A}$، $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر نمی‌باشد یا $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}^{**}$- دوتصویر نمی‌باشند. برای این منظور داریم

$$\mathcal{A}^{۲} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathcal{A}.$$

همچنین،

$$\mathcal{B}^{۲} \neq \mathcal{B}.$$

بنا بر مثال ۱.۲ ، نتیجه مطلوب بدست می‌آید.

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. گوییم $\mathcal{A}$، φ- $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر است هر گاه همریختی پیوسته $\mathcal{A}$- دومدولی $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{A}^{**}$ موجود باشد به طوریکه به ازای هر $a \in \mathcal{A}$،

$$\tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}} \circ \rho(a) = \varphi(a).$$

به وضوح مفهوم φ- $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویری $\mathcal{A}$ ضعیف‌تر از $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویری $\mathcal{A}$ می‌باشد و از آن نتیجه می‌شود. در ادامه با ذکر مثالی نشان می‌دهیم که عکس این مطلب لزوما برقرار نیست.

گزاره ۱. فرض کنید $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ جبرهای باناخ، $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ و $\psi \in \Delta(\mathcal{B})$. فرض کنید φ- $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر و ψ- $\mathcal{B}^{**}$- دوتصویر باشند. آن گاه $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، $\varphi \otimes \psi$- $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}$- دوتصویر است.

اثبات. فرض کنید $\pi_{(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}} : (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}\widehat{\otimes}(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**} \to (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}$. نگاشت ضربی باشد. نشان می‌دهیم یک همریختی پیوسته $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$- مدولی مانند

$$\rho_{\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}} : \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B} \to (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}\widehat{\otimes}(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**} \qquad (۳)$$

وجود دارد به طوریکه $\widetilde{\varphi \otimes \psi} \circ \pi_{(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}}(a \otimes b) = \varphi \otimes \psi(a \otimes b)$. بنا بر قضیه ۱.۳ و فرضیات قضیه، فرض کنید

$$\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{A}^{**}, \quad \rho_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{B}^{**}$$

به‌ترتیب همریختی‌های پیوسته $\mathcal{A}$- مدولی و $\mathcal{B}$- مدولی باشند یعنی برای هر $a, a' \in \mathcal{A}$ و $b, b' \in \mathcal{B}$

$$\rho_{\mathcal{A}}(aa') = \rho_{\mathcal{A}}(a).a' = a.\rho_{\mathcal{A}}(a'), \quad \rho_{\mathcal{B}}(bb') = \rho_{\mathcal{B}}(b).b' = b.\rho_{\mathcal{B}}(b') \qquad (۴)$$

که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ و $b \in \mathcal{B}$، در شرایط زیر صدق کنند،

$$\tilde{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{A}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A}}(a) = \varphi(a), \quad \tilde{\psi} \circ \pi_{\mathcal{B}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{B}}(b) = \psi(b),$$

که در آن

$$\pi_{\mathcal{A}^{**}} : \mathcal{A}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{A}^{**} \to \mathcal{A}^{**}; \quad F_{\mathcal{A}} \otimes G_{\mathcal{A}} \mapsto F_{\mathcal{A}}\square G_{\mathcal{A}}$$

و

$$\pi_{\mathcal{B}^{**}} : \mathcal{B}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{B}^{**} \to \mathcal{B}^{**}; \quad F_{\mathcal{B}} \otimes G_{\mathcal{B}} \mapsto F_{\mathcal{B}}\square G_{\mathcal{B}}.$$

همچنین فرض کنید

$$\rho_{\mathcal{A}} \otimes \rho_{\mathcal{B}}(a \otimes b) = \rho_{\mathcal{A}}(a) \otimes \rho_{\mathcal{B}}(b), \quad (a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}).$$

بنا بر [۲، لم ۱.۷]، $\varphi \otimes \psi$- $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}$- دوتصویری $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، ثابت می‌شود. □

تعریف ۲.۳. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. گوییم $\mathcal{A}$، φ- میانگین‌پذیر چپ است هرگاه تور کران‌دار (m_α) در $\mathcal{A}$ موجود باشد به طوري که براي هر $a \in \mathcal{A}$،

$$am_\alpha - \varphi(a)m_\alpha \to ۰, \qquad \varphi(m_\alpha) \to ۱.$$

تور (e_α) را یکهٔ تقریبی چپ جبر باناخ $\mathcal{A}$ گوییم هرگاه براي هر $a \in \mathcal{A}$، $e_\alpha a \to a$. یکهٔ تقریبی (e_α) را کران‌دار گوییم هرگاه $K > ۰$ وجود داشته باشد که $\|e_\alpha\| \leq K$. به طور مشابه یکهٔ تقریبی راست کران‌دار نیز تعریف می‌شود. جبر باناخ $\mathcal{A}$ داراي یکهٔ تقریبی کران‌دار است هرگاه داراي یکهٔ تقریبی چپ کران‌دار و راست کران‌دار باشد.

تذکر ۱.۲. بر اساس [۱۹، قضیه ۳.۳]، اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ با یکهٔ تقریبی چپ (راست)، $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ و $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر باشد، آنگاه $\mathcal{A}$، φ- میانگین‌پذیر چپ (راست) است.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر باناخ با یکه های تقریبی چپ(راست) باشند، $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ و $\psi \in \Delta(\mathcal{B})$. اگر $\mathcal{A}$، $\mathcal{A}^{**}$- دو تصویر و $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}^{**}$- دوتصویر و $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ یک جبر باناخ باشد. آنگاه $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، $\varphi \otimes \psi$- میانگین‌پذیر چپ(راست) است.

اثبات. از آنجا که $\mathcal{A}$، $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر و $\mathcal{B}$، $\mathcal{B}^{**}$- دوتصویر می‌باشند، طبق تعریف، عملگرهای $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{A}^{**}$، و $\rho_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{B}^{**}$ و همچنین نشاننده‌های طبیعی

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{**}, \qquad \mathcal{K}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{**}$$

وجود دارند به طوریکه برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ و $a', b' \in \mathcal{B}$ خواهیم داشت

$$\pi_{\mathcal{A}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{A}}(a) = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(a), \qquad \rho_{\mathcal{A}}(ab) = \rho_{\mathcal{A}}(a).b = a.\rho_{\mathcal{A}}(b)$$

و

$$\pi_{\mathcal{B}^{**}} \circ \rho_{\mathcal{B}}(b') = \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(b'), \qquad \rho_{\mathcal{B}}(a'b') = \rho_{\mathcal{B}}(a').b' = a'.\rho_{\mathcal{B}}(b').$$

طبق [۲، لم ۱.۷]، نگاشت‌های $\Phi : \mathcal{A}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{A}^{**} \to (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A})^{**}$ و $\Psi : \mathcal{B}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{B}^{**} \to (\mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**}$ وجود دارند به طوری که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$، $a', b' \in \mathcal{B}$، $n \in \mathcal{A}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{A}^{**}$ و $n' \in \mathcal{B}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{B}^{**}$ در شرایط [۲، لم ۱.۷]، صدق کنند. فرض کنید $\{m_\alpha\} \subseteq \mathcal{A}$ و $\{n_\beta\} \subseteq \mathcal{B}$ به‌ترتیب یکه‌های تقریبی چپ جبرهای باناخ $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ باشند. نگاشتهای

$$\rho_{\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}} : \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B} \to (\mathcal{A}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{A}^{**})\widehat{\otimes}(\mathcal{B}^{**}\widehat{\otimes}\mathcal{B}^{**})$$

و

$$\lambda : (\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A})^{**}\widehat{\otimes}(\mathcal{B}\widehat{\otimes}\mathcal{B})^{**} \to \Big(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})\widehat{\otimes}(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})\Big)^{**}$$

بعد از محاسبات نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، $\varphi \otimes \psi$- میانگین‌پذیر چپ است. □

تعریف ۴.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. جبر باناخ $\mathcal{A}$ را φ- میانگین‌پذیر داخلی گوییم هرگاه تور کراندار $(a_\alpha) \subseteq \mathcal{A}$ موجود باشد به طوریکه برای هر $a \in \mathcal{A}$،

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to ۰, \quad \varphi(a_\alpha) \to ۱.$$

قضیه ۳.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$، $\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ جبرهای باناخ باشند. فرض کنید $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$، $\psi \in \Delta(\mathcal{B})$، $\mathcal{A}$، φ- میانگین‌پذیر داخلی و $\mathcal{B}$، ψ- میانگین‌پذیر داخلی باشند. آنگاه $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، $\varphi\otimes\psi$- میانگین‌پذیر داخلی است.

اثبات. عمل ضرب به ازای هر $a, c \in \mathcal{A}$ و $b, d \in \mathcal{B}$ روی $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ را به صورت $(a \otimes b).(c \otimes d) = ac \otimes bd$ در نظر می‌گیریم. همچنین، تعریف می‌کنیم $\varphi \otimes \psi(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b)$.

تورهای کراندار $\{a_\alpha\}$ در $\mathcal{A}$، $\{b_\alpha\}$ در $\mathcal{B}$ و $\{a_\alpha \otimes b_\alpha\}$ در $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ و $b \in \mathcal{B}$،

$$aa_\alpha - a_\alpha a \to ۰, \quad \varphi(a_\alpha) \to ۱,$$

و

$$bb_\alpha - b_\alpha b \to ۰, \quad \psi(b_\alpha) \to ۱.$$

داریم

$$\begin{aligned}(a \otimes b).(a_\alpha \otimes b_\alpha) - (a_\alpha \otimes b_\alpha).(a \otimes b) &= (aa_\alpha \otimes bb_\alpha) - (a_\alpha a \otimes b_\alpha b) \\ &= aa_\alpha \otimes \overbrace{(bb_\alpha - b_\alpha b)}^{\to ۰}\end{aligned}$$

لذا

$$(a \otimes b).(a_\alpha \otimes b_\alpha) - (a_\alpha \otimes b_\alpha).(a \otimes b) \to ۰.$$

همچنین

$$\varphi \otimes \psi(a_\alpha \otimes b_\alpha) = \varphi(a_\alpha)\psi(b_\alpha) \to ۱.$$

در نتیجه $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$، $\varphi \otimes \psi$- میانگین‌پذیر داخلی است. □

در قضیه بعد یک خاصیت موروثی را ثابت می‌کنیم. در واقع، به بررسی رابطه بین $\varphi \otimes \varphi$- میانگین‌پذیری چپ و راست $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ و φ- $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویری جبر باناخ $\mathcal{A}$ می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که اگر جبر باناخ $\mathcal{A}$، $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر باشد آنگاه به ازای $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$، جبر باناخ $\mathcal{A}$، φ- $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر خواهد بود.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ جبرهای باناخ و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. اگر $\mathcal{A}$، φ- $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر و جابجایی باشد، آنگاه $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$، $\varphi \otimes \varphi$- میانگین‌پذیر چپ و راست است.

اثبات. با تعریف ضرب زیر

$$(a \otimes b).(c \otimes d) = ac \otimes bd, \quad (a, b, c, d \in \mathcal{A})$$

روی $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$، آنرا به جبر باناخ تبدیل می‌کنیم. از آنجا که $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ جابجایی است لذا

$$(a \otimes b).(c \otimes d) = ac \otimes bd = ca \otimes db = (c \otimes d).(a \otimes b), \quad (a, b, c, d \in \mathcal{A}),$$

در نتیجه $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ نیز یک جبر باناخ جابجایی خواهد بود. چون $\mathcal{A}$، φ- $\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر است. لذا بنا بر قضیه ۱.۳، $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$، $(\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A})^{**}$- دوتصویر است. اکنون با در نظر گرفتن قضیه ۲.۲، $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$، $\varphi \otimes \varphi$- میانگین‌پذیر چپ و راست خواهد بود. □

نتیجه ۱.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$ جبرهای باناخ و $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. در این صورت اگر $\mathcal{A}$، φ-$\mathcal{A}^{**}$- دوتصویر و دارای یکه تقریبی کراندار باشد آنگاه $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{A}$، $\varphi\otimes\varphi$- میانگین‌پذیر چپ و راست است.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ با یکهٔ تقریبی چپ (راست) باشد بنابراین $\mathcal{A}$، φ- میانگین‌پذیر چپ و راست است. اینک بنا بر قضیه ۲.۲ اثبات کامل می‌شود. □

مراجع

[1] Ghahramani, F., Loy, R.J., and Willis, G.A. (1996), *Amenability and weak amenability of second conjugate Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc, 124, 1489–1497.

[2] Helemskii, A.Ya. (1989), *The Homology of Banach and Topological Algebras*, Kluwer Academic Publishers, Holland.

[3] Johnson, B.E. (1972), *Cohomology in Banach algebras*, Mem. Amer. Math. Soc, 127.

[4] Kaniuth, E., Lau, A.T., and Pym, J. (2008), *On ϕ-amenability of Banach algebras*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc, 144, 85–96.

[5] Kaniuth, E., Lau, A.T., and Pym, J. (2008), *On character amenability of Banach algebras*, J. Math. Anal. Appl, 344, 942–955.

[6] Lau, A.T. (1983), *Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups*, Fund. Math, 118, 161–175.

[7] Monfared, M.S. (2008), *Character amenability of Banach algebras*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc, 144, 697–706.

[8] Rostami, M., and Sahami, A. (2023), *$\mathcal{A}^{**}$-biprojectivity of Banach algebras*, Measure Algebras and Applications, 1(1), 128–140.

[9] Sahami, A., and Pourabbas, A. (2013), *On ϕ-biflat and ϕ-biprojective Banach algebras*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 20, 789–801.

[10] Zhang, Y. (1999), *Nilpotent ideals in a class of Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc, 127, 3237– 3242.

[11] Tamimi, E., and Ghaffari, A. (2024), *On $\chi\otimes\eta$-strong Connes amenability of certain dual Banach algebras*, J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math. 31(1), 1-19.

[12] Tamimi, E., and Ghaffari, A. (2025), *A Survey on χ-module Connes amenability of semigroup algebras*, Journal of Algebraic Systems, 13 (1), 53-67.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

حلقه‌های شدیداً دوطرفه

سیدجمال هاشمی‌زاده دزفولی [۱] فاطمه حسن‌زاده [۲]

[۱,۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

در این مقاله، به معرفی و مطالعه کلاس جدیدی از حلقه‌ها می‌پردازیم که در آن‌ها هر عنصر یا عنصر مرکزی یا عنصر معکوس‌پذیر است. چنین حلقه‌هایی را حلقه‌های شدیداً دوطرفه می‌نامیم. واضح است که هر حلقه تقسیم و هر حلقه جابجایی، نمونه‌ای از یک حلقه شدیداً دوطرفه هستند. این حالت‌ها را "موارد بدیهی" می‌نامیم و تمرکز مقاله بر مطالعه حلقه‌های شدیداً دوطرفه نابدیهی است. در ادامه مقاله، با ارائه مثالی از یک حلقه شدیداً دوطرفه نابدیهی، برخی خواص ساختاری این حلقه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به عنوان نمونه، نشان می‌دهیم که هر حلقه شدیداً دوطرفه نابدیهی الزاماً یک حلقه موضعی است. همچنین اثبات می‌کنیم که اگر چنین حلقه‌ای کاهش‌یافته باشد و حلقه تقسیم نباشد، لزوماً یک حلقه جابجایی خواهد بود.

کلمات کلیدی: حلقه دوطرفه، حلقه دوطرفه قوی، حلقه شدیداً دوطرفه، حلقه کاهش‌یافته، حلقه موضعی

۱ مقدمه

در مطالعه ساختار حلقه‌ها، توجه به اعضای خاص حلقه همواره نقش مهمی در شناخت ساختار و ویژگی‌های آن‌ها ایفا کرده است. از جمله عناصر ویژه در یک حلقه می‌توان به عناصر مرکزی، عناصر معکوس‌پذیر، مقسوم‌علیه‌های صفر، عناصر خودتوان و موارد مشابه اشاره کرد. در واقع، بر پایه‌ی رفتار این عناصر، کلاس‌های مختلفی از حلقه‌ها تعریف شده‌اند که هر یک به نوبه‌ی خود نقش مهمی در گسترش این ساختار جبری ایفا کرده‌اند. به عنوان نمونه می‌توان به حلقه‌های کوهن (حلقه‌هایی که هر عضوشان مقسوم‌علیه صفر یا معکوس‌پذیر است) و حلقه‌های پاک (حلقه‌هایی که هر عضو آن‌ها را می‌توان به صورت مجموع یک خودتوان و یک معکوس‌پذیر نوشت) اشاره کرد. در این مقاله، ما به معرفی کلاس جدیدی از حلقه‌ها می‌پردازیم که در آن‌ها هر عضو یا مرکزی است یا معکوس‌پذیر، و این حلقه‌ها را حلقه‌های شدیداً دوطرفه می‌نامیم. بدیهی است که حلقه‌های تقسیم و حلقه‌های جابجایی نمونه‌های ابتدایی از این کلاس محسوب می‌شوند که در این مطالعه به عنوان حالت‌های بدیهی در نظر

[1] jhashemi@scu.ac.ir
[2] hasanzadeh.math71@gmail.com

گرفته می‌شوند. حلقه‌های شدیداً دوطرفه را می‌توان تعمیمی از دو ساختار شناخته‌شده‌ی دیگر دانست: حلقه‌های دوطرفه، که در آن‌ها هر ایده‌آل یک‌طرفه، یک ایده‌آل است؛ و حلقه‌های دوطرفه قوی، که در آن‌ها ضرب هر دو ایده‌آل دلخواه جابه‌جاپذیر است (یعنی برای هر دو ایده‌آل I و J از R، تساوی $IJ = JI$ برقرار باشد). برای اطلاعات بیشتر در مورد حلقه‌های دوطرفه خواننده را به [۵، ۲] ارجاع می‌دهیم.

در سرتاسر این مقاله، فرض می‌شود که همه حلقه‌ها شرکت‌پذیر و یک‌دار هستند و در هیچ‌کدام از آن‌ها تساوی $0 = 1$ برقرار نیست. ما نمادهای $U(R)$، $Cen(R)$ را به ترتیب برای مجموعه اعضای مرکزی و اعضای معکوس‌پذیر حلقه‌ی R به‌کار می‌بریم و چنان‌چه $X \subseteq R$، از نمادهای $l(X)$، $r(X)$ به ترتیب برای نمایش پوچ‌ساز چپ و راست X در حلقه R استفاده می‌کنیم. در حالت خاص $X = \{a\}$، پوچ‌ساز چپ و راست X را به ترتیب با نمادهای $l(a)$ و $r(a)$ نمایش می‌دهیم. ایده‌آل چپ I در حلقه‌ی R که با هر ایده‌آل چپ ناصفر R اشتراک ناصفر داشته باشد، یک ایده‌آل چپ اساسی نامیده می‌شود. ایده‌آل راست اساسی به طور مشابه تعریف می‌گردد. مجموعه $Z_l(R)$ ($Z_r(R)$) را مجموعه همه عضوهای حلقه R که پوچ‌ساز چپ (راست) آن‌ها یک ایده‌آل چپ (راست) اساسی باشد در نظر می‌گیریم. در واقع $Z_l(R)$ و $Z_r(R)$ ایده‌آل‌های حلقه R هستند که به ترتیب ایده‌آل تکین چپ و ایده‌آل تکین راست حلقه R نامیده می‌شوند. چنان‌چه $Z_l(R) = R$، حلقه R را یک حلقه تکین چپ و در صورتی که $Z_l(R) = 0$ حلقه R را یک حلقه ناتکین چپ می‌نامند. حلقه تکین راست و ناتکین راست به طور مشابه تعریف می‌گردند. حلقه R را یک حلقه‌ی موضعی می‌نامند هرگاه دارای یک ایده‌آل چپ ماکسیمال منحصر بفرد باشد.

در [۳، قضیه ۱۹.۱]، ثابت شده است حلقه R یک حلقه موضعی است اگر و تنها اگر دارای یک ایده‌آل راست ماکسیمال باشد و یا به طور معادل اگر و تنها اگر $R \setminus U(R)$ با عمل ضرب حلقه یک گروه تشکیل دهد. حلقه R یک حلقه کاهش‌یافته نامیده می‌شود هرگاه فاقد عضو پوچ‌توان ناصفر باشد. حلقه‌ای را که فاقد ایده‌آل پوچ‌توان ناصفر باشد یک حلقه نیم‌اول می‌نامند. اگر R یک حلقه باشد برای هر $x, y \in R$، عبارت $xy - yx$ جابجاگر جمعی x و y نامیده می‌شود. یادآور می‌شویم هر آنچه در مورد حلقه‌ها مورد نیاز است را می‌توان در [۳، ۴] یافت و ما خواننده را برای دیدن جزئیات بیشتر به این منابع ارجاع می‌دهیم.

۲ حلقه‌های شدیداً دوطرفه

تعریف ۱.۲. حلقه‌ی R را شدیداً دوطرفه می‌نامیم هرگاه هر عضو آن در مرکز حلقه، یا یک عضو معکوس‌پذیر باشد.

مثال بعد یک مثال نابدیهی از حلقه‌های شدیداً دوطرفه ارائه می‌دهد.

مثال ۱.۲. فرض کنیم K یک میدان دلخواه و $T = K(s, t)$ میدان توابع گویا با دو متغیر مستقل

بر روی میدان K باشد. قرار می‌دهیم

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & a_s & b \\ ۰ & a & a_t \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix} : a, b \in T \right\}$$

که در آن a_s و a_t به ترتیب مشتق جزیی a نسبت به s و t هستند. R با جمع و ضرب ماتریس‌ها یک حلقه شدیداً دوطرفه است.

در ابتدا توجه داریم که حلقه فوق جابجایی نیست، زیرا

$$\begin{bmatrix} s & ۱ & ۰ \\ ۰ & s & ۰ \\ ۰ & ۰ & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & ۰ & ۰ \\ ۰ & t & ۱ \\ ۰ & ۰ & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} st & t & ۱ \\ ۰ & st & s \\ ۰ & ۰ & st \end{bmatrix}$$

اما

$$\begin{bmatrix} t & ۰ & ۰ \\ ۰ & t & ۱ \\ ۰ & ۰ & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & ۱ & ۰ \\ ۰ & s & ۰ \\ ۰ & ۰ & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} st & t & ۰ \\ ۰ & st & s \\ ۰ & ۰ & st \end{bmatrix}$$

حلقه تقسیم هم نیست، زیرا

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

حال فرض کنیم $\begin{bmatrix} a & a_s & b \\ ۰ & a & a_t \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix}$ یک عضو دل‌خواه در R باشد. روشن است که اگر a ناصفر باشد، آن‌گاه $\begin{bmatrix} a & a_s & b \\ ۰ & a & a_t \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix}$ یک عضو معکوس‌پذیر در R و معکوس آن عضو $\begin{bmatrix} a^{-۱} & -a_s a^{-۲} & (a)^{-۳}(a_s a_t - ba) \\ ۰ & a^{-۱} & -a_t a^{-۲} \\ ۰ & ۰ & a^{-۱} \end{bmatrix}$ می‌باشد. از آنجا که برای هر عضو معکوس‌ناپذیر $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & b \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ داریم

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & b \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & c_s & d \\ ۰ & c & c_t \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & bc \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & c_s & d \\ ۰ & c & c_t \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & b \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم R یک حلقه شدیداً دوطرفه نابدیهی است.

قضیه ۱.۲. هر حلقه‌ی شدیداً دوطرفه نابدیهی یک حلقه موضعی است.

اثبات. فرض کنید R یک حلقه‌ی شدیداً دوطرفه نابدیهی باشد، u و v دو عنصر معکوس‌پذیر و x یک عنصر معکوس‌ناپذیر در R باشند. در این صورت، چون x معکوس‌ناپذیر است و حلقه شدیداً دوطرفه است، x لزوماً عنصر مرکزی است. همچنین، حاصل‌ضرب‌های xu و xv نیز معکوس‌ناپذیر هستند. بنابراین، این دو عنصر نیز، به دلیل معکوس‌ناپذیر بودن، باید مرکزی باشند. حال داریم:

$$x(uv) = (xu)v = v(xu) = (vx)u = (xv)u = x(vu)$$

و در نتیجه $x(vu-uv) = ۰$. تساوی اخیر نشان می‌دهد که مجموعه اعضای معکوس‌ناپذیر حلقه R، پوچ‌ساز مجموعه اعضای جابجاگر آن می‌باشند. بنابراین مجموعه اعضای معکوس‌ناپذیر R تشکیل یک ایده‌آل می‌دهند. □

تذکر ۱.۲. تصویر همریخت هر حلقه شدیداً دوطرفه، یک حلقه شدیداً دوطرفه است.

گزاره ۲. فرض کنیم R یک حلقه شدیداً دوطرفه غیر بدیهی باشد، در این صورت $\frac{R}{M}$ یک میدان است.

اثبات. کافی است نشان دهیم $\frac{R}{M}$ یک حلقه جابجایی است. پس برای هر دو عضو a و b در R باید نشان دهیم $ab-ba \in M$. اگر چنین نباشد، آنگاه اثبات قضیه ۱.۲، نشان می‌دهد $M(ab-ba) = ۰$ و چون بنا به فرض خلف $ab-ba$ یک عضو معکوس‌پذیر است، به دست می‌آوریم $M = ۰$. پس R یک حلقه تقسیم می‌باشد که این یک تناقض است. □

تذکر ۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه شدیداً دوطرفه باشد و $C = Cen(R)$. در این صورت R کاهش‌یافته است اگر و تنها اگر C کاهش‌یافته باشد.

گزاره ۳. فرض کنیم R یک حلقه شدیداً دوطرفه کاهش‌یافته باشد که حلقه تقسیم نیست. در این صورت R یک حلقه جابجایی است.

اثبات. اگر R جابجایی نباشد، آنگاه $u, v \in R$ موجودند که $uv-vu \neq ۰$. با فرض $C = Cen(R)$ قرار می‌دهیم:

$$E = \{c \in C : uc \in C\}$$

واضح است که E یک ایده‌آل سره و ناصفر C است. ادعا می کنیم اگر $x \in C$ موجود باشد که $xE = ۰$، آنگاه $x = ۰$. دو حالت در نظر می گیریم. ابتدا فرض کنیم $ux = ۰$. در این حالت به‌دلیل معکوس‌پذیر بودن u به‌دست می‌آوریم $x = ۰$. حال فرض کنیم $ux \neq ۰$. در این حالت ux یک عضو مرکزی است و لذا با توجه به تعریف E خواهیم داشت $x \in E$. پس $x^۲ = ۰$ که در این صورت فرض کاهش‌یافته بودن حلقه ایجاب می‌کند که $x = ۰$. بنابراین در هر حالت ادعای مورد

اشاره برقرار است. حال چون هر عضو معکوس‌ناپذیر متعلق به پوچ‌ساز مجموعه جابجاگرها است، خواهیم داشت $(uv-vu)E=0$ و لذا $uv-vu$ یک عضو معکوس‌پذیر است. اما در این صورت به دست می‌آوریم $E=0$ که این یک تناقض است. بنابراین فرض خلف نادرست بوده و نتیجه می‌گیریم R یک حلقه‌ی جابجایی است. □

نتیجه ۱.۲. اگر R یک حلقه شدیداً دوطرفه نابدیهی باشد، آنگاه R یک حلقه‌ی کاهش‌یافته نیست.

بنا به [۱، تمرین ZA۵]، اگر N یک ایده‌آل پوچ‌توان در حلقه R باشد، آنگاه $l(N)$ یک ایده‌آل راست اساسی R است. لم بعد حالت خاصی از این نتیجه است که آن را اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۲. اگر R یک حلقه دوطرفه و $a\in R$ یک عضو پوچ‌توان باشد، آنگاه $l(a)$ یک ایده‌آل اساسی است.

اثبات. فرض کنیم J یک ایده‌آل دل‌خواه و ناصفر در حلقه R باشد. k را کوچک‌ترین عدد طبیعی انتخاب می‌کنیم با این ویژگی که $Ja^k=0$. در این صورت $Ja^{k-1}\neq 0$ و چون $Ja^{k-1}\subseteq l(a)\cap J$، پس $l(a)\cap J\neq 0$. بنابراین $l(a)$ یک ایده‌آل اساسی R است. □

گزاره ۴. فرض کنیم R یک حلقه‌ی شدیداً دوطرفه ناتکین باشد که حلقه تقسیم نیست، در این صورت R یک حلقه جابجایی کاهش‌یافته است.

اثبات. با توجه به گزاره ۳، کافی است نشان دهیم R یک حلقه‌ی کاهش‌یافته است. فرض کنیم a یک عضو پوچ‌توان در حلقه R باشد. اگر $a\neq 0$ آنگاه لم قبل نشان می‌دهد که $l(a)$ یک ایده‌آل اساسی است و لذا $a\in Z(R)$. پس $Z(R)\neq 0$ و این تناقض است. □

مراجع

[1] Goodearl, K. R. and Warfield, R. B.(2004), *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, Cambridge University Press.

[2] Karamzadeh, O. A. S. (1982), On duo rings. Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 9, 143-148.

[3] Lam, T.Y. (1991), *A first course in noncommutative rings*, New York: Springer-verlag.

[4] Lam, T. Y. (1999), *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 189. New York: Springer-Verlag.

[5] Thierrin, G. (1960), *On duo rings* Canadian Mathematical Bulletin. 3, 167–172.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC
Islamic World Science Citation Center
۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

دیدگاه نقطه ثابت بروئر در تعادل نش

سید علی محمد محسنی الحسینی [1]

[1] دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

چکیده

قضیه نقطه ثابت بروئر یکی از قضایای آنالیز تابعی می باشد که نقش آن را در اثبات قضایای زیادی مشاهده می کنیم. همچنین در علوم فیزیک، شیمی واقتصاد کاربرد دارد. در این مقاله تاریخچه پیدایش وگسترش قضایای نقطه ثابت بروئررا بررسی کرده و همچنین اظهارات افرادی که این قضیه را تجزیه وتحلیل کرده اند را شرح می دهیم. در ادامه مختصری به کاربردهای آن اشاره می کنیم.

کلمات کلیدی: قضیه نقطه ثابت، تعادل نش، اصل انقباض باناخ

۱ مقدمه

لویتزن اگبرتوس جان بروئر[1] در فوریه ۱۸۸۴ دیده به جهان گشود و در دسامبر ۱۹۶۶ چشم از جهان فرو بست. او یک ریاضیدان و فیلسوف هلندی بود، که در نظریه مجموعه‌ها کار کرده ودرضمن بنیانگذار ریاضیات شهود گرایی بوده است. بروئر در سال ۱۹۱۲ در سن ۳۱ سالگی به عنوان عضوی از آکادامی سلطنتی علوم هلند انتخاب شد، که در بین دوستان خود به نام برتوس معروف بود. وی در رساله دکتری خویش مناظره راسل و پوانکاره را که در رابطه با نقطه ثابت بود موردبررسی قرار داد.

نتایج اصلی کار او قضیه نقطه ثابت[2]، تغییر ناپذیری توپولوژی از نظر درجه و تغییر ناپذیری توپولوژیکی از نظر بعد است که در نهایت محبوب‌ترین موضوع مطرح شده بروئر، در میان ریاضیدانان قضیه نقطه ثابت است.

۲ قضیه نقطه ثابت بروئر

قضیه نقطه ثابت بروئردراوایل قرن نوزدهم یک موضوع بحث برانگیزبود بطوریکه در اثبات‌های اولیه نیز با عدم پذیرش انجمن ریاضی مواجه شد. بروئر قضیه نقطه ثابت را بیان کرد در حالیکه هیچ

[1]amah@vru.ac.ir

[1] L.E. J. Brouwer

[2] Brouwer's fixed point theorem



شکل ۱: بروئر

اطلاعاتی در رابطه با یکتایی جواب نداشت. در سال ۱۸۸۰ تا ۱۸۸۶ آنری پوانکاره[۳] در مباحثی نظیر، قضیه پوانکاره-بن دیکسون [۴] نتیجه ای را ثابت کرد که معادل قضیه نقطه ثابت بروئر بود[۳۳]. سهی پارک درسال۱۹۹۹ [۵] [۹]، قضیه بروئررابه صورت زیر مطرح کرد:

یک نگاشت پیوسته از یک $n-$سیمپلکس[۶] به خودش دارای یک نقطه ثابت است.

در این قضیه $n-$سیمپلکس را می توان یک گوی یکه B^n یا هر زیر مجموعه محدب فشرده از R^n در نظر گرفت.

ازطرفی در سال ۲۰۱۳ سانتش گومار[۷] ، قضیه بروئر را به صورت زیر بیان کرد[۱۶]:

اگر Bیک گوی بسته در R^n ، وf خود نگاشتی پیوسته روی Bباشد، آنگاه fدارای یک نقطه ی ثابت است.

از جمله افرادی که به غیر از بروئر به اثبات قضایای فوق پرداختند **پیرس بهل**[۸]و **ژاک سالمون آدامارد**[۹] بودند که در زیر راجع به آنها می پردازیم:

پیرس بهل متولد سال ۱۸۶۵ در والکا[۱۰] است که در دسامبر ۱۹۲۱ در گذشت. او در سال ۱۸۸۶ مقاله‌ای در مورد تئوری ویژگیهای معادلات دیفرانسیل خطی نوشت که موفق به کسب مدال طلا شد. وی همچنین در سال ۱۹۰۴ مقاله ای در زمینه معادلات دیفرانسیل در ژورنال:

$$J.reine,\ angew\ Math ۱۲۷(۱۹۰۴),\ ۱۷۹ - ۲۷۶$$

[3] Henri Poincaré
[4] Jules Henri Poincaré-Ivar Bendixson
[5] Sehie Park
[6] Simplex
[7] Santosh Kumar
[8] P. Bohl
[9] Jacques Salomon Hadamard
[10] Valka

به چاپ رساند، ازجمله قضایای مهمی که بهل در این مقاله به آن پرداخته قضیه معادل با قضیه نقطه ثابت بروئر می باشد که در زیر آمده است[۹]:

فرض کنید $f_1, f_2, ...f_n$ **توابع پیوسته ای از** x **روی دامنه** $G\{x_i : -a_i \leq x_i \leq a_i\ i = 1, 2, 3, ..., n\}$ **باشند که دارای یک نقطه مشترکی نباشند. در این صورت یک نقطه** $(u_1, u_2, ..., u_n)$ **در مرز** G **وجود دارد که**

$$f_i(u_1, u_2, ..., u_n) = N.u_i, \quad N < 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (1)$$

بهل در ادامه به مطالعه مسائل پایداری و ناپایداری منیفلدهای یک دستگاه از معادلات شبه خطی پرداخت که منجر به نتیجه زیر شد[۲۷] :

یک کره یک توپ جمع شده نیست و یک نگاشت پیوسته ازیک گوی به خودش دارای یک نقطه ثابت است.



شکل ۲ : پیرس بهل

از طرفی قضیه‌ی نقطه ثابت از جمله دستاوردهای بهل محسوب می‌شودبطوریکه وی اولین کسی بود که به اثبات این قضیه در فضای سه بعدی پرداخت ولی در آن زمان کارهای وی چندان مورد توجه قرار نگرفت وهفت سال بعد توسط بروئر در مقاله زیر به چاپ رسید[۵]،[۲۱]،[۲۲]،[۲۳].

$\ddot{U}berdie\ Abbildung\ von\ Mannigfaltigkeiten, Math.Ann.$۷۱(۱۹۱۲), ۹۷ − ۱۱۵.

ژاک سالمون آدامار[11] در ۸ دسامبر ۱۸۶۵ در ورسای[12] فرانسه بدنیا آمد و در ۱۷ اکتبر سال ۱۹۶۳در گذشت. آدامار سهم عمده‌ای در نظریه اعداد، نظریه تابع مختلط، هندسه دیفرانسیل و

[11] Jacques Salomon Hadamard
[12] Versailles

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دارد[۲۵]،[۲۸]. وی در سال ۱۹۱۰ قضیه معروف به نقطه ثابت بروئر را به اثبات رساند[۲۴].



شکل ۳: آدامارد

علیر غم اینکه بروئر هیچ اطلاعاتی در رابطه با تعیین نقطه ثابت بدست نیاورد ولی به مرور زمان روش های مفیدی برای تقریب نقطه ثابت بدست آمد که ابزار مناسبی برای تعیین صفر های یک تابع است.
از جمله ی این روشها می توان به روش زیر اشاره نمود:
معادله چند جمله ای $Px = ۰$ را به صورت $Fx - x = ۰$ درنظر بگیرید، بطوریکه $Fx - x = Px$باشد. بطور مثال معادله $x^۲ - ۷x + ۱۲ = ۰$ را که $Px = x^۲ - ۷x + ۱۲$ در نظر بگیرید. با به کار گیری روش فوق ، خواهیم داشت $x = (x^۲ + ۱۲)/۷ = Fx$ لذا معادله دارای دو نقطه ثابت $x = ۳, x = ۴$ خواهد بود[۴]. حال نظرات سهی پارک را که به روند گسترش قضیه نقطه ثابت پرداخته مورد بررسی قرار می دهیم[۹].

در سال ۱۹۲۲ باناخ [۱۳] اولین نتایج قضیه نقطه ثابت بروئر، روی نگاشت های های انقباضی معروف به **اصل انقباض باناخ** رابیان نمود.

اگر(X, d) یک فضای متریک کامل باشدو$f : X \to X$ یک نگاشت انقباضی با ثابت انقباضی$k \in (۰, ۱)$ باشد، آنگاه f یک نقطه ثابت دارد.

از جمله نتایج قضیه نقطه ثابت بروئر، **لم ترکیبی اسپرنر**[۱۴] بود که در سال ۱۹۲۸ توسط اسپرنر

[13] Stefan Banach
[14] Sperner's Combinatorial Lemma

به دست آمد؛ وی پنجاه سال بعد از اینکه لم را مطرح نمود در سال۱۹۷۹ در کنفرانسی در جنوب انگلستان به کاربردهای متعدد این لم ،که در ذیل آمده ، اشاره نمود [۳۲].

$-invariance\ of\ dimension;$
$-\ invariance\ of\ region;$
$-theorem\ of\ verification\ (Rechtfertigungssatz)\ in\ Menger's\ theory\ of\ dimension;$
$-\ Brouwer's\ fixed\ point\ theorem.$

در سال ۱۹۲۸ کناستر ،کارتوفسکی ومازورکویچ ، توسیعی از لم ترکیبی اسپرنر معروف به **قضیه** KKM[۱۵] زیررابه دست آوردند[۱۵].

فرض کنید برای n $\cdot \leq i \leq n$ A_i **زیر مجموعه بسته ای ازیک** $n+1$ $-n$ **سیمپلکس** $p_\cdot p_1 \ldots p_n$**باشد. اگر رابطه شمول** $p_i \cdot p_{i1} \ldots p_{ik} \subset A_{io} \cup A_{i1} \cup \ldots \cup A_{ik}$ **برای تمام حالت های** $p_i \cdot p_{i1} \ldots p_{ik}$ **که** $\cdot \leq k \leq n, \cdot \leq i_\cdot < i_1 < \ldots < i_k \leq n$ **صدق نماید، آنگاه** $\cap_{i=\cdot}^{n} A_i \neq \emptyset$**.**

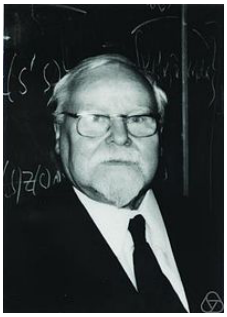
بسیاری از نتایج مهم آنالیز تابعی غیر خطی وحوزه های دیگر مر تبط باآن از هم ارزی سه قضیه بروئر، اسپر نر و KKM که گراف آن در زیر آمده حاصل می شود.

$$Brouwer[dl]_{1974} Sperner[r]_{1929} [u]^{1929}$$

در سال ۱۹۳۰ ، شودر[۱۶] نشان داد که هر نگاشت پیوسته روی هر مجموعه فشرده محدب در فضای باناخ خاصیت نقطه ثابت دارد، بعلاوه ، هر نگاشت پیوسته ضعیف روی هر مجموعه محدب فشرده ضعیف در فضای باناخ جداشدنی ، دارای نقطه ثابت است[۳۱]. تیخونوف[۱۷] در سال ۱۹۳۵ قضیه شودر را برای عملگر های فشرده روی فضاهای خطی به طور موضعی محدب، تعمیم داد[۳۴]. لازم به ذکر است که کاربرد قضایای تیخونوف و شودر ، برای اثبات وجود جواب معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال و... ، در بسیاری از کتب آمده است؛ منجمله کتب ذیل:

$-nonlinear\ systems\ of\ equations;$
$-\ systems\ of\ inequalities;$
$-\ integral\ equations;$
$-\ ordinary\ differential\ equations\ satisfying\ Lipschitz\ condition;$
$-peano's\ theorem\ on\ the\ existence\ of\ solutions\ of\ ordinary\ differential\ equations;$
$-\ (periodic\ solutions\ of\ systems\ of\ ordinary\ differential\ equations);$
$-\ elliptic\ partial\ differential\ equations;$
$-\ problemsinmathematicalphysics.$

[15] KKM Theorem
[16] Schauder
[17] Tychonoff


تیخونوف


باناخ


شودر

شکل ۴: تیخونوف- باناخ-شودر

همچنین در سال ۱۹۴۱تعمیم قضیه نقطه ثابت بروئر روی چند تابعی‌ها توسط کاکوتانی [۱۸]در فضاهای بعد متناهی و نوعی دیگر از تعمیم این قضیه در سال ۱۹۵۵ روی فضاهای مرتب جزئی توسط تارسکی [۱۹] صورت گرفت. در سال ۱۹۵۰ بونن بلاست [۲۰]و کارلین [۲۱] بررسی چنین نتایجی را در فضای باناخ نامتناهی البعد و سپس فان [۲۲]در سال ۱۹۵۲ ، در فضای موضعا محدب مطرح کرد. البته فان در سال ۱۹۶۹ ، نتایجی از نقطه ثابت برودر [۲۳]را نیز اثبات نمود[۳۳].

کی فان در سال ۱۹۶۸ قضیه KKM را برای مجموعه های محدب غیر فشرده به کار برد و نتایج معروف زیادی را در حالت غیر فشردگی توسیع داد[۱۳] [۱۴]. مهم ترین نتایج توسیع داده شده وی در این حالت در زیر آمده است :

$-generulizations\ of\ the\ KKM\ theorem\ for\ non-compact\ cases;$
$-\ geometric\ formulations;$
$-\ fixed\ point\ and\ coincidence\ theorems;$
$-\ generahzed\ minimax\ inequality\ (extending\ Allen's\ variational\ inequality\ ;$
$-\ a\ generalization\ of\ Shapley's\ KKM\ theorem;$
$-\ a\ new\ proof\ of\ the\ Brouwer\ theorem.$

از طرفی کی فان کاربردهای نگاشتKMM در حوزه های مختلف ریاضیات را ، مطابق ذیل لیست نمود:

$-potential\ theory;$
$-\ Pontrjagin\ spaces\ or\ Bochner\ spaces\ in\ inner\ product\ spaces;$
$-\ operator\ ideals;$
$-\ weak\ compactness\ of\ subsets\ of\ locally\ convex\ topological\ vector\ spaces;$

[18]Kakutani
[19]Alfred Tarski
[20]Bohnenblust
[21]Karlin
[22]Ky Fan
[23]William Browder



شکل ۵: کی فان

– $function\ algebras$;
– $harmonic\ analysis$;
– $game\ theory$;
– $mathematical\ statistics$.

در سال ۱۹۶۹ کانان [۲۴] رده ای ازنگاشت ها را بیان کرد که ظاهری شبیه نگا شت های انقباضی دارند[۱۱، ۱۲]. وی ساختار نقاط ثابت را برای رده ای از نگاشتهای غیر خطی در سال ۱۹۷۳ ارائه نمود[۱۰].
اخیرا هورواس [۲۵] ولاسوندی [۲۶]اشتراکی از قضایایی از نوع KMM، $KLee$و $Helly$ را بدست آورده که هم ارز با قضیه بروئر است [۲۶].

کرک [۲۷] در سال ۱۹۷۴ قضیه نقطه ثابت را برای نگاشت های انقباضی مورد بررسی قرارداد. وی همچنین یک قضیه نقطه ثابت را با ساختار نرمال بروکسی [۲۸] ومیلمن [۲۹]که در سال ۱۹۴۸ ارائه شده بود اثبات کرد[۲۹، ۳۰].
گرانس[۳۰] در سال ۱۹۸۱ مثالهایی از نگاشت KMM را که در زیر آمده، به دست آورده است.

۱ - مسائل تغییرات: فرض کنید C یک زیر مجموعه محدبی از فضای برداری E و $\varphi : C \to R$ یک تابع محدب باشد. در این صورت $G : C \multimap C$ برای $x \in C$ یک نگاشت KKM است.

$$Gx = \{y \in C : \varphi(y) \leq \varphi(x)\}$$

۲ - بهترین تقریب: فرض کنید C یک زیر مجموعه محدبی از فضای برداری E، p یک شبه نرم روی E و $f : C \to E$ یک تابع باشد. در این صورت $G : C \multimap C$ زیربرای $x \in C$ یک

[24] R. Kannan
[25] Horvath
[26] Lassonde
[27] W.A. Kirk
[28] M. S. Brodski
[29] D. P. Milman
[30] Granas

نگاشت KKM است.

$$Gx = \{y \in C : p(fy - y) \leq p(fy - x)\}$$

۳- نامساوی تغییرات: فرض کنید $(H, <.,.>)$ یک فضای حاصل ضرب داخلی، C یک زیر مجموعه محدبی از H و $f : C \to H$ یک تابع باشد. در این صورت $G : C \multimap C$ زیربرای $x \in C$ یک نگاشت KKM است.

$$Gx = \{y \in C :< fy, y - x >\leq ۰\}$$

۳ کاربردهای قضیه نقطه ثابت

قضیه نقطه ثابت بروئرو قضیه نقطه ثابت باناخ از جمله قضایای بنیادی آنالیز تابعی هستندو کاربردهای فراوانی در شاخه‌های مختلف ریاضی و اقتصاد دارند. یکی از مهم‌ترین کاربرد های قضیه نقطه ثابت بروئردر تئوری بازی ها و اقتصاد است . از جمله کسانی که در این زمینه به نتایجی دست پیدا نمود جان نش [۳۱] بود.

جان فوربز نش جونیور یک ریاضیدان آمریکائی است که با یک نظر به زندگی او می‌توان به وی لقب ذهن زیبا داد [۱]،[۲].وی از معروف‌ترین اساتید ریاضیات در دانشگاه پرینستون بودکه سهم اساسی در نظریه بازی ها، هندسه دیفرانسیل، و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به خود اختصاص داده است. او به معنای واقعی کلمه یک نابغه ریاضی بود و تئوری‌های مهم و بحث برانگیزی در حوزه ریاضیات و اقتصاد وضع کرد که جوایز متعددی برای وی به‌همراه داشت. بطور مثال در سال۱۹۹۴ جایزه نوبل اقتصاد را به خود اختصاص داد [۱۷]،[۱۸]،[۱۹]،[۲۰].

جان نش براساس بیانات سهی پارک در سال ۱۹۵۰ قضیه تعادل را بر اساس قضیه نقطه ثابت بروئر یا کاکو تانی بدست آورد [۸]. وی همچنین کار مهمی را به انجام رسانید که قبل از او در نظریه بازی ها[۳۲] مطرح نشده بود، ضمنا وی اثبات وجود تعادل در بازی‌های چند نفره که خود یک مثال کلاسیک می باشد را مطرح نمود. نظریه بازی‌ها در تلاش است تا موقعیت‌هایی را که در آن منافع افراد در تضاد است مدل سازی نماید، این موقعیت زمانی پدید می‌آید که موفقیت فرد و تصمیم او وابسته به استراتژی‌هایی است که طرف مقابل انتخاب می‌کند و نهایتا هدف نهایی نظریه بازی‌ها یافتن استراتژی بهینه برای بازیکنان است.

از طرفی قضیه نقطه ثابت در نظریه بازی ها تضمین می‌کند که تعادل همیشه یک تعادل نش خواهد بود.

همچنین از قضیه بروئر می توان نتیجه گرفت که یک تقاطع بین منحنی‌های عرضه و تقاضا وجود دارد[۷].

[31] John Nash
[32] Game Theory



شکل ۶: جان نش

مراجع

[1] Yu A. Shashkin, ”Fixed Points,”.

[2] http://www.sjsu.edu/faculty/watkins/fixed.htm

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Kakutani-fixed-point-theorem

[4] Santosh Kumar, ”A short survey of the development of fixed point theory,” Surveys in Mathematics and its Applications, Volume 8 (2013), 91-101.

[5] L. E. J. Brouwer, ”Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten,” Math Ann. 71 (1912), 97 - 115.

[6] http://mathforum.org/mathimages/index.php/Brouwer-Fixed-Point-Theorem.

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Brouwer-fixed-point-theorem.

[8] Sehie Park, ”A history of the nash equilibrium theorem in the fixed point theory,”

[9] Sehie Park, ”Ninety Years of the Brouwer Fixed Point Theorem,” Vietnam Journal of Mathematics 27:3 (1999) 187-222.

[10] R. Kannan, Constraction of fixed points of a class of nonlinear mappings, J. Math. Anal. Appl. 41 (1973) 430–438.

[11] R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Calcutta Math. Soc. 10 (1968) 71–76.

[12] R. Kannan, Some results on fixed points-II, American Mathematical Monthly 76 (1969) 405–408.

[13] Ky Fan, Some properties of convex sets related to fixed point theorems, Math. Ann. 266 (1984) sL9-537.

[14] Ky Fan, Fixed-point and related theorems for non-compact convex sets, in: Game Theory and Related Topics, O. Moeschlin and D. Pallaschke (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1979, pp. 151-156.

[15] B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, Ein beweis des fixpunktsatzes für n-dimensionale simplexe, Fund. Math. 14 (1929) 132–137.

[16] Santosh Kumar, " A short survey of the development of fixed point theory," Surveys in Mathematics and its Applications Volume 8 (2013), 91 101.

[17] "Nash recommendation letter" (PDF). p. 23.

[18] Goode, Erica (May 24, 2015). "John F. Nash Jr., Math Genius Defined by a 'Beautiful Mind,' Dies at 86". The New York Times.

[19] John F. Nash Jr. and Louis Nirenberg share the Abel Prize. Abel Prize. March 25, 2015.

[20] Siegfried, Tom, "A beautiful math : John Nash, game theory, and the modern quest for a code of nature,"Joseph Henry Press,1950.

[21] http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830900502.html.

[22] A. P. Youschkevitch, Biography in Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990).

[23] A. D. Myskis and I. M. Rabinovic, Mathematician Piers Bohl from Riga: With a commentary by the grand master M M Botvinnik on the chess play of P Bohl (Russian), Izdat. Zinatne (Riga, 1965).

[24] M. J. Hadamard, Sur quelques applications de 1'indice de Kronecker, Oeuvre (1910) 875-915.

[25] Mandelbrojt, Szolem; Schwartz, Laurent (1965). "Jacques Hadamard (1865–1963)". Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1): 107–129. doi:10.1090/s0002-9904-1965-11243-5. MR 0179049.

[26] C.D. Horvath and M. Lassonde, Intersection of sets with n-connected unions, Proc. Amer Math. Soc.125 (1997) 1209-1214.

[27] Alexander Šostak, "The Latvian Mathematical Society after 10 years ", EMS June 2003.

[28] https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics-Genealogy-Project.

[29] J.A. Gatica and W.A. Kirk, Fixed point theorem for contraction mappings with applications to nonexpansive and pseudo-contractive mappings, Roclcy Mount. J. Math.4 (1974) 69-79.

[30] J.A. Gatica and W.A. Kirk, A fixed point theorem for ft-set-contractions defined in a cone, Pacific J. Math. 53 (1974) l3I-132.

[31] J. Schauder, Der fixpunktsatz in funktionalräumen, Studia Math. 2 (1930) 171–180.

[32] E. Sperner, Neuer beweis fiir die invarianz der dimensionszahl und des gebietes, A bh. Math. Seminar Univ. Hamburg 6 (1928) 265-272.

[33] Mohammad Esmael Samei, " Fixed points of $\alpha-\psi$-contractive type mappings and multifunctions on intuitionistic fuzzy metric spaces", PhD thesis, September (2014).

[34] A. Tychonoff, Ein fixpunktsatz, Math. Ann. 111 (1935) 767–776. (page 15)A. Tychonoff, Ein fixpunktsatz, Math. Ann. 111 (1935) 767–776.

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

آموزش هدفمند ریاضیات در معماری: گامی به‌سوی درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضی و تقویت تخیل فضایی در آموزش عالی معماری

بهزاد کفاش [۱] سیدعباس زرگرچی [۲]

[۱] گروه علوم مهمندسی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اردکان، اردکان، ایران
[۲] گروه معماری، دانشکده هنر و معماری، مؤسسه آموزش عالی امام جواد(ع)، یزد، ایران

چکیده

با توجه به اهمیت به‌روزرسانی شیوه‌های تدریس دروس پایه معماری و لزوم ارتقاء کیفیت آن‌ها، پژوهش حاضر به طراحی و تدوین محتوای آموزشی درس «ریاضیات و معماری» با رویکردی کاربردی و بین‌رشته‌ای پرداخته است. هدف اصلی این مطالعه، تقویت ارتباط میان مفاهیم نظری ریاضیات و فرآیندهای طراحی معماری در قالب طرح درس‌هایی هدفمند است. در این راستا، ابتدا سرفصل مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری در این درس مورد تحلیل قرار گرفت و سپس بر اساس آن، یک طرح درس ۱۶ جلسه‌ای متناسب با نیازهای حرفه‌ای دانشجویان معماری تدوین گردید. محتوای ارائه‌شده شامل فعالیت‌های تعاملی با استفاده از ابزارهای ترسیمی است که از طریق آن برخی مفاهیم ریاضی با تمرین‌های طراحی تلفیق شده‌اند. این طرح در محیط کلاس اجرا و بازخوردهای کیفی اولیه از دانشجویان و اساتید دریافت شد. یافته‌های اکتشافی نشان می‌دهد که اجرای این الگو موجب افزایش انگیزه یادگیری، درک مفهومی بهتر و ارتقاء توان تحلیلی دانشجویان در مواجهه با چالش‌های طراحی شده است. بر این اساس، الگوی پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان مدلی ابتکاری برای بازنگری در آموزش درس ریاضیات در معماری مورد استفاده قرار گیرد؛ الگویی که با ادغام دانش، مهارت و خلاقیت، زمینه‌ساز تربیت معمارانی توانمند برای پاسخگویی به نیازهای پیچیده طراحی در شهرهای هوشمند آینده خواهد بود.

کلمات کلیدی: آموزش بین‌رشته‌ای، ریاضیات کاربردی در معماری، طرح درس منطبق بر برنامه درسی، تلفیق دانش نظری و عملی، یادگیری غیرمستقیم در معماری

۱ مقدمه و بیان مسئله

آموزش ریاضیات در رشته معماری، همواره با چالش گسست میان آموزش نظری و کاربردی مواجه بوده است؛ مسئله‌ای که بسیاری از پژوهشگران بر لزوم رفع آن از طریق پیوند میان مفاهیم ریاضی و فعالیت‌های طراحی تأکید کرده‌اند [۳]. در این میان، طراحی برنامه‌های درسی با رویکرد تلفیقی و میان‌رشته‌ای به‌عنوان راهکاری برای ارتقاء کیفیت آموزش مطرح شده و در بسیاری از مدل‌های پیشنهادی نیز مورد توجه قرار گرفته است [۳]. از سوی دیگر، در آموزش ریاضیات، تمرکز بیش از حد

[1] bkafash@ardakan.ac.ir
[2] abbas_zargarchi@yahoo.com

بر تکنیک‌های انتزاعی و غفلت از معنا و کاربرد، مانعی برای انتقال مؤثر مفاهیم بوده است [۴]. این چالش در معماری، با توجه به ماهیت طراحی‌محور و بصری آن، پیچیده‌تر می‌شود. مطالعات داخلی نیز نشان می‌دهند که آموزش ریاضیات در معماری اغلب فاقد ارتباط مؤثر با محتوای عملی طراحی است و نیازمند بازنگری اساسی در ساختار، محتوا و شیوه‌های تدریس می‌باشد [۱]. در نظام آموزش عالی، طراحی برنامه‌های درسی میان‌رشته‌ای مستلزم توازن میان دانش نظری، مهارت‌های کاربردی و نیازهای حرفه‌ای است. در رشته‌ای همچون معماری که در تقاطع علوم انسانی، هنر و مهندسی قرار دارد، گسست میان آموزش نظری ریاضی و کاربردهای آن در طراحی، موجب ناتوانی دانشجویان در بهره‌گیری از این دانش در فرآیندهای تحلیلی و خلاقانه شده است. در نتیجه، بسیاری از دروس ریاضی به‌صورت انتزاعی ارائه می‌شوند و پیوندی با نیازهای واقعی و حرفه‌ای دانشجویان ندارند. معمولاً تدوین سرفصل‌های درسی، بدون توجه به ماهیت میان‌رشته‌ای رشته‌هایی مانند معماری، با رویکردی سنتی تنظیم می‌شوند. از منظر حکمرانی مطلوب، لازم است دانش میان‌رشته‌ای و برنامه‌ریزی درسی انعطاف‌پذیر در اولویت قرار گیرد تا مفاهیم علوم پایه مانند ریاضیات در بسترهای کاربردی طراحی، بازتعریف شوند. در پاسخ به این چالش‌ها، پژوهش حاضر با تمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش ریاضیات در رشته معماری، تلاشی در جهت طراحی الگویی تلفیقی و میان‌رشته‌ای برای آموزش این درس ارائه می‌دهد؛ الگویی که بر پایه پیوند مفاهیم ریاضی با فرآیند طراحی معماری و استفاده از ابزارهای ترسیمی و تمرین‌های تعاملی استوار است. در این راستا، آموزش ریاضیات نه صرفاً به‌عنوان انتقال مفاهیم انتزاعی، بلکه به‌مثابه بخشی جدایی‌ناپذیر از تحلیل فضا، درک ساختار و تولید فرم در طراحی معماری بازخوانی می‌شود. الگوی پیشنهادی این پژوهش در چهار محور اصلی سازمان یافته است: ریاضیات در خدمت هنر، ریاضیات در خدمت سازه، ریاضیات در خدمت تحلیل و برنامه‌ریزی، و ریاضیات در خدمت فناوری و ابزار. این رویکرد، مفاهیمی چون هندسه اقلیدسی و نااقلیدسی، نسبت‌های طلایی، الگوریتم‌ها، کاشی‌کاری‌های هندسی، احجام افلاطونی، و هندسه طراحی را با بهره‌گیری از ابزارهای ترسمی و نرم‌افزارهای تخصصی در یک برنامه آموزشی ساخت‌یافته گرد هم می‌آورد. هدف از این طرح، تقویت مهارت‌های تحلیلی، تجسم فضایی، خلاقیت، و توان استدلال دانشجویان معماری در راستای طراحی دقیق‌تر و خلاقانه‌تر است. در چارچوب نظری این پژوهش، از رویکردهای یادگیری مبتنی بر تجربه، ساخت‌گرایی اجتماعی و یادگیری موقعیتی بهره گرفته شده است [۵، ۶، ۷]. این نظریه‌ها که بر مشارکت فعال یادگیرنده، تولید معنا، و یادگیری در بسترهای واقعی تأکید دارند، ضرورت بازطراحی آموزش ریاضی در معماری را بر پایه تعامل میان دانش نظری و تجربه عملی تبیین می‌کنند. بر این اساس، مسئله اصلی پژوهش حاضر، طراحی چارچوبی برای آموزش ریاضیات در رشته معماری است؛ چارچوبی که با تلفیق مفاهیم نظری ریاضی و تمرین‌های طراحی، بهره‌گیری از ابزارهای ترسیمی و تکیه بر تجربه‌های میان‌رشته‌ای، امکان هم‌راستاسازی بهتر محتوای آموزشی با نیازهای حرفه‌ای دانشجویان را فراهم می‌سازد. در ادامه این رویکرد، پژوهش حاضر به تدوین یک الگوی آموزشی ساخت‌یافته در قالب طرح درس ۱۶ جلسه‌ای پرداخته است که با اجرای آزمایشی آن در محیط کلاس و تحلیل

بازخوردهای کیفی دریافتی از دانشجویان و اساتید معماری، زمینه ارزیابی اولیه اثربخشی این الگو فراهم شد. یافته‌های حاصل، نشان‌دهنده ظرفیت این مدل برای ارتقاء انگیزه، درک مفهومی و توان تحلیلی دانشجویان در مواجهه با مسائل طراحی معماری است.

۲ مبانی نظری و پیشینه پژوهش

در ادبیات نظری حوزه آموزش میان‌رشته‌ای، جیکوبز بر اهمیت شناخت نیازهای حرفه‌ای در طراحی برنامه‌های درسی تلفیقی و نیز نقش دانشگاه‌ها در تسهیل هم‌افزایی میان‌رشته‌ای تأکید می‌کند [۸]. در سطح کاربردی‌تر، ورنر و مائور در دو پژوهش مختلف نشان داده‌اند که آموزش مفاهیم ریاضی در بستر طراحی معماری، در صورتی موفق خواهد بود که همراه با تمرین‌های عملی، مدل‌سازی و تحلیل دقیق فضایی صورت گیرد [۹، ۱۰]. این دیدگاه‌ها با مطالعات اوستوالد و ویلیامز که بر نقش کلیدی ریاضیات در منطق طراحی و فرم‌یابی معماری تمرکز دارند، هم‌راستا هستند [۱۱]. بررسی‌های دیگری نیز به وجود گسست بین طراحی آموزشی و نیازهای حرفه‌ای اشاره دارند. برای نمونه، مهدیزاده سراج و فارسی محمدی‌پور (۱۳۹۱) بر ضرورت بازطراحی میکروسرفصل‌های دروس پایه معماری با تأکید بر نیازهای واقعی دانشجویان تأکید کرده‌اند [۱۲]. حجه (۱۳۸۳) نیز از منظر تجربه‌گرایی در آموزش، نقش تمرین و تجربه عملی در درک عمیق‌تر مفاهیم نظری را پررنگ دانسته است [۱۳]. مطالعاتی که به ارتباط سبک‌های یادگیری با طراحی معماری پرداخته‌اند نیز نشان می‌دهند که تطبیق سبک‌های شناختی با شیوه تدریس ریاضی می‌تواند منجر به بهبود فرایند یادگیری شود [۱۴]. همچنین برخی تحلیل‌ها به ارزیابی انتقادی ساختار دوره‌های ریاضی در آموزش معماری پرداخته‌اند و بر لزوم هم‌راستاسازی این دروس با نیازهای حرفه‌ای و مهارتی تأکید داشته‌اند [۱۵]. در همین راستا، برخی منابع به شکل بنیادی‌تری به ارتباط ریاضیات با هنر و طراحی پرداخته‌اند؛ برای مثال کاپراف و سالینگاروس با تحلیل نقش الگوها و ساختارهای هندسی در معماری، نوعی نگرش تلفیقی نسبت به دانش ریاضی و طراحی ارائه می‌دهند [۱۶، ۱۷]. در مطالعاتی با رویکرد تاریخی و فرهنگی نیز، به ویژه پژوهش سرهنگی، به پیوند سنتی میان معماری ایرانی و مفاهیم ریاضی و هندسی اشاره شده است [۱۸]. از منظر نظری، پژوهش‌هایی همچون تحقیق کانر و ادموند بر تنوع رویکردهای ممکن در ترکیب ریاضیات با طراحی معماری تأکید دارند [۱۹]. در آموزش مفاهیم پایه طراحی نیز آثار معتبری نظیر کتاب چینگ نقش اصول ریاضی در نظم فضایی و فرم را برجسته کرده‌اند [۲۰]. همچنین، کولارویچ و بری نقش ابزارهای دیجیتال و پارامتریک را در تحول آموزش معماری و ارتقاء درک ریاضی از فرم برجسته کرده‌اند [۲۱، ۲۲]. در حوزه آموزش حرفه‌محور، مطالعاتی چون پژوهش شون و آکسمن به بررسی نحوه رشد تفکر طراحی و بازتاب‌پذیر در محیط‌های آموزشی پرداخته‌اند که می‌توانند نقش مهمی در آموزش ریاضیات کاربردی در معماری ایفا کنند [۲۳، ۲۴]. هچنین، هانا و باربر به تأثیر فناوری اطلاعات و نرم‌افزارهای طراحی در شکل‌گیری نگرش جدید نسبت به آموزش مفاهیم ریاضی در طراحی معماری پرداخته‌اند [۲۵]. در این راستا، نظریه‌ی بیگز و تانگ ، می‌تواند به‌عنوان یک چارچوب

مفهومی مؤثر در طراحی برنامه‌های درسی میان‌رشته‌ای مورد استفاده قرار گیرد [۲۶]. این نظریه بر هم‌راستایی اهداف یادگیری، فعالیت‌های آموزشی و ارزیابی‌ها تأکید دارد و می‌تواند به بهبود کیفیت یادگیری در آموزش معماری کمک کند. همچنین، پژوهش‌های مرتبط با نقش ریاضیات در معماری، به‌ویژه در زمینه هندسه و اعداد، نشان می‌دهد که ادغام مفاهیم ریاضی در فرآیند طراحی می‌تواند به ارتقاء توانمندی‌های تحلیلی و خلاقانه دانشجویان کمک کند [۲۷]. ارائه درس ریاضی رشته‌ی معماری را اگر با بیان مسایل نظری، طراحی و ساخت ابزارها و وسایل کاربردی انجام گیرد، بازده آموزش ریاضي را از لحاظ کمي و کيفي افزايش داده و با قدرت بيشتري عملي مي‌سازد. از طرفی استفاده از این شیوه‌ی آموزش، در کلاس ریاضي موجب مي‌شود که دانشجویان از همه حواس خود برای یادگيري مطالب استفاده کنند و به این ترتیب انتظار می‌رود که یادگيري ماندگارتر باشد. شایان ذکر است، استفاده از ایده‌های هندسی و وسایل حجمی باعث تقویت قوه‌ی تجسم و تخیل دانشجویان در رشته معماری می‌شود [۲].

۳ روش پژوهش

هدف این پژوهش، طراحی و تدوین یک محتوای آموزشی نوین برای درس «ریاضیات و معماری» است که بر اساس یک رویکرد کاربردی و بین‌رشته‌ای شکل گرفته و به تقویت ارتباط میان مفاهیم نظری ریاضیات و فرآیندهای طراحی معماری می‌پردازد. برای دستیابی به این هدف، پژوهش حاضر از یک روش ترکیبی استفاده می‌کند که شامل مراحل تحلیل سرفصل‌ها، طراحی طرح درس، اجرای آن در کلاس و ارزیابی بازخوردهای کیفی است.

- تحلیل سرفصل‌ها: در ابتدا، سرفصل مصوب وزارت علوم، تحقیقات و فناوری برای درس ریاضیات و معماری مورد تحلیل قرار گرفت. این تحلیل به‌منظور شناسایی کامل مفاهیم ریاضی پیش‌بینی شده در سرفصل و یافتن نیازهای آموزشی دانشجویان معماری در راستای تدوین محتوای آموزشی انجام شد.
- تدوین طرح درس پیشنهادی: بر اساس نتایج تحلیل سرفصل‌ها، یک طرح درس ۱۶ جلسه‌ای متناسب با نیازهای دانشجویان معماری تدوین گردید. این طرح درس به‌گونه‌ای طراحی شد که از تلفیق مفاهیم نظری ریاضیات با تمرین‌های عملی و طراحی در کلاس استفاده کند.
- استفاده از فعالیت‌های تعاملی و ابزارهای ترسیمی در طرح درس پیشنهادی: طرح درس پیشنهادی، شامل فعالیت‌های تعاملی و استفاده از ابزارهای ترسیمی برای ترکیب مفاهیم ریاضی با تمرین‌های طراحی بود. این فعالیت‌ها به دانشجویان این امکان را می‌دهد که مفاهیم ریاضی را در زمینه‌های واقعی طراحی به‌کار گیرند.
- اجرای طرح در کلاس: طرح درس طراحی‌شده پس از تدوین در محیط‌های کلاسی اجرا شد. این مرحله شامل تدریس فعال و تعاملات مستقیم با دانشجویان بود تا به‌طور عملی تأثیرات آن بر فرآیند یادگیری مورد ارزیابی قرار گیرد.

• جمع‌آوری و تحلیل بازخوردها: بازخوردهای کیفی از دانشجویان و اساتید معماری جمع‌آوری شد و مبنای ارزیابی اولیه اثربخشی الگوی پیشنهادی قرار گرفت.
• یافته‌های اکتشافی: تحلیل نتایج بازخوردهای دریافتی نشان داد که ارائه درس ریاضی از روی طرح درس‌های پیشنهادی موجب افزایش انگیزه یادگیری، درک مفهومی بهتر و ارتقاء توان تحلیلی دانشجویان در مواجهه با چالش‌های طراحی شده است.

۱.۳ طرح درس ۱۶ هفته‌ای درس ریاضیات و معماری

هفته ۱: ریاضیات در خدمت هنر و معماری – آشنایی با تقارن‌ها و کاشیکاری
محتوا: آشنایی با مفاهیم ریاضی در طرح‌های کاشیکاری و نقوش پرکننده سطح، بررسی الگوهای متقارن در معماری ایرانی و اسلامی، آشنایی با انواع تقارن‌ها.
مثال‌ها: تحلیل طرح‌های مسجد شیخ لطف‌الله و سقف مقرنس‌ها.
اهداف رفتاری:
• دانشجویان بتوانند انواع تقارن‌ها را در نقوش معماری شناسایی و تحلیل کنند.
• دانشجویان بتوانند طرح ساده‌ای با الگوی پُرکننده سطح ایجاد نمایند.

هفته ۲: ادامه مباحث تقارن‌ها و کاشیکاری – بررسی گروه‌های تقارنی
محتوا: مروری بر گروه‌های تقارنی دو بعدی، بررسی نقش‌های هندسی و تحلیل ساختاری آن‌ها.
مثال‌ها: گروه‌بندی نقوش کاشی‌کاری در مسجد جامع اصفهان براساس ۱۷ گروه والپیپر.
اهداف رفتاری:
• آشنایی با طبقه‌بندی علمی نقوش هندسی.
• توانایی تطبیق نقش‌ها با یکی از ۱۷ گروه تقارنی.
هفته ۳: احجام افلاطونی و چندوجهی‌ها در معماری
محتوا: بررسی احجام افلاطونی (مکعب، چهاروجهی منتظم، دوازده‌وجهی و ...) و اجزای آن‌ها در هندسه سه‌بعدی و کاربرد در طراحی حجم‌های معماری.
مثال‌ها: بررسی ساختار گنبدها و حجم‌پردازی در سبک معماری مدرن با استفاده از چندوجهی‌ها.
اهداف رفتاری:
• توانایی شناخت و ترسیم احجام افلاطونی و نیمه‌افلاطونی.
• تحلیل نمونه‌های معماری مبتنی بر این احجام.

هفته ۴: هندسه فراکتالی در هنر و معماری
محتوا: معرفی فراکتال‌ها و ساختارهای تکرارشونده، کاربرد در طراحی منظر، نما و جزئیات معماری.

مثال‌ها: ساختار فراکتالی در پلان‌های باغ ایرانی، استفاده از فراکتال در طراحی معاصر.
اهداف رفتاری:
- شناخت ساختار فراکتال و توانایی رسم آن.
- تحلیل ساختارهای تکراری در معماری.

هفته ۵: ریاضی در سازه – مفاهیم پایه مکانیک
محتوا: بررسی مفاهیم نیروی برآیند، گشتاور، تعادل، مرکز جرم، نیروی عکس‌العمل.
مثال‌ها: تحلیل نیروهای وارد بر یک تیر ساده با بار متمرکز، نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی.
اهداف رفتاری:
- توانایی تحلیل یک سازه ساده از نظر تعادل نیروها.
- محاسبه مرکز جرم اجسام ترکیبی.

هفته ۶: مفاهیم حرکت، سرعت و شتاب در فرم معماری
محتوا: بررسی حرکت خطی و زاویه‌ای، شتاب، انتقال نیرو در سازه‌های پویا.
مثال‌ها: کاربرد منحنی‌های حرکتی در پل‌های متحرک و فرم‌های دینامیکی.
اهداف رفتاری:
- شناخت مفاهیم بنیادی مکانیک حرکتی.
- تحلیل سازه‌ای فرم‌های متحرک.

هفته ۷: حسابان– مفهوم حد و مشتق در کاربردهای معماری
محتوا: مروری بر مفهوم حد، مشتق و شیب منحنی‌ها و کاربرد آن‌ها در تحلیل فرم و سطوح پیوسته.
مثال‌ها: بررسی فرم مارپیچ در راه‌پله‌ها، تحلیل شیب در رمپ‌ها.
اهداف رفتاری:
- محاسبه مشتق تابع و تفسیر آن در زمینه معماری.
- توانایی طراحی فرم‌هایی با تغییر شیب.

هفته ۸: حساب انتگرال و حجم اجسام معماری
محتوا: آشنایی با مفهوم انتگرال، محاسبه مساحت و حجم، کاربرد در تعیین مصالح و برآورد پروژه.
مثال‌ها: محاسبه حجم یک گنبد نیم‌کره‌ای، سطح نمای سینوسی.
اهداف رفتاری:
- آشنایی با روش‌های محاسبه حجم فرم‌های معماری.
- توانایی کاربرد انتگرال در برآورد مصالح.

هفته ۹: ریاضیات در تحلیل داده – آمار توصیفی در طراحی شهری
محتوا: مفاهیم میانگین، واریانس، انحراف معیار، چگونگی جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها.
مثال‌ها: تحلیل داده‌های جمعیت‌شناسی برای طراحی فضاهای شهری.
اهداف رفتاری:
ا توانایی تحلیل مجموعه‌ای از داده‌ها با شاخص‌های آماری.
• تفسیر آماری داده‌های محیطی در طراحی.

هفته ۱۰: ریاضیات در پژوهش – آزمون‌های آماری پایه
محتوا: آزمون فرض، آزمون t، خی‌دو، و همبستگی؛ کاربرد در پژوهش‌های معماری.
مثال‌ها: تحلیل مقایسه‌ای دو گروه بر اساس ارزیابی رضایت‌مندی.
اهداف رفتاری:
• توانایی طراحی پرسش‌نامه و تحلیل نتایج.
• کاربرد آزمون آماری در تحلیل فضا.

هفته ۱۱: منطق و استدلال در طراحی معماری
محتوا: آشنایی با روش‌های تحلیل منطقی، الگوریتم طراحی و فلوچارت.
مثال‌ها: تدوین فرآیند طراحی معماری از ایده تا اجرا با فلوچارت.
اهداف رفتاری:
• تفکر گام‌به‌گام در حل مسائل معماری.
• ترسیم نمودار تصمیم‌گیری.

هفته ۱۲: نسبت طلایی و دنباله فیبوناچی
محتوا: شناخت دنباله فیبوناچی، نسبت طلایی، مستطیل طلایی و کاربرد در هنر و معماری.
مثال‌ها: نمای پارتنون، طراحی پلان.
اهداف رفتاری:
• شناخت و رسم اشکال بر پایه نسبت طلایی.
• تحلیل کاربردی در طرح‌های معماری.

هفته ۱۳: هندسه فضایی – اندازه‌گیری در فضای سه‌بعدی
محتوا: تعریف بردار، زاویه‌ها، مختصات سه‌بعدی، ترسیم و محاسبه زوایا و فواصل.
مثال‌ها: موقعیت‌یابی دقیق ستون‌ها در پلان، محاسبه شیب بام و مسیر نور.
اهداف رفتاری:
• تحلیل موقعیت اجسام در فضا.
• کاربرد مختصات سه‌بعدی در طراحی.

هفته ۱۴: کاربرد ماشین‌حساب و محاسبات روزمره معماری
محتوا: نحوه استفاده از ماشین‌حساب مهندسی، توابع مثلثاتی، لگاریتمی و برنامه‌نویسی ساده.
مثال‌ها: محاسبه حجم مصالح، تخمین هزینه‌ها با روابط ریاضی با ماشین حساب.
اهداف رفتاری:
- کار با ماشین‌حساب علمی برای مسائل معماری.
- برنامه‌نویسی ساده برای محاسبات تکراری.

هفته ۱۵: آشنایی با نرم‌افزارهای محاسباتی
محتوا: معرفی نرم‌افزارهای SPSS Excel، Maple، و کاربرد آن‌ها در تحلیل داده‌ها و انجام پروژه.
مثال‌ها: تحلیل آماری در Excel، مدلسازی محاسباتی در Maple.
اهداف رفتاری:
- شناخت محیط کار نرم‌افزارها.
- اجرای پروژه‌های محاسباتی ساده.

هفته ۱۶: تمرین و پروژه نهایی
محتوا: جمع‌بندی، ارائه پروژه نهایی، بررسی و تحلیل دانش آموخته شده.
مثال‌ها: طراحی فرم معماری با محاسبات کامل سازه، ریاضی و تحلیل داده.
اهداف رفتاری:
- توانایی کاربرد ترکیبی مباحث در یک پروژه.
- ارتقاء مهارت تحلیل بین‌رشته‌ای در معماری.

۴ یافته‌های پژوهش

ارزیابی اثربخشی طرح درس پیشنهادی از طریق تحلیل داده‌های حاصل از مصاحبه‌های کیفی با دانشجویان شرکت‌کننده و اعضای هیئت علمی گروه معماری دانشگاه امام جواد (ع) یزد، و نیز بررسی پاسخ‌های گردآوری‌شده از طریق پرسش‌نامه‌های تکمیل‌شده در پایان نیم‌سال‌های تحصیلی گذشته انجام گرفت. تحلیل محتوای این داده‌ها نشان داد که بیشتر دانشجویان تجربه شرکت در این شیوه آموزشی را مثبت و اثربخش ارزیابی کرده‌اند. آنان ضمن اشاره به افزایش درک مفهومی از مفاهیم ریاضی، به کاربرد عملی مطالب در فرآیند طراحی، تحلیل فضا و اجرای پروژه‌های معماری تأکید ورزیدند. همچنین، شماری از پاسخ‌دهندگان به تأثیر این آموزش در تقویت توانایی تجسم فضایی، تفکر ساختاری و درک ارتباط ریاضیات با فرم‌های معماری اشاره داشتند. از سوی دیگر، اعضای هیئت علمی نیز در ارزیابی

خود، طرح پیشنهادی را رویکردی نوآورانه و مفید قلمداد کرده و بر نقش آن در تقویت پیوند میان دانش نظری و فعالیت‌های عملی در آموزش معماری تأکید داشتند. به‌ویژه، بهره‌گیری از مفاهیم ریاضی در کنار تمرین‌های ترسیمی و طراحی، از نظر اساتید، عامل مهمی در ارتقای انگیزش دانشجویان و مشارکت فعال‌تر آنان در فرایند یادگیری محسوب شده است. در مجموع، یافته‌های اولیه حاکی از آن است که رویکرد ارائه‌شده در این طرح آموزشی، از ظرفیت مطلوبی برای ارتقاء کیفیت یادگیری در حوزه ریاضیات و معماری برخوردار است. با این حال، فرایند ارزیابی این الگو همچنان در حال انجام است و نویسندگان در نظر دارند تا در مرحله بعد، با تحلیل دقیق‌تر بازخوردها و تعمیم این تجربه به دانشجویان ورودی جدید، کارایی و اثربخشی آن را به‌صورت عمیق‌تری مورد سنجش و بررسی قرار دهند.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر با هدف طراحی و معرفی یک الگوی آموزشی کاربردی برای آموزش ریاضیات در رشته معماری، تلاش داشت تا به طور مؤثری ارتباط میان مفاهیم پایه ریاضی بویژه هندسه و فرآیند طراحی معماری را تقویت کرده و به ارتقاء کیفیت آموزش در این حوزه کمک کند. در طول تحقیق، نتایج نشان داد که استفاده از یک الگوی آموزشی میان‌رشته‌ای، که شامل فعالیت‌های عملی و تجربی به ویژه با بهره‌گیری از ابزارهای ترسیمی و هندسی است، می‌تواند به‌طور قابل‌توجهی درک دانشجویان از مفاهیم هندسی و عناصر فضاساز را بهبود بخشد و آن‌ها را قادر سازد تا این مفاهیم را در طراحی‌های معماری خود به طور خلاقانه و تحلیلی به‌کار گیرند. این پژوهش تأکید دارد که ریاضیات در آموزش معماری نباید صرفاً به عنوان ابزاری محاسباتی و عددی در نظر گرفته شود، بلکه باید به‌عنوان یک زبان تحلیلی و ابزاری برای پرورش خلاقیت دانشجویان در فرآیند طراحی معرفی شود. بررسی‌ها نشان داد که پیوند مفاهیم ریاضی با تکنیک های پایه طراحی، موجب افزایش مشارکت دانشجویان، بهبود توانمندی‌های تحلیلی و ارتقاء کیفیت یادگیری آن‌ها در این حوزه می‌شود. اجرای این پژوهش نه تنها برای آموزش ریاضیات در معماری بلکه برای سایر رشته‌های میان‌رشته‌ای نیز قابل‌تعمیم است. به ویژه در رشته‌هایی که نیاز به تلفیق دانش نظری و مهارت‌های عملی دارند، می‌توان از این الگوی آموزشی به‌عنوان یک مدل موفق بهره برد. به علاوه، تحقیقات آینده باید به ارزیابی بلندمدت این الگو در آموزش دانشجویان پرداخته و تأثیر آن بر مهارت‌های حرفه‌ای فارغ‌التحصیلان، به ویژه در پروژه‌های پیچیده طراحی را بررسی کنند. در این پژوهش، طرح درس پیشنهادی واحد درسی «ریاضیات و معماری» با هدف پیوند مؤثر دانش ریاضی با مفاهیم طراحی، سازه و تحلیل در معماری تدوین شده است. در طول ۱۶ هفته، دانشجویان با مفاهیم پایه، تکنیک‌های خلق الگوهای هندسی، کاربرد ابزارها و نرم‌افزارهای مرتبط آشنا می‌شوند. تأکید بر مثال‌های واقعی و ملموس، درک عملی دانشجویان را از مفاهیم ریاضی افزایش می‌دهد و آن‌ها را برای کاربرد مؤثر در طراحی معماری و انجام پژوهش آماده می‌سازد. در مجموع،

پژوهش حاضر به‌طور مؤثر گام‌هایی را در راستای به‌روزرسانی آموزش ریاضیات در معماری برداشته است و می‌تواند به‌عنوان الگویی برای بهبود فرآیندهای آموزشی و تربیت معمارانی خلاق، تحلیلگر و دارای دید هندسی بالاتر داشته باشد.

مراجع

[۱] محمدزاده چیانه الهام و سلطان‌زاده حسین. (۱۳۹۷). ارزیابی و بررسی تطبیقی نقش ریاضیات در آموزش معماری در دانشگاه‌های داخل و خارج از کشور. فصلنامه فناوری آموزش، ۱۲(۴)، ۲۸۹-۳۰۱.

[۲] کفاش، بهزاد و زرگرچی، سیدعباس، ۱۳۹۶. ارایه هدفمند درس ریاضی برای ارتقاء توانایی های دانشجویان معماری، کنفرانس بین المللی معماری و ریاضیات، کاشان.

[3] Spelt, E. J., Biemans, H. J., Tobi, H., Luning, P. A., & Mulder, M. (2009), *Teaching and learning in interdisciplinary higher education: A systematic review*, Educational Psychology Review, 21, 365–378.

[4] Harel, G., & Trgalová, J. (1996), *Higher mathematics education*, In International Handbook of Mathematics Education: Part 1 (pp. 675–700), Dordrecht: Springer Netherlands.

[5] Kolb, D. A. (1984), *Experiential learning: Experience as the source of learning and development*, Prentice-Hall.

[6] Bruner, J. S. (1996), *The Culture of Education*, Harvard University Press.

[7] Lave, J., & Wenger, E. (1991), *Situated learning: Legitimate peripheral participation*, Cambridge University Press.

[8] Jacobs, H. H. (1989), *Interdisciplinary curriculum: Design and implementation*, Association for Supervision and Curriculum Development.

[9] Verner, I. M., & Maor, S. (2007), *Mathematical aspects in an architectural design course: The concept, design assignments, and follow-up*, Nexus Network Journal, 9(2), 363–374.

[10] Verner, I. M., & Maor, S. (2006), *Mathematical mode of thought in architecture design education: A case study*, Nexus Network Journal, 8(1), 93–107.

[11] Ostwald, M. J., & Williams, K. (2019), *Mathematics and the built environment: The role of mathematics in architectural design*, Springer.

[12] Mehdizadeh Seraj, F. (2012), Farsi Mohammadipour A., *Investigating micro syllabus of architectural basic design compatible with needs of students in architectural design courses*, Fine Arts & Urbanization, 17(4), 61-70.

[13] Hojjat, I. (2004), *Creative education–experience*, Fine Arts, 18, 25-36.

[14] Demirbas, O. O., & Demirkan, H. (2003), *Focus on architectural design process through learning styles*, Design Studies, 24(5), 437–456.

[15] Cikis, S. (2010), *A critical evaluation of mathematics courses in architectural education and practice*, International Journal of Technology & Design Education, 20(1), 95–107.

[16] Kappraff, J. (1991), *Connections: The geometric bridge between art and science*, New York: McGraw.

[17] Salingaros, N. A. (1999), *Architecture, patterns and mathematics*, Nexus Network Journal, 1(1–2), 75–85.

[18] Sarhangi, R. (2012), *Persian architecture and mathematics: An overview*, Nexus Network Journal, 14(2), 197–201.

[19] Connor, J., & Edmund, R. (2002), *Mathematics and architecture*, University of St Andrews.

[20] Ching, F. D. (2023), *Architecture: Form, space, and order*, John Wiley & Sons.

[21] Kolarevic, B. (2003), *Architecture in the digital age: Design and manufacturing*, Taylor & Francis.

[22] Burry, J. (2010), *The shifting ground of architectural geometry: Getting to know the new representational space*, Architectural Theory Review, 15(2), 187–200.

[23] Oxman, R. (2017), *Thinking difference: Theories and models of parametric design thinking*, Design Studies, 52, 1–32.

[24] Schon, D. A. (1987), *Educating the reflective practitioner: Toward a new design for teaching and learning in the professions*, Jossey-Bass.

[25] Hanna, S., & Barber, T. (2001), *An inquiry into computers in design: Attitudes before-attitudes after*, Nexus Network Journal, 3(2), 63–73.

[26] Biggs, J., & Tang, C. (2011), *Teaching for Quality Learning at University*, Open University Press.

[27] Fowler, B., & McCready, J. (2015), *Mathematics in Architecture: The Role of Geometry and Numbers*, Springer.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

چندجمله‌ای هوسویا برای گراف نردبان موبیوس

سارا شکرالهی یانچشمه [۱]

[۱] گروه ریاضی، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

چکیده

در این مقاله، چندجمله‌ای هوسویا برای گراف‌های نردبانی موبیوس M_n با $n > ۴$ رأس بررسی می‌شود. این چندجمله‌ای که با نام چندجمله‌ای وینر نیز شناخته می‌شود، پلی میان ساختار گراف و نمایش هندسی آن است و اطلاعات فاصله‌ای را رمزگذاری می‌کند. با تحلیل توزیع فواصل، بیان‌های صریحی برای چندجمله‌ای هوسویا در دو حالت $n = ۴k$ و $n = ۴k + ۲$ ارائه شده است. نتایج به‌کمک نمونه‌های محاسباتی و رابطه با شاخص وینر تأیید می‌شوند و می‌توانند در مطالعات طیفی و مدل‌سازی خواص شبکه‌های مولکولی کاربرد داشته باشند.

کلمات کلیدی: اندیس توپولوژیکی، نردبان موبیوس، چند جمله ای هوسویا، اندیس وینر

۱ مقدمه

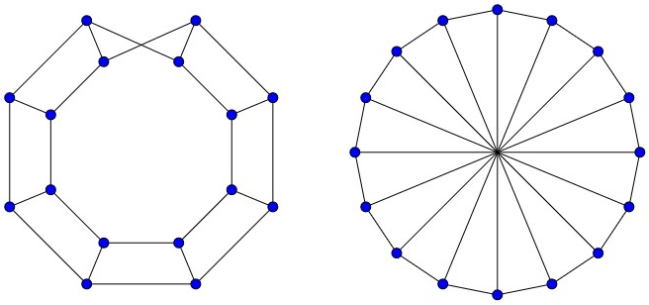
چندجمله‌ای‌های گراف نقش مهمی در نظریه گراف و علوم مرتبط دارند و به‌عنوان ابزارهای جبری برای رمزگذاری اطلاعات ساختاری گراف‌ها به‌کار می‌روند. در میان این چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای هوسویا (که به آن چندجمله‌ای وینر نیز گفته می‌شود) جایگاه ویژه‌ای دارد؛ زیرا رابطه مستقیمی با شاخص‌های توپولوژیکی مبتنی بر فاصله دارد.

چندجمله‌ای هوسویا در سال ۱۹۸۸ توسط هوسویا معرفی شد و به‌عنوان تابع مولد ناوردهای گراف مبتنی بر فاصله تعریف می‌شود. برای یک گراف متصل G، چندجمله‌ای هوسویا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(G,x) = \sum_{k=۰}^{\operatorname{diam}(G)} d_k x^k,$$

که در آن d_k تعداد جفت‌های رئوس با فاصله k و $\operatorname{diam}(G)$ قطر گراف است [۱، ۲، ۶].

[1] sa.shokrollahi@iau.ac.ir



شکل ۱: دو نما از گراف نردبان مبیوس M_n

اهمیت چندجمله‌ای هوسویا در توانایی آن برای تولید شاخص‌های توپولوژیکی مهم از طریق مشتق‌گیری و ارزیابی در نقاط خاص نهفته است. از جمله مهم‌ترین آنها، شاخص وینر $W(G)$ است که در سال ۱۹۴۷ توسط وینر معرفی شد و [۶] می‌توان آن را به صورت زیر به دست آورد:

$$W(G) = H'(G, ۱) = \sum_{k=۱}^{\mathrm{diam}(G)} k \cdot d_k,$$

که $H'(G, x)$ مشتق اول چندجمله‌ای هوسویا است.

به همین ترتیب، شاخص هایپر وینر نیز قابل استخراج از چندجمله‌ای هوسویا است که این چندجمله‌ای را به ابزاری مرکزی در مطالعه شاخص‌های توپولوژیکی مبتنی بر فاصله تبدیل کرده است.

گراف نردبان موبیوس M_n نوعی گراف مکعبی خاص است که به‌عنوان تنوعی از گراف نردبان استاندارد شناخته می‌شود. این گراف دارای ویژگی‌های ساختاری و توپولوژیکی منحصر به فردی است که آن را برای کاربردهای متنوعی در نظریه گراف و مدل‌سازی شبکه‌های پیچیده مناسب می‌سازد. از جمله ویژگی‌های بارز این گراف می‌توان به غیرمسطح بودن آن برای $n \geq ۶$ و تقارن‌های خاص ساختاری اشاره کرد [۳، ۴].

۲ تعاریف و نمادگذاری

تعریف ۱.۲. گراف نردبان موبیوس M_n گرافی است با n رأس و $\frac{۳n}{۲}$ یال که از دو چرخه موازی به طول $\frac{n}{۲}$ تشکیل شده است که با یال‌های عرضی پیچیده به هم متصل شده‌اند. بنابراین تعداد راس ها در این گراف زوج است. ۱

تعریف ۲.۲. چندجمله‌ای هوسویا گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(G, x) = \sum_{d=۰}^{diam(G)} N_d x^d$$

که در آن N_d تعداد جفت رئوس با فاصله d و $diam(G)$ قطر گراف است.

لم ۱.۲. قطر گراف نردبان موبیوس M_n برابر است با:

$$diam(M_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{۴} \rfloor & \text{اگر } n = ۴k \\ \lfloor \frac{n+۲}{۴} \rfloor & \text{اگر } n = ۴k+۲ \end{cases}$$

۳ نتایج اصلی

قضیه ۱.۳. چندجمله‌ای هوسویا گراف نردبان موبیوس M_n برای $n > ۴$ به‌صورت زیر است:

$$H(M_n, x) = \begin{cases} ۶k\,x + ۸k \sum_{j=۲}^{k} x^j, & n = ۴k, \\ (۶k+۳)\,x + (۸k+۴) \sum_{j=۲}^{k} x^j + (۴k+۲)\,x^{k+۱}, & n = ۴k+۲. \end{cases}$$

۴ تأیید نتایج

برای تأیید صحت محاسبات، از رابطه $W(G) = H'(G, ۱)$ و فرمول اندیس وینر برای گراف نردبان موبیوس [۴] که در قضیه زیر بیان می شود، استفاده می‌کنیم:

قضیه ۱.۴. اندیس وینر گراف نردبان موبیوس M_n $(n > ۴)$ برابر است با

$$W(M_n) = \begin{cases} \frac{۱}{۲} n \left(\left(\frac{n}{۲} \right) \left(\frac{n+۴}{۴} \right) - ۱ \right), & n = ۴k, \\ \frac{۱}{۲} n \left(\frac{(n+۲)^۲}{۸} - ۱ \right), & n = ۴k+۲. \end{cases}$$

۱.۴ مثال‌های عددی

الف) برای گراف $M_۸$ خواهیم داشت:

$$H(M_۸, x) = ۱۲x + ۱۶x^۲, \quad H'(M_۸, ۱) = ۱۲ + ۳۲ = ۴۴$$

ب)ابرای گراف $M_{۱۰}$ خواهیم داشت:

$$H(M_{۱۰}, x) = ۱۵x + ۲۰x^۲ + ۱۰x^۳, \quad H'(M_{۱۰}, ۱) = ۱۵ + ۴۰ + ۳۰ = ۸۵.$$

با توجه به ۱.۴

$$W(M_۸) = ۴ \cdot ۱۱ = ۴۴, \quad W(M_{۱۰}) = ۵ \cdot ۱۷ = ۸۵.$$

بنابراین درستی مثال های فوق تایید می شود.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، فرمول‌های صریح چندجمله‌ای هوسویا برای گراف‌های نردبان موبیوس در دو حالت $n = ۴k$ و $n = ۴k + ۲$ ارائه گردید. نتایج نشان می‌دهد که ساختار ویژه این گراف‌ها، امکان بیان‌های دقیق و قابل محاسبه برای چندجمله‌ای هوسویا را فراهم می‌کند. همچنین صحت نتایج از طریق رابطه مشتق چندجمله‌ای هوسویا و شاخص وینر تأیید شده است. این مطالعه می‌تواند زمینه‌ساز تحقیقات آتی در حوزه شاخص‌های توپولوژیکی مبتنی بر فاصله و نظریه گراف‌های پیچیده‌تر باشد.

مراجع

[1] Guy, R.K. and Harary, F. (1967), *On the Möbius ladders*, Canadian Mathematical Bulletin, 10(4), 493–496.

[2] Mowshowitz, A. (1972), *The characteristic polynomial of a graph*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 12(2), 177–193.

[3] Schwenk, A.J. (2006), *Computing the characteristic polynomial of a graph*, in: Graphs and Combinatorics: Proceedings of the Capital Conference on Graph Theory and Combinatorics at the George Washington University, June 18–22, 1973, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 153–172.

[4] Shokrollahi Yancheshmeha, S. and Jahandideh Khangheshlaghib, M. (2025), *Distance-based topological indices of Möbius ladder graphs: A mathematical perspective*, Journal of Linear and Topological Algebra, 14(1), 49–59.

[5] Vaidya, S. and Li, A. (2025), *Hosoya Polynomials of Mycielskian Graphs*, arXiv preprint arXiv:2503.03055, 4 Mar.

[6] Wiener, H. (1947), *Structural determination of paraffin boiling points*, Journal of the American Chemical Society, 69(1), 17–20.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

ارزیابی و پیش‌بینی مبتنی بر شبکه‌های عصبی در تحلیل‌های آماری

سیمین منصوری بروجنی [۱] ایوب طاهری [۲]

[۱] گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

[۲] گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده

این مقاله به معرفی کاربرد شبکه‌های عصبی در ارزیابی و پیش‌بینی می‌پردازد. در مقایسه با روش‌ها و تجربیات آماری سنتی، شبکه‌های عصبی دارای ویژگی‌های یادگیری خودکار بر پایه داده‌ها هستند و می‌توانند ویژگی‌های مؤثر را از داده‌های انبوه استخراج کنند و از طریق مدل‌سازی و یادگیری نمایش‌های انتزاعی عمیق، پیش‌بینی‌هایی با دقت بالا و شناسایی الگوهای پیچیده از داده‌ها را انجام دهند. شبکه‌های عصبی به‌طور گسترده‌ای در پیش‌بینی داده‌های صنعت نفت، ارزیابی ریسک مالی، پیش‌بینی شبکه‌های اجتماعی، تشخیص پزشکی و سایر حوزه‌ها استفاده می‌شوند. هدف این مقاله افزایش دقت و کارایی پیش‌بینی و تصمیم‌گیری بر اساس تحقیق درباره روش‌های ارزیابی و پیش‌بینی آماری مبتنی بر شبکه‌های عصبی است. علاوه بر این، این مقاله سیستم شاخص و استانداردهای ساختار ارزیابی و پیش‌بینی را نیز معرفی می‌نماید. سیستم شاخص عمدتاً رابطه بین نگهداری و معیارها و ویژگی‌های اصلی مربوط به آن‌ها را توصیف می‌کند، که شامل شاخص‌ها، ابعاد، واحدهای اندازه‌گیری و معیارهای واحد است. استانداردهای ساختار ارزیابی و پیش‌بینی شامل پیش‌بینی داده‌های تولید و عملیات و پیش‌بینی کیفیت داده‌ها می‌باشد. پلتفرم پیش‌بینی، عملکردهای متنوعی را برای حمایت از پیش‌بینی داده‌ها، مانند مدیریت شاخص‌های پیش‌بینی، مدیریت الگوریتم‌های پیش‌بینی، شبیه‌سازی الگوریتم‌های پیش‌بینی، قوانین موتورالگوریتم پیش‌بینی، هشدار تولید و عملیات، پیش‌بینی کیفیت داده، انتشار اطلاعات پیش‌بینی و مدیریت مسائل پیش‌بینی ارائه می‌دهد. تحقیق و کاربرد این مقاله اهمیت زیادی در ترویج داده‌کاوی، شناسایی تصویر، پردازش زبان طبیعی و سایر حوزه‌ها دارد.

کلمات کلیدی: شبکه‌های عصبی، طراحیMEA-BP، طراحی تابع زیان، تحلیل آماری.

۱ مقدمه

با توسعه داده‌های بزرگ و هوش مصنوعی، شبکه‌های عصبی توانمندی‌های خود را در زمینه‌هایی مانند داده‌کاوی، شناسایی تصویر و پردازش زبان طبیعی به نمایش گذاشته است. در زمینه‌های میان رشته‌ای مختلف، کاربرد شبکه‌های عصبی به‌طور فزاینده‌ای گسترش می‌یابد.ارزیابی و پیش‌بینی در سیستم‌های آماری جامع، که از وظایف مهم مرتبط با دقت و عملی بودن ارزیابی و تصمیم‌گیری هستند، روش‌ها و تجربیات آماری سنتی به دلیل ابعاد بزرگ و پیچیده و ویژگی‌های متنوع داده‌های درگیر، اغلب ناکارآمد

[1] s_mansouri@pnu.ac.ir
[2] ay.taheri@pnu.ac.ir

هستند [۱]. با این حال، شبکه‌های عصبی دارای ویژگی‌های یادگیری خودکار مبتنی بر داده هستند و می‌توانند ویژگی‌های مؤثر را از داده‌های بزرگ استخراج کرده و از طریق مدل‌سازی و یادگیری اهداف انتزاعی عمیق، پیش‌بینی‌هایی با دقت بالا و شناسایی الگوهای پیچیده را به‌دست آورند. به‌عنوان مثال، ژائو یو و همکاران از شبکه‌های عصبی کانولوشن و شبکه‌های عصبی بازگشتی برای پردازش داده‌های صنعت نفت استفاده کردند و به پیش‌بینی و ارزیابی شاخص‌هایی مانند ذخایر نفت، کارایی تولید و خروجی دست یافتند [۲]، [۳] و [۴]. قابلیت محاسبات موازی مدل‌های شبکه عصبی مبتنی بر شبکه حافظه کوتاه و بلند و یادگیری عمیق همچنین کارایی و دقت پیش‌بینی‌های آن‌ها را تضمین می‌کند [۵] و [۶].

بنابراین، هدف این مقاله استفاده از شبکه‌های عصبی برای حل مشکلات گلخانه‌ای موجود در روش‌های ارزیابی و پیش‌بینی و بهبود دقت و کارایی پیش‌بینی و تصمیم‌گیری است. این تحقیق شامل کاربردهای وسیع‌تری است، نه تنها در ارزیابی و پیش‌بینی سیستم‌های کسب‌وکار، بلکه در سناریوهای کاربردی خاص در جنبه‌های مختلف، مانند ارزیابی ریسک مالی، پیش‌بینی در شبکه‌های اجتماعی و تشخیص پزشکی می‌باشد. توسعه و بهینه‌سازی مداوم شبکه‌های عصبی هم چنین فضای گسترده‌تر و چشم‌اندازهای کاربردی بیشتری برای تحقیقات در این حوزه فراهم می‌آورد.

۲ سیستم شاخص‌سازی روش ارزیابی و پیش‌بینی

۱.۲ سیستم شاخص‌سازی

در سطح سیستم شاخص، توصیف اصلی، رابطه بین نگهداری و شاخص‌ها و همچنین ویژگی‌های اصلی آن‌ها است [۷]. ابعاد به، ابعاد ایستا، ابعاد پویا و ابعاد گسترش یافته تقسیم شده و به ستون‌های اصلی و مهمان و فرمول‌های محاسباتی گزارش مرتبط هستند. اعضای موجود در یک بُعد را می‌توان از طریق مدیریت فیلدها نگهداری کرد و هر عضو بعد، متناظر با شرایط نگهداری متفاوتی است. یک شاخص، مفهومی است که مشخصه‌های کمّی کلی را توصیف می‌کند. یک شاخص عموماً از یک نام شاخص و مقدار شاخص تشکیل شده است و بازتاب‌دهنده‌ی ویژگی‌های قطعیت موضوع و قطعیت کمیت است. عملگر فرمول محاسبه شاخص، نشانگر و ثابت است. بین شاخص‌ها یک رابطه تعمیم‌یافته وجود دارد، مانند تولید بنزین، بازده بنزین، بازده نفت و بازده محصول. از نظر فنی، شکل رابطه یک سه‌تایی شاخص، بُعد و عضو است. واحد اندازه‌گیری را می‌توان بر روی شاخص تعریف کرد که در قسمت‌بندی گزارش منعکس می‌شود و قانون کپی و استراتژی ذخیره‌سازی داده‌های شاخص (پشتیبانی از مجازی‌سازی) را می‌توان بر روی شاخص اعمال کرد. هر شاخص، متناظر با یک واحد اندازه‌گیری پیش‌فرض است. عبارت شاخص، رابطه بین شاخص و عضو بُعد را برقرار می‌کند و از طریق یک فرمول محاسباتی مشترک، رابطه‌ای با گزارش ایجاد می‌کند. بُعد، یک تقسیم‌بندی کامل از شاخص‌ها است و روش تقسیم‌بندی برای ابعاد مختلف، متفاوت است. بعد شامل یک یا چند عضو سطح بُعد

می‌باشد. چندین بُعد می‌توانند به‌طور همزمان شاخص‌ها را تقسیم کنند. ابعاد متعامد به این معنی است که ترتیب ابعاد در یک تقسیم‌بندی واحد، بی‌اهمیت است. ماهیت ابعاد، تقسیم شاخص‌ها است و طبیعتاً عملکرد تجمیع و محاسبه‌ی خلاصه داده‌های شاخص تقسیم‌شده را دارند. فرمول محاسباتی بُعد، یک فرمول کلی است که برای یک بُعد خاص تعریف شده است و شاخص به‌عنوان یک پارامتر در زمان اجرا به آن ارسال می‌شود. ابعاد غیرمتعامد نیاز به تعریف رابطه وابستگی بین خود دارند. وابستگی رابطه یک‌طرفه است و چهار شکل آن به‌صورت بُعد، عضو، بُعد وابسته و عضو بُعد وابسته می‌باشد. واحد اندازه‌گیری، یک تعریف توافق‌شده و مقدار مشخصی است که برای نمایش اندازه یک نوع کمیت در مقایسه با آن اتخاذ می‌شود. واحد اندازه‌گیری می‌تواند بر روی شاخص یا بر روی عضو بُعد تعریف شود. در پُر کردن و پرس‌وجو، حداقل یکی از شاخص‌ها یا اعضای بُعد متناظر با هر آیتم شاخصِ واحد (سلول گزارش)، دارای یک واحد اندازه‌گیری تعریف‌شده است. هنگامی که هم شاخص‌ها و هم اعضای بُعد، یک واحد اندازه‌گیری را تعریف می‌کنند، تعریف شاخص ارجحیت دارد.معیار واحد، حاصل کسر یک معیار و صفر یا چند بُعد است که معیار را تقسیم می‌کنند. شکل معیار واحد به‌صورت معیار، بُعد صفر تا n است. در سطح ارائه گزارش، ترتیب مجموعه بُعد و معیار را می‌توان برای انطباق با فرم‌های مختلف گزارش تنظیم کرد. ابعاد را می‌توان روی هم قرار داد تا تقسیم کامل موارد معیار خاص تکمیل شود. تقسیم موازی دو یا چند بُعد بر روی یک مورد معیار خاص، برش گزارش نامیده می‌شود. در اصل، این یک تقسیم چندگانه از موارد معیار است.

۲.۲ استانداردهای ساختار ارزیابی و پیش‌بینی

قابلیت پیش‌بینی داده‌ها جایگاه مهمی در سیستم‌های مدرن جامع مدیریت اطلاعات آماری دارد. این قابلیت می‌تواند شاخص‌های پیش‌بینی را بر اساس پیش‌بینی تولید و عملیات و پیش‌بینی کیفیت داده‌ها ایجاد کند و با تکیه بر عملکرد موتور تحلیل، الگوریتم‌ها را پردازش کرده و قواعد پیش‌بینی را برای هدایت انتشار اطلاعات و پردازش مسائل پیش‌بینی برقرار سازد. قابلیت پیش‌بینی داده‌ها شامل پیش‌بینی داده‌های تولید و عملیات، و دیگری پیش‌بینی کیفیت داده‌ها می‌باشد. پیش‌بینی کیفیت داده‌ها می‌تواند ارزش و کیفیت داده‌های آماری را بهبود بخشد، در حالی که پیش‌بینی داده‌های تولید و عملیات یک موتور پردازش داده را با سیستم شاخص‌های پیش‌بینی تولید و عملیات به‌عنوان هسته خود ایجاد می‌کند و با استفاده از روش‌های نوین نظیر آموزش مدل و یادگیری ماشین، داده‌های غیرطبیعی در سیستم را نظارت کرده و در اولین فرصت آنها را پردازش و تفسیر می‌کندکه این امر به تحقق پیش‌بینی نظارت بر شاخص‌های تولید و عملیات و پیش‌بینی نظارت بر کیفیت داده‌های سیستم منجر می‌شود.

پلتفرم پیش‌بینی امکانات بیشتری را ارائه می‌دهد تا به کاربران کمک کند تا بهتر داده‌ها را پیش‌بینی کنند. به‌عنوان مثال، کاربران می‌توانند قوانین پیش‌بینی را سفارشی‌سازی کنند تا با نیازهای خاص پیش‌بینی خود مطابقت داشته باشد. همچنین یک عملکرد شبیه‌سازی برای الگوریتم‌های پیش‌بینی

ارائه می‌دهیم تا به کاربران کمک کنیم نتایج پیش‌بینی داده را بهتر درک کنند. علاوه بر این، ما هشدارهای تولید و عملیات و پیش‌بینی کیفیت داده را ارائه می‌دهیم تا به کاربران کمک کنیم کیفیت تولید و داده‌های آماری را بهتر نظارت کنند. عملکرد مدیریت مسائل پیش‌بینی نیز می‌تواند به کاربران در مدیریت بهتر مشکلات و شاخص‌های مواجهه‌شده در هنگام اجرای پیش‌بینی داده کمک کند. کاربران می‌توانند در هر زمان پیشرفت اجرای پیش‌بینی را پیگیری و کنترل کنند تا به‌موقع مشکلات را حل کنند. به‌طور خلاصه، پلتفرم پیش‌بینی ما عملکردهای متنوعی را ارائه می‌دهد تا به کاربران کمک کند که داده‌ها را بهتر پیش‌بینی کنند. ما به نیازهای شخصی‌سازی شده کاربران توجه می‌کنیم و قوانین پیش‌بینی سفارشی و روش‌های مختلفی برای نمایش نتایج ارائه می‌دهیم. ما بر این باوریم که پلتفرم پیش‌بینی ما تجربهٔ بهتری از پیش‌بینی داده را برای کاربران فراهم خواهد کرد.

۳ طراحی معماری سیستم مبتنی بر شبکه عصبی

در حین تعیین سیستم آماری یکپارچه با A2، A5، A7، A8، B3، B4، ERP و IPM، قصد داریم سیستم آماری ساخته شده توسط شرکت‌های منطقه‌ای را نیز ادغام کنیم. تحت معماری میکروسرویس، می‌توانیم توسعه افقی بر حسب نیاز و ارتقاء عمودی قابلیت پردازش، را به‌دست آوریم و فرایندهایی مانند «استخراج داده، پاکسازی داده، متریک‌سازی داده و محاسبه داده» را تکمیل کنیم. بنابراین، به منظور بهبود دقت طبقه‌بندی و پیش‌بینی سیستم آماری جامع، ما معماری شبکه عصبی را طراحی خواهیم کرد و طرح مشخص به‌صورت زیر است:

۱.۳ پیش‌پردازش داده

قبل از آموزش شبکه عصبی، داده‌ها نیاز به پیش‌پردازش دارند. هدف پیش‌پردازش داده‌ها، پاکسازی آن‌هاست تا برای الگوریتم‌های یادگیری ماشین مناسب‌تر شوند و به بهبود دقت مدل کمک کنند. در این راستا از تکنیک‌هایی مانند نرمال‌سازی و استانداردسازی برای حذف نویز و نقاط دور افتاده در داده‌ها استفاده خواهیم کرد. در عین حال، داده‌ها را به مجموعه‌های آموزشی، اعتبارسنجی و آزمایشی تقسیم خواهیم کرد. هدف از این کار، ارزیابی عملکرد مدل و شناسایی مشکلاتی نظیر تناسب بیش از حد و کمبود تناسب است.

۲.۳ معماری شبکه عصبی

از شبکه‌های عصبی کانولوشنی (CNN) برای پردازش داده‌های تصویری در سیستم آماری جامع استفاده خواهیم کرد، زیرا CNN عملکرد بسیار خوبی در تشخیص تصویر دارد [۸]. از لایه‌های

کانولوشن و جمع‌آوری چندگانه برای استخراج ویژگی‌ها از تصویر استفاده خواهیم کرد. برای مسائل دسته‌بندی، در آخرین لایه از یک لایه کاملاً متصل برای نگاشت ویژگی‌ها به‌دسته‌ها استفاده خواهیم کرد. برای داده‌های سری زمانی، از شبکه‌های عصبی بازگشتی (RNN) استفاده خواهیم کرد [۹]. RNN دارای عملکرد حافظه است و می‌تواند اطلاعات زمانی را در سری‌های زمانی بهتر درک کند. از حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت (LSTM) برای جلوگیری از مشکلات ناپدید شدن یا انفجار گرادیان و بهبود دقت پیش‌بینی استفاده خواهیم کرد.

۳.۳ آموزش و بهینه‌سازی مدل

برای آموزش مدل از الگوریتم پس‌انتشار خطا استفاده خواهیم کرد و به منظور جلوگیری از بیش برازش، از اعتبارسنجی پردازش متقاطع بهره خواهیم برد. در عین حال، از تکنیک‌های منظم‌سازی (مانند منظم‌سازی 1L و 2L) نیز برای کاهش بیش برازش استفاده خواهیم کرد. همچنین، از الگوریتم گرادیان کاهشی برای بهینه‌سازی مدل به منظور کمینه‌سازی تابع زیان بهره خواهیم گرفت.انتخاب روش بهینه‌سازی مناسب بسیار مهم است زیرا روش‌های مختلف بهینه‌سازی تأثیرات متفاوتی بر عملکرد مدل خواهند داشت. هدف الگوریتم بهینه‌سازی یافتن مقادیر پارامتری است که بتواند تابع زیان را کمینه کرده و در نتیجه پیش‌بینی‌های مدل را دقیق‌تر سازد. برای ارزیابی نتایج از مجموعه آزمون‌های ارزیابی دقت پیش‌بینی مدل استفاده خواهیم کرد. معیارهای ارزیابی رایج شامل دقت، راست‌آزمایی، بازیابی، امتیاز F1 (معیار متعادلی از عملکرد یک مدل است که میانگین هارمونیک دقت و بازخوانی است) و غیره است. با توجه به نتایج ارزیابی، مدل را بیشتر بهینه‌سازی خواهیم کرد و دقت پیش‌بینی را افزایش خواهیم داد. هدف از ارزیابی مدل، شناسایی عملکرد آن، تعیین نقاط ضعف و بهینه‌سازی آن است.

۴ فناوری‌های کلیدی

۱.۴ طراحی مدل MEA-BP

این مقاله یک مدل BP را که توسط الگوریتم تکاملی ذهنی (MEA) بهینه‌سازی شده است، معرفی می‌کند. این مدل به نام شبکه عصبی MEA-BP شناخته می‌شود و می‌تواند برای ارزیابی داده‌ها و پیش‌بینی در زمینه آمار جامع صنعت نفت استفاده شود. با توسعه اقتصادی جهانی، صنعت نفت به‌طور مداوم در حال گسترش است. آمار جامع نفت جزء مهمی از صنعت نفت به شمار می‌آید. این می‌تواند اطلاعات و پیش‌بینی‌هایی از بازار نفت برای دولت‌ها، شرکت‌ها و سرمایه‌گذاران ارائه دهد و مبنایی برای تصمیم‌گیری فراهم کند. با این حال، به دلیل پیچیدگی و عدم قطعیت بازار نفت، وظایف مرتبط با آمار

جامع نفت با چالش‌های زیادی مواجه هستند. در این شرایط، مدل MEA-BP بهینه‌سازی‌شده توسط الگوریتم تکاملی ذهنی می‌تواند یک روش بسیار مؤثر و عملی برای آمار جامع نفت باشد. اولاً، کیفیت و قابلیت دسترسی به داده‌ها می‌تواند با معرفی تکنیک‌های پیش‌پردازش داده و روش‌های استخراج ویژگی بهبود یابد. به‌عنوان مثال، می‌توان از روش‌های وزن‌دهی تطبیقی برای وزن‌دهی به نمونه‌های مختلف استفاده کرد تا دقت و استحکام مدل افزایش یابد. علاوه بر این، روش‌های یادگیری عمیق می‌توانند برای استخراج ویژگی‌های بیشتر و بهینه‌سازی عملکرد مدل به کار روند. ثانیاً، ساختار و الگوریتم مدل می‌تواند بهبود یابد تا سرعت آموزش و پیش‌بینی افزایش یابد. به‌عنوان مثال، می‌توان از الگوریتم‌های بهینه‌سازی کارآمدتر و تکنیک‌های محاسبات موازی برای افزایش کارایی محاسباتی مدل استفاده کرد. علاوه بر این، می‌توان ساختارهای دیگر شبکه‌های عصبی و روش‌های ترکیب مدل را برای بهبود دقت پیش‌بینی و ثبات مدل بررسی کرد. نهایتاً، دامنه کاربرد مدل می‌تواند با ترکیب فناوری‌ها و روش‌های دیگر حوزه‌ها گسترش یابد. مراحل اجرای شبکه عصبی MEA-BP به شرح زیر است:

۱. مرتب‌سازی تمام موجودیت های اولیه تولید شده به‌طور تصادفی در فضای جواب بر اساس امتیاز آن‌ها.

۲. تولید موجودیت جدید در اطراف موجودی با بالاترین امتیاز و تشکیل یک گروه

۳. محاسبه امتیاز موجودیت های که در اطراف موجودیت های برنده هر زیرگروه قرار دارند و انجام عملیات همگرایی تا زمانی که نمره دیگر افزایش نیابد، که نشان‌دهنده همگرایی زیرگروه است. موجودیت با بالاترین امتیاز نمایانگر امتیاز گروهی است.

۴. انجام جایگزینی تمایز پس از همگرایی زیرگروه برای دستیابی به بالاترین امتیاز جهانی

۵. تکرار مراحل فوق تا زمانی که شرایط توقف برآورده شود.

۶. تعیین مقدار آستانه وزن بهینه شبکه عصبی به‌عنوان ارزش رمزگشایی شده از بهترین موجودیت.

۷. شبکه عصبی BP را آموزش دهید.

۲.۴ طراحی مدل تابع زیان

در شبکه‌های عصبی، تابع زیان نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند. این تابع برای اندازه‌گیری اندازه خطا بین مقادیر پیش‌بینی شده مدل و مقادیر واقعی استفاده می‌شود و کلید بهینه‌سازی شبکه‌های عصبی است [۱۰]. تابع زیان معمولاً یک تابع چندمتغیره است که متغیرهای مستقل آن شامل تمام وزن‌ها (w) و اریبی‌ها (b) در شبکه است. برخی جاها آن را تابع هزینه یا تابع ارزش نیز نامیده‌اند. در صنعت

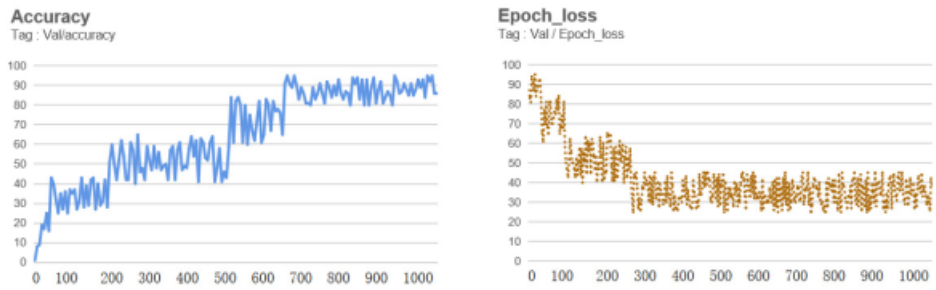
نفت، کاربرد توابع زیان در تحلیل‌های آماری و بهینه‌سازی تولید بسیار گسترده است. در اکتشاف زلزله، می‌توان از تابع زیان برای ارزیابی دقت مدل‌های پیش‌بینی استفاده کرد.در اکتشاف زلزله با محاسبات شبکه‌های عصبی، هدف ما کمینه‌سازی مقدار تابع زیان است تا خطا بین مقادیر پیش‌بینی شده و مقادیر واقعی را کاهش دهیم. دقت مدل پیش‌بینی برای تعیین موقعیت و مقیاس ذخایر نفتی بسیار حائز اهمیت است. از آنجا که داده‌های اکتشاف زلزله بسیار بزرگ هستند، استفاده از تابع زیان برای ارزیابی و بهینه‌سازی مدل‌های پیش‌بینی به شدت مهم شده است. در این مطالعه، شبکه عصبی را بر اساس تابع زیان بهینه‌سازی و تنظیم کردیم و روش محاسبه آن به‌صورت زیر است:

$$\text{Loss Function} = \sum_{j=۱}^{n} \frac{\|\vec{y}_{j\text{predict}} - \vec{y}_{j\text{label}}\|^{۲}}{۲n}$$

مقدار کوچکتر تابع زیان به معنای این است که مقدار پیش‌بینی شده شبکه عصبی به مقدار هدف نزدیک‌تر است. به‌عنوان مثال، در یک مسئله طبقه‌بندی، مقدار برچسب یک بردار کدگذاری شده به‌صورت وان‌هات است که تنها یک عنصر آن ۱ و سایر عناصر ۰ هستند. این عضو نشان‌دهنده این است که نمونه به کدام دسته تعلق دارد. مقدار پیش‌بینی شده یک بردار توزیع احتمال است که هر عضو نمایانگر احتمال تعلق نمونه به یک دسته خاص است. تابع زیان MSE می‌تواند تفاوت بین مقدار پیش‌بینی شده و مقدار هدف را اندازه‌گیری کرده و به بهینه‌سازی پارامترهای شبکه عصبی و بهبود دقت مدل کمک کند. علاوه بر اکتشاف زلزله و بهینه‌سازی تولید، تابع زیان در جنبه‌های دیگر صنعت نفت نیز نقش مهمی ایفا می‌کند.به‌عنوان مثال، در صنعت پتروشیمی، تابع زیان می‌تواند برای ارزیابی کارایی و کیفیت فرایند تولید مورد استفاده قرار گیرد. برخی از عوامل در فرایند تولید مانند دما، فشار، غلظت واکنش‌دهنده و دیگر موارد می‌توانند بر کارایی تولید و کیفیت محصول تأثیر بگذارند. با استفاده از تابع زیان برای ارزیابی کارایی و کیفیت فرایند تولید، می‌توان فرایند تولید را بهینه کرد و کیفیت و بازده محصول را بهبود بخشید.

۵ آزمایش داده و ارزیابی

برای ارزیابی شبیه‌سازی داده‌ها، از معماری شبکه عصبی طراحی شده برای پیش‌بینی و ارزیابی داده‌های ایستا و سری‌های زمانی استفاده شده است. از نظر پیش‌پردازش داده، از تکنیک‌هایی مانند استانداردسازی و نرمال‌سازی برای حذف نویز و مقادیر تصادفی استفاده شده و داده‌ها را به مجموعه‌های آموزشی، اعتبارسنجی و آزمایش تقسیم کردیم. برای معماری شبکه عصبی، از ساختارهای مختلف برای انواع مختلف داده استفاده شده است. برای داده‌های ایستا، از لایه‌های کانولوشن چندگانه و ادغامی برای استخراج ویژگی‌ها، و در نهایت از لایه‌های کاملاً همبند برای پیش‌بینی استفاده کردیم. برای داده‌های سری زمانی، از LSTM استفاده کردیم و از تکنیک‌های اعتبارسنجی متقابل و منظم‌سازی



شکل ۱: تجزیه و تحلیل دقت و کاهش تابع زیان

برای جلوگیری از مشکلات بیش برازش بهره بردیم. در زمینه آموزش و بهینه‌سازی مدل، از الگوریتم پس‌انتشار برای آموزش مدل استفاده کردیم و تکنیک‌های اعتبارسنجی متقابل و منظم‌سازی را برای جلوگیری از بیش‌برازش به کار گرفتیم. الگوریتم گرادیان کاهشی را برای بهینه‌سازی مدل به منظور حداقل کردن تابع زیان انتخاب کردیم. در زمینه ارزیابی نتایج، از مجموعه آزمون برای ارزیابی دقت پیش‌بینی مدل استفاده کردیم و معیارهای ارزیابی معمولاً شامل دقت، صحت، بازیابی، امتیاز F1 و غیره است. برای پیش‌بینی داده‌های سری زمانی، از معماری شبکه عصبی طراحی شده برای پیش‌بینی تولید نفت استفاده کردیم.

همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، از ۱۰۰۰ نمونه آزمایشی برای ارزیابی مدل خود استفاده کردیم. نرخ دقت نهایی به‌طور متوسط بالای ٪۸۵ بود، در حالی که تابع زیان دوره (Epoch) به‌طور متوسط به حدود ٪۳۳ کاهش یافت. ما داده‌ها را به مجموعه‌های آموزشی، اعتبارسنجی و آزمایشی تقسیم کردیم، به‌طوری‌که مجموعه آموزشی ٪۷۰ از کل داده‌ها، مجموعه اعتبارسنجی ٪۱۵ و مجموعه آزمایشی ٪۱۵ را تشکیل می‌داد. به‌منظور جلوگیری از بیش‌برازش در فرایند آموزش مدل، از تکنیک‌های اعتبارسنجی متقابل و منظم‌سازی استفاده کردیم.

پس از آموزش و بهینه‌سازی، نتایج دقت پیش‌بینی بالایی به‌دست آوردیم. ارزیابی مجموعه آزمون نشان داد که دقت پیش‌بینی مدل ٪۹۰ است. به‌طور کلی، ساختار شبکه عصبی طراحی‌شده، به‌طور موفقیت‌آمیز داده‌های ایستا و سری زمانی را پیش‌بینی و ارزیابی کرد. این نتایج قابلیت‌های معماری را نشان می‌دهد و مرجع و الهام‌بخش برای تحلیل‌های آماری در صنعت نفت و همچنین ایده‌ها و روش‌های جدید برای پژوهش در زمینه پیش‌بینی و ارزیابی داده‌ها در سایر حوزه‌ها فراهم می‌آورد.

۶ نتیجه‌گیری

این مطالعه بر روی حوزه تحلیل آماری نفت متمرکز است و از شبکه‌های عصبی برای پردازش داده‌های نفتی و پیش‌بینی و ارزیابی شاخص‌هایی مانند ذخایر نفتی، کارایی استخراج و تولید استفاده می‌کند. از لحاظ پیش‌پردازش داده‌ها، ما از تکنیک‌هایی مانند استانداردسازی و نرمال‌سازی برای حذف نویز

و نقاط تصادفی در داده‌ها استفاده کردیم و همچنین داده‌ها را به مجموعه‌های آموزشی، اعتبارسنجی و آزمون تقسیم بندی کردیم. از نظر معماری شبکه عصبی، برای انواع مختلف داده‌های نفتی، ساختارهای شبکه متفاوتی را به کار بردیم. برای داده‌های ایستا مانند ذخایر نفتی، ما از لایه‌های کانولوشن و لایه‌های ادغامی چندگانه برای استخراج ویژگی‌ها استفاده کردیم و در نهایت از مدل MEA-BP برای پیش‌بینی بهره بردیم. ما الگوریتم تابع زیان را در روش گرادیان کاهشی انتخاب کردیم تا مدل را بهینه‌سازی کرده و تابع زیان را به حداقل برسانیم و صحت داده‌های به‌دست‌آمده را تضمین کنیم. در زمینه ارزیابی نتایج، از مجموعه آزمون برای ارزیابی دقت پیش‌بینی مدل استفاده کردیم و معیارهای ارزیابی متداول شامل دقت، صحت، بازیابی، امتیاز F1 و غیره است. از طریق نتایج تجربی، دریافتیم که روش پیشنهادی می‌تواند به‌طور مؤثر با دقت بالا واستواری، داده‌های آماری نفتی را پیش‌بینی و ارزیابی کند. روش این مطالعه می‌تواند مراجع و رهیافت‌هایی برای حوزه تحلیل آماری نفت ارائه دهد و هم چنین ایده‌ها و روش‌های جدیدی برای تحقیق در زمینه پیش‌بینی و ارزیابی داده‌ها در سایر حوزه‌ها فراهم آورد.

مراجع

[1] Gąsiorowski, M. (2021), Application of Artificial Neural Networks in-Analysis of Time-Variable Optical Reflectance Spectra in Digital Light Projection Spectroscopy[J], *Coatings*, 12(1): 37-37.

[2] Yu, Z., Yu, Z. and Tao, W. (2018), Petroleum reserve prediction based onneural network, *Petroleum Exploration and Development*, 45(1): 1-7.

[3] Bin, Ch., Jiao, Z. and Wen,H. (2019), Research on petroleum production-prediction based on deep learning, *Oil & Gas Storage and Transportation*, 38(9): 1038-1044.

[4] Feng, W., Mingxing, W. and Zhengwei, W. (2017), Petroleum reservepre-diction model based on convolutional neural network, *Petroleum Exploration and Development*, 44(3): 443-448.

[5] Fan, Y., Yan, Z. and Yunfei, Z. (2018), Research on petroleum productionprediction based on long short-term memory network, *Petroleum Exploration and Development*, 45(6): 1062-1069.

[6] Yi, H., Jie, S. and Jun, H. (2019), Research on petroleum production predictionmodel based on deep learning, *Oil & Gas Storage and Transportation*, 38(8): 931-937.

[7] Tao, P., Hong, W. and Mouyuan, W. (2019), Construction and applicationof evaluation index system for world-class petroleum enterprises, *International Petroleum Economics*, 27(07): 1-9.

[8] Feiyan, Z., Linpeng, J. and Jun, D. (2017), Review of Convolutional NeuralNetwork [J], *Chinese Journal of Computers*, 40(06): 1229-1251.

[9] Zhongyuan, H., Yu, X. and Jiajie, Ch. (2023),A Review of Research onEvolutionary Recurrent Neural Networks [J], *Computer Science*, 50(03): 254-265.

[10] Ruobing, L., Bo, L. and Yuehong, S. (2023), Research Progress on Terrain Analysis with Deep Learning Empirical Loss Functions [J/OL], *Systems Engineering Theory and Practice*, 1-14.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

دوگان بهینه $g-$قاب از طریق شبه-وارون و بهینه‌سازی وزنی

سمیه صادقی دیزج [۱] اصغر رحیمی [۲] اسماعیل علیزاده [۳]

[۱,۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه
[۳] استادیار گروه ریاضی، واحد مرند، دانشکده آزاد اسلامی، مرند، ایران

چکیده

در این مقاله، روشی جدید برای یافتن قاب دوگان بهینه با استفاده از شبه-وارون و بهینه‌سازی وزنی ارائه می‌شود. این روش موجب بهبود بازسازی سیگنال و کاهش خطای تقریب می‌شود. پس از معرفی تعاریف اساسی و قضایا، الگوریتمی برای محاسبه قاب دوگان بهینه پیشنهاد شده و کارایی آن با استفاده از مثال‌های عددی بررسی می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهند که روش پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به روش‌های کلاسیک دارد.

کلمات کلیدی: $g-$قاب، دوگان قاب، شبه-وارون، بهینه‌سازی وزنی، بازسازی سیگنال، فضاهای هیلبرت

۱ مقدمه

در پردازش سیگنال و تحلیل هارمونیک، $g-$قاب‌ها ابزار مهمی برای نمایش بازسازی داده‌ها در فضاهای هیلبرت هستند. قاب دوگان نقش کلیدی در بازسازی سیگنال ضرایب قاب دارد و یافتن یک قاب دوگان بهینه اهمیت زیادی در کاهش خطای بازسازی دارد [۱].

در این مقاله یک روش مبتنی بر شبه-وارون و بهینه‌سازی وزنی برای محاسبه قاب دوگان بهینه ارائه می‌شود. این روش به ویژه در مواردی که داده‌ها دارای نویز یا شرایط نامتعادل هستند، عملکرد بهتری دارد.

ابتدا تعاریف و قضایای اساسی مرتبط بررسی شده، سپس الگوریتم پیشنهادی معرفی و در نهایت، نتایج عددی تحلیل می‌شوند.

[1]somayyeh.sadeghi60@gmail.com
[2]author2@email.com
[3]author1@email.com

۱.۱ $g-$قاب و بازسازی سیگنال

یک $g-$قاب در فضای هیلبرت H مجموعه‌ای از عملگرهای خطی $\Lambda_i : H \to H_i$ است که برای هر $f \in H$، نامساوی قاب را برقرار کند [۱]:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|\Lambda_i f\|^2 \leq B\|f\|^2$$

که در آن $A, B > 0$ به ترتیب کران‌های پایین و بالای قاب هستند.
در این حالت، می‌توان f را با استفاده از قاب دوگان Γ_i بازسازی کرد:

$$f = \sum_{i\in I} \Gamma_i^* \Lambda_i f.$$

اگز عملگر ترکیبی قاب را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$S = \sum_{i\in I} \Lambda_i^* \Lambda_i$$

آنگاه قاب دوتایی استاندارد به صورت زیر به دست می‌آید [۳]:

$$\Gamma_i = S^{-1}\Lambda_i.$$

۲ نیاز به شبه‌ـوارون و بهینه‌سازی وزنی

در بسیاری از مسائل عملی، عملگر قاب S ممکن است دارای مقادیر ویژه کوچک باشد که منجر به ناپایداری در محاسبه S^{-1} می‌شود. برای غلبه بر این مشکل، از شبه‌ـوارون $S^\dagger$ استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$S^\dagger = \arg\min_X \|SX - I\|_F$$

(به این معنا که $S^\dagger$ همان ماتریسی است که بهترین تقریب ممکن از وارون S را ارائه می‌دهد. با این شرط که نرم فروبنیوس $|SX - I|_F$ حداقل می‌شود.
نرم فروبینوس $|.|_F$:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{i,j}|^2}$$

که مجموع مربعات تمامی درایه‌های ماتریس است. در اینجا، کمینه‌سازی باعث می‌شود که SX تا حد ممکن نزدیک به I شود و بنابراین X بهترین شبه‌ـوارون ممکن برای S خواهد بود).

علاوه بر این می‌توان با اعمال یک وزن مناسب W بر روی قاب دوگان بهینه، خطای بازسازی را کاهش داد. در این مقاله، قاب دوگان بهینه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_i^{opt} = WS^{\dagger}\Lambda_i.$$

این روش موجب تعادل بهترین کران‌های قاب و کاهش نویز در بازسازی سیگنال می‌شود.
در ادامه، تعاریف و الگوریتم پیشنهادی برای محاسبه قاب دوگان بهینه بررسی می‌شود.

۳ تعریف

۱.۳ قاب $g-$ $(\mathrm{G-Frame})$

یک مجموعه از عملگرهای خطی $\Lambda_i : H \to H_i$ یک $g-$قاب برای فضای هیلبرت H است اگر برای هر $f \in H$ داشته باشیم [۱]:

$$\Lambda\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I}\|\Lambda_i f\|^2 \leq B\|f\|^2.$$

۲.۳ قاب دوگان $(\mathrm{G-Frame})$

یک مجموعه $\Gamma_i : H \to H_i$ قاب دوگان قاب Λ_i است اگر برای هر $f \in H$ داشته باشیم [۳]:

$$f = \sum_{i\in I}\Gamma_i^*\Lambda_i f.$$

۳.۳ شبه‌ـوارون $(\mathrm{Pseudoinverse})$

برای یک عملگر خطی $S : H \to H$، شبه‌ـوارون آن $S^{\dagger}$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$S^{\dagger} = \arg\min_X \|SX - I\|_F$$

که در آن $|.|_F$ نشان دهنده نرم فروبنیوس است.

۴.۳ قاب دوگانه بهینه مبتنی بر شبه‌ـوارون

اگر $S = \sum_{i\in I}\Lambda_i^*\Lambda_i$، آنگاه قاب دوگان بهینه را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\Gamma_i^{opt} = WS^{\dagger}\Lambda_i$$

که در آن W یک ماتریس وزن مناسب برای کاهش اثر نویز و بهینه‌سازی کران‌های قاب است.

قضیه ۱.۳. (وجود قاب دوگان بهینه مبتنی بر شبه‌ـوارون و وزن‌دهی): اگر Λ_i یک $g-$قاب برای H باشد، آنگاه قاب دوگان بهینه Γ_i^{opt} که خطای بازسازی را کمینه می‌کند، با استفاده از شبه‌ـوارون $S^\dagger$ و یک ماتریس وزن مناسب W به دست می‌آید [۲].

اثبات. از آنجا که S یک عملگر مثبت و خودالحاق است، شبه‌ـوارون آن وجود دارد. بنابراین انتخاب $\Gamma_i^{opt} = WS^\dagger\Lambda_i$ و انتخاب مناسب W موجب حداقل‌سازی خطی بازسازی و بهبود عملکرد قاب می‌شود. □

۴ الگوریتم پیشنهادی

مراحل الگوریتم:

۱. محاسبه عملگر ترکیبی $S = \sum_{i\in I} \Lambda_i^*\Lambda_i$
۲. محاسبه شبه‌ـوارون $S^\dagger$
۳. تعیین ماتریس وزن W براساس توزیع مقادیر ویژه S
۴. محاسبه قاب دوگان بهنیه $\Gamma_i^{opt} = WS^\dagger\Lambda_i$
۵. بررسی کران‌های قاب برای ارزیابی بهینگی.

لم ۱.۴. (شرط لازم برای بهینگی قاب دوگان): برای این که Γ_i بهینه باشد، باید رابطه $\Gamma_i = S^\dagger\Lambda_i$ برقرار باشد.

گزاره ۵. اگر Λ_i یک $g-$قاب با کران‌های A و B باشد، آنگاه قاب دوگان بهینه Γ_i^{opt} دارای کران‌های $\frac{۱}{A}$ و $\frac{۱}{B}$ خواهد بود.

لم ۲.۴. (ویژگی‌های شبه‌ـوارون): اگر $S : H \to H$ یک عملگر محدود و خودالحاق در فضای هیلبرت باشد، آنگاه شبه‌ـوارون $S^\dagger$ دارای خواص زیر است [۴]:

۱. $S^\dagger SS^\dagger = S^\dagger$
۲. $SS^\dagger S = S$
۳. $(S^\dagger)^* = (S^*)^\dagger$
۴. اگر S معین مثبت باشد، آنگاه $S^\dagger = S^{-۱}$.

گزاره ۶. (وجود قاب دوگان بهینه): اگر $\Lambda_i : H \to H_i$ یک قاب عمومی $(g-$قاب$)$ در فضای هیلبرت باشد، آنگاه قاب دوگان بهینه Γ_i^{opt} که خطای بازسازی را کمینه می‌کند، به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$\Gamma_i^{opt} = WS^\dagger\Lambda_i$$

که در آن W یک ماتریس وزن مناسب برای بهینه‌سازی کران‌های قاب است.

لم ۳.۴. (خواص عملگر قاب در حضور وزن): فرض کنید $\Lambda = \Lambda_{ii\in I}$ یک $g-$قاب برای فضای هیلبرت H با عملگر قاب S باشد و $W : H \to H$ یک عملگر کراندار، مثبت و معکوس‌پذیر باشد. در این صورت عملگر قاب جدید S_W متناظر با قاب وزنی $W\Lambda_{ii\in I}$ برابر است با:

$$S_W = WSW^*.$$

مثال ۱.۴. فضای هیلبرت $H = \mathbb{R}^۲$ را در نظر بگیرید که در آن $\Lambda_۱$ و $\Lambda_۲$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Lambda_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, \qquad \Lambda_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}.$$

محاسبه عملگر ترکیبی S:

$$\Lambda_۱^T\Lambda_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_۲^T\Lambda_۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$S = \Lambda_۱^T\Lambda_۱ + \Lambda_۲^T\Lambda_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}.$$

محاسبه کران‌های قاب A و B:
چون $S = \sum_{i\in I} \Lambda_i^T\Lambda_i$ است و ماتریس S متقارن مثبت است، کران‌های قاب برابر با مقادیر ویژه آن هستند:

$$S \text{ مقادیر ویژه} = \{۲, ۵\} \Rightarrow A = ۲,\ B = ۵$$

پس نسبت کران‌ها به صورت

$$\frac{B}{A} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

بردار وزن (برای بهینه‌سازی وزنی):
فرض کنید وزن‌ها را برای اهمیت بیشتر به $\Lambda_۱$ نسبت به $\Lambda_۲$ به صورت زیر تعریف کرده‌ایم:

$$w = [w_۱, w_۲] = [۰/۷, ۰/۳]$$

بردار هدف:
فرض کنید سیگنال برای بازسازی بردار $f = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ است پس

$$\Lambda_۱ f = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}, \qquad \Lambda_۲ f = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

محاسبه شبه‌ـوارون $S^\dagger$:
از آنجا که S قطری است، پس

$$S = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad S^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

محاسبه قاب دوگان بهینه:

$$\Gamma_۱^{opt} = S^\dagger \Lambda_۱ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۲}{۵} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_۲^{opt} = S^\dagger \Lambda_۲ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۵} & ۰ \end{bmatrix}.$$

در نتیجه

روش	خطای بازسازی تقریبی	$\frac{B}{A}$
روش کلاسیک	۰/۰۴۵	۳/۵
روش پیشنهادی	۰/۰۱۲	۲/۵

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش جدید برای محاسبه قاب دوگان بهینه مبتنی بر شبه‌ـوارون و بهینه‌سازی وزنی ارائه شد. نتایج عددی نشان داد که این روش منجر به کاهش خطای بازسازی و بهبود تعادل کران‌های قاب می‌شود. در تحقیقات آتی، می‌توان از این روش در شبکه‌های عصبی و پردازش تصویر استفاده کرد. توجه داشته باشید روش پیشنهادی، برای فضاهای بی‌نهایت بعدی نیز قابل تعمیم است. همچنین، در کاربردهای عملی، استفاده از روش تقریبی برای محاسبه شبه‌ـوارون پیشنهاد می‌شود.

مراجع

[1] O. Christensen, An Introduction to Frames and Riesz Bases, Birkhäuser, Basel, 2016.

[2] A. Rahimi and A. Mohammadi, "Optimal Dual G-Frames for Signal Reconstruction," Journal of Applied Mathematics, vol. 45, no. 3, pp. 215–230, 2020.

[3] W. Sun, "G-Frames and G-Riesz Bases," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 322, no. 1, pp. 437–452, 2006.

[4] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, Generalized Inverses: Theory and Applications, 2nd ed., Springer, New York, 2003.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

آزمون جایگشتی ضریب همبستگی اسپیرمن استوار

منصوری بروجنی، سیمین [۱] گل‌زاده گروی، احسان [۲]

[۱,۲] گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، نشان می‌دهیم که آزمون ضریب همبستگی اسپیرمن در مورد فرض عدم همبستگی که در اکثر بسته‌های نرم‌افزاری آماری یافت می‌شود، از نظر تئوری نادرست است و زمانی که مفروضات نرمال بودن دو متغیره برآورده نمی‌شوند یا حجم نمونه کوچک است، عملکرد ضعیفی دارد. مقالات قبلی مربوط به این آزمون‌ها، این فرض غیرقابل اثبات را مطرح می‌کنند که نرمال بودن دو متغیره تقریبی داده‌های اصلی، استفاده از تقریب‌های کلاسیک را توجیه می‌کند. به طور کلی، این تصور غلط رایج وجود دارد که آزمون‌های مربوط به عدم همبستگی در برابر انحراف از نرمال بودن دو متغیره مقاوم هستند. در واقع، تحت شرایط خاص، نقض فرض نرمال بودن دو متغیره، اثرات شدیدی بر کنترل خطای نوع اول برای رایج‌ترین آزمون‌های مورد استفاده دارد. برای رفع این مشکل، یک آزمون جایگشتی استوار برای آزمون عدم همبستگی توسعه داده شده است. آزمون پیشنهادی بر پایه یک آماره استیودنت شده است. نشان خواهیم داد که این آزمون از نظر تئوری در حالت کلی زمانی که دو متغیر ناهمبسته اما وابسته هستند، از نظر مجانبی معتبر است. این ویژگی مطلوب در طیف وسیعی از فرضیات توزیعی و اندازه‌های نمونه در مطالعات شبیه‌سازی نشان داده شد.

کلمات کلیدی: همبستگی رتبه‌ای، استیودنت شده، نمونه کوچک، غیرنرمال بودن

۱ مقدمه

مقدمه مفهوم همبستگی و رگرسیون در ابتدا توسط گالتون هنگام مطالعه اینکه چگونه ویژگی‌های یک نسل از موجودات زنده در نسل بعدی آشکار می‌شود، معرفی شد [۱]. ایده‌هایی که باعث توسعه یک رویکرد دقیق‌تر ریاضی برای همبستگی شد، توسط کارل پیرسون در سال ۱۸۹۶ ارائه شد، که منجر به معرفی ضریب همبستگی گشتاور حاصل‌ضربی پیرسون شد [۲] که به صورت زیر داده شده است:

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{\sqrt{E(X-\mu_X)^2E(Y-\mu_Y)^2}} \qquad (۱)$$

که در آن X و Y دو متغیر تصادفی از توزیع توأم غیر تباهیده F_{XY}، $Cov(X,Y)$ نشان دهنده کوواریانس و μ_X و μ_Y، σ_X و σ_Y به ترتیب میانگین‌های و انحراف معیارهای جامعه هستند. اگر

[1] s_mansouri@pnu.ac.ir
[2] e_golzade_g@pnu.ac.ir

$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$، نشان دهنده n مشاهده جفت شده i.i.d باشد، آنگاه ضریب همبستگی پیرسون نمونه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i, \bar{X}), (Y_i, \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i, \bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i, \bar{Y})^2}} \qquad (2)$$

اندکی پس از انتشار کار پیرسون، اسپیرمن ضریب همبستگی رتبه‌ای را در سال ۱۹۰۴ با این مزیت که در برابر مقادیر پرت و نابرابری توزیع بین دو متغیر استوار است را معرفی کرد [۳]. اما باید توجه داشت که پیرسون، در بیوگرافی گالتون، می‌گوید که "گالتون قبل از اینکه او همبستگی متغیرها را معرفی کند، یعنی حدود سال ۱۸۷۵، با همبستگی رتبه‌ها سر و کار داشت"، اما گالتون ظاهراً چیزی به طور صریح منتشر نکرد [۴]. از نظر ریاضی، ضریب همبستگی اسپیرمن همانند ضریب همبستگی پیرسون برای رتبه‌های $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ تعریف می‌شود و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\rho_s(X,Y) = \rho(a,b) \qquad (3)$$

جایی که $a_i = \mathrm{Rank}(X_i)$ و $b_i = \mathrm{Rank}(Y_i)$ به‌ترتیب رتبه‌های X_i و Y_i برای $i = 1, 2, \ldots, n$ هستند. به طورکلی، هنگام بحث در مورد ضریب همبستگی اسپیرمن، توجه کمی به معیار جامعه می‌شود. با این حال، اگر در نظر بگیریم که $\frac{a_i}{n}$ به $F(X_i)$ همگرا می‌شود، آنگاه می‌توان معیار جامعه مرتبط با ضریب همبستگی نمونه اسپیرمن را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}\rho_s(X,Y) &= \frac{E\{F_X(X) - E[F_X(X)]\}\{F_Y(Y) - E[F_Y(Y)]\}}{\sqrt{E\{F_X(X) - E[F_X(X)]\}^2 E\{F_Y(Y) - E[F_Y(Y)]\}^2}} \\ &= \frac{E\{F_X(X) - \frac{1}{2}\}\{F_Y(Y) - \frac{1}{2}\}}{\sqrt{E\{F_X(X) - \frac{1}{2}\}^2 E\{F_Y(Y) - \frac{1}{2}\}^2}}\end{aligned} \qquad (4)$$

که در آن F_X و F_Y به‌ترتیب توابع توزیع تجمعی (CDF) حاشیه‌ای برای X و Y هستند. تخمین نمونه‌ای ρ_s را می‌توان با جایگزینی مشاهدات اصلی با رتبه‌های آنها در معادله (۲) به دست آورد:

$$\begin{aligned}r_s(X,Y) = r(a,b) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i - \bar{b})^2}} \\ &= 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}{n(n^2 - 1)}\end{aligned} \qquad (5)$$

برای نمونه‌هایی از یک جامعه نرمال دو متغیره، یک رابطه شناخته شده بین ضرایب همبستگی اسپیرمن و پیرسون نیز وجود دارد [۵] که عبارت است از:

$$E(r_s) = \frac{6}{\pi(n+1)}\{\sin^{-1}\rho + (n-2)\sin^{-1}\frac{1}{2}\rho\} \qquad (6)$$

در حالی که ρ پیرسون رابطه خطی بین دو متغیر تصادفی و ρ_s اسپیرمن یک رابطه یکنوایی بین X و Y را اندازه‌گیری می‌کند، بنابراین ممکن است به عنوان یک معیار کلی‌تر از ارتباط در نظر گرفته شود، اگر چه ارتباط خطی بین $F(X)$ و $F(Y)$ را اندازه‌گیری می‌کند. ضریب همبستگی اسپیرمن به دلیل رتبهای بودن، نسبت به مقادیر پرت حساسیت کمتری دارد. به همین دلیل، این معیار به طور گسترده به عنوان سنجش وابستگی بین دو اندازه‌گیری استفاده می‌شود. اغلب، بررسی اینکه آیا دو متغیر تصادفی با هم همبستگی دارند یا خیر، مورد توجه است، یعنی $H_0 : \rho_s = 0$، برای این منظور، روش‌های رایج شامل آزمونی بر پایه توزیع t است که به اشتباه بر مبنای نرمال بودن دو متغیره تقریبی رتبه‌ها بنا شده است، آزمونی بر پایه تبدیل Z فیشر، که باز فرض نرمال بودن دو متغیره تقریبی رتبه‌ها را دارد؛ و آن چه که آزمون جایگشتی ساده نامیده می‌شود. آزمون مبتنی بر توزیع t معمولاً زمانی استفاده می‌شود که حجم نمونه بزرگ باشد، و آماره t به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$$

تحت مفروضات نرمال بودن دو متغیره، این آماره تحت فرض صفر تقریباً از توزیع t استیودنت با $n-2$ درجه آزادی پیروی می‌کند. برای آزمون مبتنی بر تبدیل Z فیشر، آماره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z = \frac{1}{2} \arctan(r_s) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r_s}{1-r_s}$$

تحت مفروضات نرمال بودن دو متغیره، آماره Z تبدیل شده تحت فرض صفر تقریباً از توزیع نرمال $N(0, \frac{1.06}{n-3})$ پیروی می‌کند. برای نمونه‌هایی با حجم کوچک، آزمون‌های جایگشتی ساده نیز اغلب استفاده می‌شوند، جایی که X و Y به طور تصادفی جداگانه درهم ریخته می‌شوند تا توزیع نمونه r_s تحت H_0 شبیه‌سازی شود، که یک آزمون دقیق برای آزمایش استقلال بین X و Y تحت مفروضات تبادل‌پذیری صفر است، اما ممکن است یک آزمون نامعتبر برای آزمون $H_0 : \rho_s = 0$ باشد، با توجه به اینکه $G(F(X), F(Y)) = G(F(X))G(F(Y))$، فرض $\rho_s = 0$ را نتیجه نمی‌دهد، جایی که $G(\cdot, \cdot)$ نشان دهنده تابع توزیع تجمعی توأم $F(X)$ و $F(Y)$ است.

این آزمون‌ها به قدری پرکاربرد هستند که اغلب گزینه‌های پیش‌فرض در بسته‌های نرم‌افزاری آماری رایج مانند R [۶] و SAS [۷] هستند. با این حال، بحث کمی وجود دارد که این آزمون‌ها متکی بر این فرض نامعقول است که توزیع نمونه‌ای رتبه‌ها دارای توزیع نرمال دو متغیره است، که در واقع یک امر غیرممکن است. حتی در میان کسانی که به این فرض اشاره کرده‌اند، این تصور غلط وجود دارد که آزمون‌های فوق در برابر چنین انحرافاتی مقاوم هستند، زیرا ρ_s اسپیرمن رتبه محور است. این موضوع در بحثی توسط فلر و همکاران بررسی شده است [۸].

برعکس، با شروع از هر توزیع دو متغیره $\phi(X, Y)$، همیشه می‌توانیم تبدیلات یکنوای $X = f(x)$ و $Y = g(y)$ را به متغیرهای نرمال استاندارد x و y بیابیم. توزیع دو متغیره حاصل $\varphi(X, Y)$ لزوماً

نرمال دو متغیره نخواهد بود، اما فکر می‌کنیم احتمالاً در موقعیت‌های عملی تفاوت زیادی با این شکل نخواهد داشت. با این حال، همان طور که در بخش ۴ نشان خواهیم داد، تمام آزمون‌هایی که معمولاً در مورد $\rho_s = 0$ استفاده شده، همان طور که در بالا بحث شد، از جمله آزمون جایگشتی ساده، حتی زمانی که مفروضات عدم تبادل پذیری تحت H، نقض می‌شوند، از نظر مجانبی معتبر نیستند. در برخی موارد، با افزایش حجم نمونه، خطای نوع اول می‌تواند به شدت از سطح مورد نظر دور شود. یک ویژگی نامطلوب که در عصر "داده‌های بزرگ" بیشتر قابل توجه است. یک نوع دیگر از این رویکرد ضریب فیشر-یتس است، که X و Y اصلی را به چندک‌های نرمال مربوطه آنها قبل از آزمون تبدیل می‌کند [۹]. اگرچه توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرهای تبدیل شده به شکل شبه نرمال می‌رسند، ولی نرمال بودن توزیع توام این مقادیر تبدیل شده تضمین نمی‌شود.

از نظر آزمون جایگشتی اصلاح شده، توجه به نتیجه کلاسیک نمونه بزرگ در سرلینگ مهم است که در آن تقریب نرمال نمونه بزرگ آزاد توزیع برای توزیع نمونه‌گیری ضریب همبستگی نمونه پیرسون r با استفاده از روش دلتای چند متغیره به دست آمده است [۴]. این روش تضمین می‌کند که خطای نوع اول وقتی $n \to \infty$ به α همگرا می‌شود. یک روش سر راست برای به دست آوردن یک نتیجه مشابه برای همبستگی اسپیرمن با جایگزینی نمونه i.i.d با رتبه‌های مربوطه ارائه شده است. این آزمون از نظر مجانبی معتبر است زیرا رتبه‌ها به طور مجانبی مستقل هستند. حتی اگر تقریب‌های نمونه بزرگ در مورد این تخمین‌زن‌ها از نظر مجانبی معتبر باشند، آنها در نمونه کوچک مستعد خطاهای نوع اول متورم هستند، (به‌عنوان مثال، $n < 50$).

برای رفع این مشکل، یک آزمون جایگشتی استیودنت شده برای همبستگی اسپیرمن ρ_s پیشنهاد می‌کنیم که کار دیسیسیو و رومانو را برای ضریب همبستگی پیرسون ρ گسترش می‌دهد [۱۰]. نشان خواهیم داد که آزمون پیشنهادی تحت مفروضات کلی از نظر مجانبی معتبر است و تحت مفروضات تبادل پذیری و زمانی که $G(F(X), F(Y)) = G(F(X))G(F(Y))$، یعنی به طور ساده‌تر زمانی که X و Y مستقل هستند، دقیق است. نشان می‌دهیم که آزمون پیشنهادی دارای کنترل‌های خطای نوع اول حتی وقتی که توزیع نمونه وابسته (عدم تبادل‌پذیری) و غیر نرمال باشد، استوار است. مهم‌تر از آن، خطای نوع اول به خوبی وقتی که حجم نمونه کوچک است، کنترل می‌شود. این با مجموعه‌ای از مطالعات شبیه سازی نشان داده خواهد شد.

۲ روش‌ها

۱.۲ اطلاعات پس زمینه

در این بخش، با بررسی آزمون جایگشتی استوار برای ضریب همبستگی پیرسون که توسط دیسیسیو و رومانو [۱۰] پیشنهاد شده است، شروع می‌کنیم. برای این منظور، G_n را مجموعه تمام جایگشت‌های

πـتایی از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ تعریف می‌کنیم. برای آزمون استقلال دو متغیر تصادفی X و Y، توزیع جایگشتی هر آماره آزمون داده شده $T_n(X^n, Y^n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{R}_n^{T_n}(t) = \frac{۱}{n!} \sum_{\pi \in G_n} I\{T_n(X^n, Y^n) \leq t\} \qquad (۷)$$

که در آن Y_π^n متناظر $\{Y_{\pi(۱)}, Y_{\pi(۲)}, \ldots, Y_{\pi(n)}\}$ می‌باشد. در این حالت، G_n جایگشت تمام ترکیبات جفتی ممکن بین X^n و Y^n است. یک آزمون جایگشتی یک طرفه در سطح α رد می‌شود اگر $T_n(X^n, Y^n)$ بزرگ‌تر از مقدار $۱ - \alpha$ توزیع جایگشتی باشد. آزمون جایگشتی زمانی دقیق است که فرضیات تبادل پذیری برقرار باشد، یعنی توزیع (X^n, Y^n) تحت تبدیل‌های G_n ثابت باشد. آزمون با استفاده از ضریب همبستگی پیرسون ρ هنگامی دقیق است که به عنوان معیاری از وابستگی برای آزمون فرض صفر یعنی استقلال به صورت زیر استفاده شود:

$$H_۰ : P = P_X \times P_Y$$

که در آن P_X و P_Y به ترتیب توزیع‌های حاشیه‌ای X و Y هستند. فرض صفر استقلال معادل آزمون در مورد همبستگی صفر یعنی $H_۰ : \rho = ۰$ نیست، مگر با مفروضات محدود کننده مانند اینکه داده‌ها به صورت متغیرهای تصادفی نرمال دو متغیره توزیع شده باشند. به عبارت دیگر، در شرایط کلی، دو متغیر تصادفی می‌توانند وابسته اما غیر همبسته باشند. در چنین مواردی، دیسیسیو و رومانو [۱۰] نشان داده‌اند که با گشتاورهای چهارم متناهی، توزیع جایگشتی $\hat{\rho}$ به $N(۰, ۱)$ همگرا می‌شود، اما توزیع نمونه‌گیری آن به $N(۰, \tau^۲)$ همگرا می‌شود، که در آن:

$$\tau^۲ = \frac{\mu_{۲۲}}{\mu_{۲۰}\mu_{۰۲}}$$

و

$$\mu_{pq} = E[(X_۱ - \mu_۱)^p (Y_۱ - \mu_۲)^q]$$

بنابراین، آزمون سطح α نخواهد بود مگر اینکه $\tau = ۱$. با توجه به این نتیجه، دیسیسیو و رومانو یک آماره آزمون همبستگی استیودنت شده پیشنهاد کردند که وقتی دو متغیر تصادفی وابسته اما ناهمبسته هستند، خطای نوع اول به طور مجانبی در سطح α کنترل می‌شود [۱۰]. به‌طور خاص، آماره استیودنت شده به‌صورت $S_n = \sqrt{n}\frac{\hat{\rho}_n}{\hat{\tau}_n}$ تعریف می‌شود، که در آن:

$$\hat{\tau}_n^۲ = \frac{\hat{\mu}_{۲۲}}{\hat{\mu}_{۲۰}\hat{\mu}_{۰۲}}$$

$$\hat{\mu}_{pq} = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} (X_i - \bar{X})^p (Y_i - \bar{Y})^q$$

توزیع جایگشتی و توزیع نمونه‌گیری S_n هر دو به طور مجانبی به توزیع نرمال استاندارد همگرا می‌شوند. لازم به ذکر است که حتی اگر نتایج ارائه شده در دیسیسیو و رومانو [۱۰] بر اساس تقریب‌های نمونه بزرگ باشد، رفتار این آزمون برای حجم‌های نمونه کوچک تا متوسط با استفاده از نتایج شبیه‌سازی، خوب است.

۲.۲ آزمون جایگشتی همبستگی اسپیرمن

ضریب اسپیرمن $\rho_s(X,Y)$، ضریب همبستگی پیرسون رتبه‌های X و Y است، یعنی $\rho(a,b)$. هنگامی که در داده‌ها گره وجود دارد، رتبه‌های آنها به‌طور معمول به عنوان میانگین در نظر گرفته می‌شوند. بر خلاف ضریب همبستگی پیرسون ρ که رابطه خطی بین دو متغیر تصادفی را اندازه‌گیری می‌کند، ضریب همبستگی اسپیرمن ρ_s یک رابطه یکنوارا اندازه‌گیری می‌کند، بنابراین بسیار کمتر محدود کننده است. توجه داشته باشید که ضریب همبستگی اسپیرمن نیز معیار خطی بین $F(X)$ و $F(Y)$ است. هم چنین نسبت به غیرنرمال یا مقادیر پرت حساسیت کمتری دارد.

با وجود مزایای فوق، این تصور غلط وجود دارد که آزمون‌های $\rho_s = ۰$ بر اساس مفروضات نرمال بودن دو متغیره در داده‌های اصلی در برابر انحراف از این فرض مقاوم هستند. در واقع، هنگامی که داده‌های اصلی مستقل هستند، رتبه‌های آنها وابسته خواهند بود. بنابراین، آزمون‌های ρ_s معمولاً با مشکل مشابهی روبه‌رو می‌شوند. هم چنین تأکید می‌شود که منظور از "نرمال بودن" نرمال بودن توزیع توام در مقابل نرمال بودن توزیع حاشیه‌ای اشاره دارد، زیرا دو متغیر تصادفی که به طور حاشیه‌ای دارای توزیع نرمال هستند، می‌توانند دارای توزیع توام غیرنرمال باشند. بنابراین، ضریب فیشر-یتس رتبه متغیرها را از طریق تابع چندک نرمال به مقدار اصلی برمی‌گرداند. در بخش ۴، به صورت تجربی نشان خواهیم داد که نقض فرض نرمال بودن توزیع توأم، تأثیر شدیدی بر کنترل خطای نوع اول خواهد داشت. به علاوه، در واقع غیرممکن است که توزیع توأم رتبه‌ها، نرمال دو متغیره باشد.

رویکرد ما جایگزینی (X,Y) با رتبه‌های (a_i,b_i) می‌باشد، تا یک آزمون جایگشتی همبستگی اسپیرمن، مشابه آزمون جایگشتی همبستگی پیرسون، با تفاوت‌های جزئی ایجاد کنیم. آزمون جایگشتی استیودنت شده ρ پیرسون فقط به گشتاورهای چهارم متناهی و مشاهدات i.i.d نیاز دارد. اگرچه رتبه‌های (a_i,b_i) دیگر مشاهدات i.i.d نیستند، می‌توان نشان داد که آنها به طور مجانبی این شرط را برآورده می‌کنند.

هنگامی که (X,Y) مشاهدات i.i.d هستند، $(F_X(X_i),F_Y(Y_i))$ نیز i.i.d خواهند بود. از آنجایی که $a_i = \mathrm{Rank}(X_i) = n\hat{F}_X(X_i)$ و $\hat{F}_X(X_i) \xrightarrow{n\to\infty} F_X(X_i)$، پس $\frac{a_i}{n} \xrightarrow{n\to\infty} F_X(X_i)$. بنابراین، مشاهدات (a_i,b_i) به‌طور مجانبی i.i.d هستند. در نتیجه، شرط تبادل پذیری حداقل به طور مجانبی برقرار و آزمون به طور مجانبی دقیق خواهد بود. به طور شهودی، وقتی n به اندازه کافی بزرگ باشد، دانستن (a_i,b_i) اطلاعاتی کمی در مورد رتبه‌های زوج دیگری مانند (a_j,b_j) ارائه خواهد داد.

هم چنین می‌توان نشان داد که همبستگی بین a_i و $a_j(i \neq j)$ تقریباً $\frac{-۱}{n-۱}$ است. بنابراین، برای یک دنباله نمونه X^n ماتریس همبستگی رتبه‌ها وقتی $n \to \infty$ به I_n همگرا می‌شود.

مراحل انجام آزمون جایگشتی استیودنت شده یک طرفه برای آزمون $H_۰ : \rho_s = ۰$ در مقابل $H_۱ : \rho_s > ۰$ به صورت زیر انجام می‌شود. این آزمون در بسته R perk (آزمون‌های جایگشتی ضرایب همبستگی) پیاده سازی شده است، که در CRAN (شبکه آرشیو جامع R، $https://cran.r-project.org$) و GitHub ($https://github.com/hyu-ub/perk$) موجود خواهد بود.

۱. برای زوج مشاهدات i.i.d، $(X_۱, Y_۱), (X_۲, Y_۲), \ldots, (X_n, Y_n)$ رتبه‌های آنها را در هر متغیر تصادفی محاسبه کنید، $(a_۱, b_۱), (a_۲, b_۲), \ldots, (a_n, b_n)$.

۲. ρ_s اسپیرمن را با استفاده از معادله (۵) برآورد کنید (r_s).

۳. واریانس برآوردهای نمونه‌ای r_s را با استفاده از رابطه زیر برآورد کنید:

$$\hat{\tau}_n^۲ = \frac{\hat{\mu}_{۲۲}}{\hat{\mu}_{۲۰}\hat{\mu}_{۰۲}}$$

$$\hat{\mu}_{pq} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})^p(Y_i - \bar{Y})^q$$

۴. آماره استیودنت شده $R_s = \frac{r_s}{\tau_n}$ را محاسبه کنید.

۵. $(b_۱, b_۲, \ldots, b_n)$ را به طور تصادفی به B بار در هم بریزید. برای هر جایگشت، آماره استیودنت شده جایگشتی R_s^k را محاسبه کنید. $k \in (۱, ۲, \ldots, B)$

۶. pـ مقدار را با استفاده از رابطه زیر محاسبه کنید.

$$p = \frac{۱}{B}\sum_{k=۱}^{B} I(R_s^k > R_s)$$

اگر $p < \alpha$ فرضیه $H_۰$ را رد کنید.

۳ شبیه‌سازی

خطای نوع اول را در آزمون‌های معرفی شده بالا با استفاده از توزیع‌هایی که معمولاً در متون، برای بررسی در طیف وسیعی از حالات استفاده می‌شود [۱۰، ۱۱] بررسی کردیم. برای مطالعه شبیه سازی، آزمون $H_۰ : \rho_s = ۰$ در مقابل $H_۱ : \rho_s > ۰$ را با حجم نمونه‌های $n = ۱۰, ۲۵, ۵۰, ۱۰۰, ۲۰۰$ انجام دادیم. در هر شبیه سازی از ۱۰۰۰۰ تکرار مونت‌کارلو استفاده شده و تعداد جایگشت‌های

استفاده شده ۱۰۰۰ بود. آزمون t، تبدیل Z فیشر، روش فیشر-یتس، تقریب نرمال نمونه بزرگ سرلینگ (نرمال مجانبی)، آزمون جایگشتی ساده (Permute)، و آزمون جایگشتی استیودنت شده (Permute Stu) را مقایسه کردیم و خطای نوع اول با $\alpha = ۰/۰۵$ بررسی شد. برای شبیه سازی توزیع‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. توزیع نرمال چند متغیره (MVN) با میانگین صفر و کوواریانس یکسان.

۲. توزیع نمایی به صورت $(X, Y) = rS^T u$ که در آن $r \approx \exp(۱), S = \text{diag}(\sqrt{۲}, ۱)$ و $\mathbf{u}$ به طور یکنواخت در دایره واحد دو بعدی توزیع شده است.

۳. توزیع دایره‌ای به صورت توزیع یکنواخت روی یک دایره واحد دو بعدی داده شده است.

۴. توزیع $t_{۴/۱}$ که در آن $X = W + Z$ و $Y = W - Z$، و W و Z متغیرهای تصادفی i.i.d از توزیع $t_{۴/۱}$ هستند.

۵. توزیع چند متغیره t (MVT) با ۵ درجه آزادی.

نتایج در جدول ۱ نشان می‌دهد که تقریب نرمال مجانبی نمونه بزرگ در حالتی که $n < ۵۰$ باشد، دارای نرخ‌های خطای نوع اول متورم برای تمام توزیع‌ها است. آزمون t، آزمون Z فیشر، فیشر-یتس، و آزمون‌های جایگشتی ساده برای توزیع‌های نمایی و دایره‌ای بیش از حد محافظه کار هستند. در حالی که برای $t_{۴/۱}$، خطای نوع اول به‌طور مداوم متورم می‌شود. توجه داشته باشید که برای این آزمون‌ها، چنین انحرافی را نمی‌توان با افزایش حجم نمونه اصلاح کرد.

از سوی دیگر، آزمون جایگشتی استیودنت شده به طور قوی خطای نوع اول را برای تمام توزیع‌های بررسی‌شده، حتی زمانی که n به کوچکی ۱۰ باشد، را کنترل می‌کند. این امر مزیت آشکاری از آزمون پیشنهادی بر تمام آزمون‌های متداول استفاده شده برای ضریب همبستگی اسپیرمن را نشان می‌دهد.

۴ بحث

آزمون‌های متعارف همبستگی اسپیرمن بر فرض نرمال بودن متکی هستند، از جمله آزمون t، تبدیل Z فیشر، و آزمون جایگشتی ساده، که در صورت نقض فرض، در کنترل نرخ‌های خطای نوع اول با شکست مواجه می‌شوند. این در مطالعات شبیه سازی (بخش ۴) نشان داده شد. چنین نقصی را نمی‌توان با تبدیل توزیع‌های حاشیه‌ای مانند ضریب فیشر-یتس برطرف کرد. به‌طور خاص، انحراف از نرمال بودن دو متغیره می‌تواند منجر به همگرایی نرخ خطای نوع اول به یک سطح دلخواه زمانی که $n \to \infty$ شود. این نشان‌می‌دهد که، در حالاتی که دو متغیر تصادفی غیر همبسته اما وابسته هستند، خطای نوع اول در سطح مورد نظر کنترل نخواهد شد، و این امر به بزرگی حجم نمونه بستگی ندارد. از سوی دیگر، آزمون سرلینگ بر اساس روش دلتا تضمین می‌کند که نرخ خطای نوع اول تا زمانی که

جدول ۱: نرخ خطای نوع اول برای آزمون $H_0 : \rho_s = 0$ در مقابل $H_1 : \rho_s > 0$

Stu Permute	Permute	Asymp Norm	Fisher-Yates	Fisher's Z	t test	N	توزیع
۰/۰۴۵۷	۰/۰۴۹۵	۰/۱۲۲۳	۰/۰۴۷۹	۰/۰۴۲	۰/۰۴۹۸	۱۰	MVN
۰/۰۴۸۷	۰/۰۴۹۴	۰/۰۸۱۱	۰/۰۴۹۹	۰/۰۴۴۴	۰/۰۵۰۱	۲۰	
۰/۰۵۲۵	۰/۰۵۰۸	۰/۰۶۳۹	۰/۰۵۰۹	۰/۰۴۷۳	۰/۰۵۱۲	۵۰	
۰/۰۵۱۸	۰/۰۵۳	۰/۰۵۹۶	۰/۰۵۲۷	۰/۰۴۸۴	۰/۰۵۲۹	۱۰۰	
۰/۰۴۹۶	۰/۰۴۸۷	۰/۰۵۲۵	۰/۰۴۹۳	۰/۰۴۳۸	۰/۰۴۷۹	۲۰۰	
۰/۰۴۹۸	۰/۰۳۶۸	۰/۱۲۰۵	۰/۰۳۰۳	۰/۰۲۹۵	۰/۰۳۷۵	۱۰	Exponential
۰/۰۴۹۷	۰/۰۳۷۵	۰/۰۷۷۶	۰/۰۲۷	۰/۰۳۲۳	۰/۰۳۶۳	۲۰	
۰/۰۴۹۳	۰/۰۳۷۱	۰/۰۶۲۹	۰/۰۲۷۲	۰/۰۳۲۱	۰/۰۳۶۲	۵۰	
۰/۰۴۹۵	۰/۰۳۷۴	۰/۰۵۴۷	۰/۰۲۵۵	۰/۰۳۲۹	۰/۰۳۷۴	۱۰۰	
۰/۰۴۷۶	۰/۰۳۶۴	۰/۰۵۰۷	۰/۰۲۷۸	۰/۰۳۲۵	۰/۰۳۶۲	۲۰۰	
۰/۰۴۸۹	۰/۰۶۰۶	۰/۱۲۷۵	۰/۰۶۹۳	۰/۰۵۳۱	۰/۰۶۲۵	۱۰	$t_{۴/۱}$
۰/۰۴۸	۰/۰۶۲۹	۰/۰۷۶۸	۰/۰۸۴۶	۰/۰۵۷۴	۰/۰۶۳۱	۲۰	
۰/۰۴۵۷	۰/۰۶۲۸	۰/۰۶۱۴	۰/۰۹۱	۰/۰۵۷۹	۰/۰۶۳۱	۵۰	
۰/۰۴۹۱	۰/۰۶۷۲	۰/۰۵۶۷	۰/۱۰۸۲	۰/۰۶۱۱	۰/۰۶۷۷	۱۰۰	
۰/۰۵۲۱	۰/۰۷۳۱	۰/۰۵۷۲	۰/۱۱۴۹	۰/۰۶۷۵	۰/۰۷۲۸	۲۰۰	
۰/۰۵۱۴	۰/۰۱۲۴	۰/۰۹۰۷	۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۹۵	۰/۰۱۲۴	۱۰	Circular
۰/۰۴۷۴	۰/۰۰۴۸	۰/۰۶۲	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۴	۰/۰۰۵۲	۲۰	
۰/۰۴۸۷	۰/۰۰۳	۰/۰۵۷۵	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۳۱	۵۰	
۰/۰۴۹۷	۰/۰۰۲۴	۰/۰۵۳۷	۰/۰۰۰۱ >	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۲۱	۱۰۰	
۰/۰۴۸۲	۰/۰۰۲	۰/۰۴۸۹	۰/۰۰۰۱ >	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۱۶	۲۰۰	
۰/۰۴۹۷	۰/۰۵۸۴	۰/۱۳۰۵	۰/۰۶۲۶	۰/۰۵۰۲	۰/۰۵۸۲	۱۰	MVT
۰/۰۴۹۶	۰/۰۶۰۲	۰/۰۸۲۵	۰/۰۷۲۶	۰/۰۵۴۳	۰/۰۵۹۶	۲۰	
۰/۰۴۵۶	۰/۰۵۵۳	۰/۰۶۰۸	۰/۰۷	۰/۰۴۸۹	۰/۰۵۴۲	۵۰	
۰/۰۴۹۶	۰/۰۵۷۴	۰/۰۵۶۶	۰/۰۷۴	۰/۰۵۳۵	۰/۰۵۸۴	۱۰۰	
۰/۰۴۹۶	۰/۰۵۹۰	۰/۰۵۲۷	۰/۰۸۵۲	۰/۰۵۳۹	۰/۰۵۹۰	۲۰۰	

گشتاور مرتبه چهارم متناهی باشد به α همگرا می‌شود. با این حال، به‌طور معمول زمانی که حجم نمونه کمتر از ۵۰ باشد، از خطای نوع اول متورم رنج می‌برد.

در این کار، یک آزمون جایگشتی همبستگی اسپیرمن استوار بر اساس آماره استیودنت شده برای آزمون $H_0 : \rho_s = 0$ در مقابل $H_1 : \rho_s > 0$ ارائه شد. رویکرد پیشنهادی از کار دیسیسیو و رومانو [۱۰] الهام گرفته شده است، که برای همبستگی پیرسون توسعه داده شده است.

علاوه بر این، از آماره استیودنت شده نیز می‌توان برای آزمون‌های بوت استرپینگ استفاده کرد تا فرضیه‌های صفر کلی‌تر را مورد آزمون قرار داد [۱۱]. در نتیجه، آزمون جایگشتی استیودنت شده پیشنهادی باید به‌عنوان یک رویه معمول برای آزمون ضریب همبستگی اسپیرمن غیر صفر مورد استفاده قرار گیرد.

مراجع

[1] Jeffrey M Stanton. Galton, Pearson, and the Peas, (2001). A brief history of linear regression for statistics instructors, *Journal of Statistics Education*, **9**(3).

[2] Karl Pearson. Vii. (1896). Mathematical contributions to the theory of evolution.—iii. regression, heredity, and panmixia, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, **187**, 253–318.

[3] Charles Spearman, 1961. The proof and measurement of association between two things.

[4] Kendall, M. and Stuart, A. (1979). The Advanced Theory of Statistics: Volume 2: Inference and Relationship, 4th Edition, Charles Griffin, London.

[5] Moran, P.A.P. (1948). Rank Correlation and Product-Moment Correlation, *Biometrika*, **35**, 203-206.

[6] R Core Team (2013). R: A Language and Environment for Statistical Computing, R Foundation for Statistical Computing, Vienna.

[7] SAS Institute (2015). Base SAS 9.4 Procedures Guide, SAS Institute.

[8] Fieller, E.C., Hartley, H.O. and Pearson, E.S. (1957). Tests for Rank Correlation Coefficients, *Biometrika*, **44**, 470-481.

[9] R. A. Fisher and F. Yates, (1938). Statistical Tables for Biological, Agricultural, and Medical Research, Oliver and Boyd, London.

[10] DiCiccio, Cyrus J., Romano, Joseph P. (2017). Robust Permutation Tests For Correlation And Regression Coefficients, *Journal of the American Statistical Association*, **112** (519), 1211-1220.

[11] Hutson, A. D. (2019). A robust Pearson correlation test for a general point null using a surrogate bootstrap distribution, *PLOS ONE*, **14**(5), e0216287.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

بررسی رابطه ایده‌آل‌ها در جبر کامیان-پسک

مریم کشول رجب‌زاده [۱] سهیلا سیدبویر [۲]

[۱,۲] استادیار گروه ریاضی و آمار، واحد بین المللی اروند، دانشگاه آزاد اسلامی، آبادان، ایران

چکیده

فرض کنیم Λ یک k-گراف سطری- متناهی بدون منبع و K یک میدان است. در این مقاله نشان می‌دهیم اگر مجموعه‌های موروثی و اشباع در Λ° تحت زیرمجموعه بودن تشکیل یک زنجیر دهند هر ایده‌آل نیم اول در جبر کامیان- پسک تولید شده به‌وسیله Λ یک ایده‌آل اول است.

کلمات کلیدی: k-گراف، جبر کامیان- پسک، ایده‌آل اول، ایده‌آل نیم اول، به‌طور قوی غیردوره‌ای، مجموعه موروثی و اشباع

۱ مقدمه

جبرهای کامیان-پسک حالت چند بعدی جبرهای مسیری لیویت برای گراف‌های جهت‌دار هستند. این جبرها، همچنین حالت جبری C^*-جبرهای k-گرافی می‌باشند. این دسته از جبرها برای اولین بار برای گراف‌های با بعد بالاتر بدون منبع توسط کامیان و پسک معرفی شدند [۱]. سپس برای k-گراف‌های سطری-متناهی موضعاً محدب توسیع داده شدند [۱]. جبرهای k-گرافی ساختار جذابی دارند، زیرا ویژگی‌های مهم و پایه‌ای آن‌ها با ویژگی‌های k-گراف تحت بررسی آن ارتباط دارد [۲، ۳] در واقع می‌توان به کمک این جبرها، مثال‌های جبری با ویژگی‌های خاص بسازیم.

یک k-گراف (یا یک گراف از مرتبه $k \geqslant 1$)، یک رسته (کاتگوری) به همراه یک ویژگی نمایش یکتاست، که در حالت خاص $k = 1$، Λ همان گراف جهت‌دار می‌باشد.

در [۴]، رابطه ایده‌آل‌های اول و نیم اول و همچنین مجموعه‌های موروثی و اشباع در جبر مسیری لیویت بررسی شده است. در این مقاله، به بررسی رابطه این ایده‌آل‌ها در جبر کامیان- پسک می‌پردازیم و نشان می‌دهیم اگر Λ یک k-گراف سطری-متناهی موضعاً محدب و به‌طور قوی غیردوره‌ای و K یک میدان باشد، در صورتیکه مجموعه‌های موروثی و اشباع در Λ° تحت زیرمجموعه بودن تشکیل یک

[1] m.kashoul.r@iau.ir
[2] s.seyedboveir@iau.ir

زنجیر دهند هر ایده‌آل نیم اول در جبر کامیان‌ـ پسک تولید شده به‌وسیله Λ یک ایده‌آل اول است.
ایده‌آل I در حلقه R را ایده‌آل نیم اول می‌گوییم هرگاه I به‌صورت اشتراک مجموعه‌ای از ایده‌آل‌های اول در R باشد.
ایده‌آل I در جبر R را ایده‌آل اول می‌گوییم هرگاه برای هر زوج از ایده‌آل‌های $I_۱, I_۲$ در R که $I_۱I_۲ \subseteq I$ نتیجه شود $I_۱ \subseteq I$ یا $I_۲ \subseteq I$.

۲ تعاریف و قضایا

در این بخش، برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی kـگراف‌ها را از [۲] یادآوری می‌کنیم که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.
این مقاله، مجموعه اعداد طبیعی شامل صفر را با N نشان داده و k را عدد صحیح مثبت در نظر می‌گیریم. برای $m, n \in \mathbb{N}^k$ می‌نویسیم $m \leqslant n$ هرگاه برای هر $۱ \leqslant i \leqslant k$ رابطه $m_i \leqslant n_i$ برقرار باشد. همچنین، ماکسیمم مؤلفه‌ای m و n را با $m \vee n$ مشخص کرده و عضو $(0, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}^k$ را با 0 نشان می‌دهیم

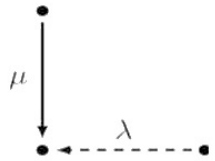
تعریف ۱.۲. یک kـگراف Λ، رسته شمارش‌پذیر $(\Lambda^\circ, \Lambda, r, s)$ به همراه یک تابعگر $d : \Lambda \longrightarrow \mathbb{N}^k$ است که در خاصیت تجزیه یکتا صدق می‌کند. این خاصیت عبارت است از:
برای هر $\lambda \in \Lambda$ و $m, n \in \mathbb{N}^k$ با $d(\lambda) = m + n$، اعضای یکتای $\mu, v \in \Lambda$ وجود دارند که $\lambda = \mu v$، $d(\mu) = m$ و $d(v) = n$.

مثال ۱.۲. گراف جهت‌دار و سطری‌ـمتناهی $E = (E^\circ, E^۱, r, s)$ یک ۱ـگراف است. رسته E را به صورت $(E^\circ, P(E), r, s)$ در نظر گرفته که در آن $P(E)$ مجموعه مسیرهای متناهی E است. (توجه کنید هر رأس E یک مسیر با طول صفر خواهد بود.) همچنین برای هر $\mu \in P(E)$، $S(\mu)$ و $r(\mu)$ به ترتیب ابتدا و انتهای مسیر در نظر گرفته می‌شوند. همچنین ترکیب مسیرهای μ و v با شرط $r(v) = s(\mu)$ به صورت $\mu v = \mu_۱\mu_۲....\mu_{|\mu|}v_۱v_۲...v_{|v|}$ تعریف می‌شود.

با تعریف تابعگر $d : P(E) \longrightarrow \mathbb{N}$ به صورت $d(\mu) = |\mu|$، رسته مسیرهای $P(E)$ تبدیل به یک ۱ـگراف می‌شود.

تعریف ۲.۲. kـگراف Λ را موضعاً محدب گوییم، هرگاه برای هر $\nu \in \Lambda^\circ$، $\lambda \in \nu\Lambda^\circ$ و $\mu \in \nu\Lambda^\circ$ که در آن $i \neq j$ و $۱ \leqslant i, j \leqslant k$، مجموعه‌های $S(\lambda)\Lambda^{e_j}$ و $S(\mu)\Lambda^{e_i}$ غیرتهی باشند.

مثال ۲.۲. ۲ـگراف رسم شده در شکل، موضعاً محدب نمی‌باشد. زیرا مجموعه‌های $S(\mu)\Lambda^{e_۲}$ و $S(\lambda)\Lambda^{e_۱}$ تهی هستند.
برای kـگراف موضعاً محدب Λ و $n \in \mathbb{N}^k$، مجموعه $\Lambda^{\leqslant n}$ را به‌صورت $\{\lambda \in \Lambda : d(\lambda) + e_i \leqslant n \Longrightarrow S(\lambda)\Lambda^{e_i} = \varnothing\}$ تعریف می‌کنیم. kـگراف Λ را سطری‌ـمتناهی می‌گوییم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}^k$ و $\nu \in \Lambda^\circ$، $\nu\Lambda^{\leqslant n}$ مجموعه‌ای متناهی باشد.



۳ جبرهای کامیان-پسک

در این بخش جبر کامیان- پسک و چند مفهوم دیگر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. [۳] فرض کنیم Λ یک k-گراف سطری- متناهی و موضعا محدب و K یک میدان است. فرض کنید $G_\Lambda = \{\lambda^* : \lambda \in \Lambda\}$ یک Λ-خانواده کامیان-پسک در جبر A یک تابع به‌صورت $s : \Lambda \cup G(\Lambda) \longrightarrow A$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\{s_v : \nu \in \Lambda'\}$ یک خانواده از عناصر خودتوان دو به دو عمود بر هم باشند.

۲. برای هر $\lambda, \mu \in \Lambda^*$ که $r(\mu) = s(\lambda)$ داشته باشیم

$$s_{\mu^*} S_{\lambda^*} = S_{(\lambda\mu)^*}, S_\lambda S_\mu = S_{\lambda\mu}$$
$$S_{r(\lambda)} S_\lambda = S_\lambda = S_\lambda S_{s(\lambda)},\ S_{s(\lambda)} S_{\lambda^*} = S_{\lambda^*} = S_{\lambda^*} S_{r(\lambda)}$$

۳. برای هر $\lambda, \mu \in \Lambda^{\leqslant n}$ که $\lambda, \mu \in \Lambda^{\neq 0}$ داشته باشیم $S_{\lambda^*} S_\mu = \delta_{\lambda,\mu} S_{s(\lambda)}$.

۴. برای هر $\nu \in \Lambda^\circ$ و $n \in \mathbb{N}^k \setminus \{0\}$، $s_\nu = \sum_{\lambda \in \nu\Lambda^{\leqslant n}} S_\lambda S_{\lambda^*}$.

جبر کامیان-پسک تولید شده به‌وسیله Λ با ضرایب در میدان K که با $KP_K(\Lambda)$ نمایش داده می‌شود، یک جبر جامع تولید شده به‌وسیله یک Λ- خانواده کامیان-پسک $\{s_\lambda, s_{\lambda^*} : \lambda \in \Lambda\}$ است. ویژگی جامع بودن برای جبر کامیان-پسک $KP_K(\Lambda)$ بدین معنی است که اگر A یک K-جبر و $\{T_\lambda, T_{\lambda^*}, T_\nu : \nu \in \Lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ یک Λ-خانواده کامیان-پسک در جبر A باشد، آنگاه یک K-جبر همریختی $\pi_T : KP_K(\Lambda) \longrightarrow A$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\pi_T(S_v) = T_v,\ \pi_T(S_\lambda) = T_\lambda,\ \pi_T(S_{\lambda^*}) = T_{\lambda^*}.$$

وجود این ویژگی جامع برای $KP_K(\Lambda)$ در [۵] بررسی شده است.
یادآوری می‌کنیم حلقه R را $\mathbb{Z}^k$-مدرج گوییم هرگاه مجموعه‌ای از زیرگروه‌های جمعی $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$ در R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $R_{n_1} R_{n_2} \subseteq R_{n_1+n_2}$، برای هر $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^k$. در این صورت، هر عضو غیرصفر $a \in R$ را می‌توان به‌صورت مجموعی متناهی و یکتا از عناصر غیرصفر $a_n \in R_n$ نوشت. هر زیرگروه R_n را یک جزء همگن R از درجه n می‌گوییم. اگر R حلقه‌ای مدرج باشد، ایده‌آل I در R را مدرج گوییم هرگاه مجموعه $\{I \cap R_n : n \in \mathbb{Z}^k\}$ یک درجه‌بندی برای I باشد.

تعریف ۲.۳. زیرمجموعه H از Λ° موروثی نامیده می‌شود هرگاه $\lambda \in \Lambda$ و $r(\lambda) \in H$ نتیجه دهد $s(\lambda) \in H$. زیرمجموعه H از Λ° را اشباع می‌گوییم هرگاه برای $\nu \in \Lambda^\circ$ و $n \in \mathbb{N}^k$ رابطه $s(\nu\Lambda^{\leqslant n}) \subseteq H$ نتیجه دهد $\nu \in H$. توجه کنید ویژگی‌های موروثی و اشباع تحت اشتراک بسته هستند. مجموعه همه زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع در Λ° را با H_Λ نمایش می‌دهیم.
یادآوری می‌کنیم برای یک زیرمجموعه موروثی و اشباع H در Λ°، ایدآل I_H به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_H := span\{S_\mu S_{\lambda^*} : S(\mu) = S(\lambda) \in H\}$$

بنا بر [۲]، I_H یک ایدآل مدرج در $KP_K(\Lambda)$ است.

تذکر ۱.۳. در این مقاله منظور از ایده‌آل در $KP_K(\Lambda)$، ایده‌آلی دوطرفه است.

تعریف ۳.۳. فرض کنیم Λ یک kـ گراف سطری‌ـ متناهی و موضعاً محدب است. Λ را غیردوره‌ای گوییم هرگاه برای هر $\nu \in \Lambda^\circ$ یک مسیر مرزی $x \in \nu\Lambda^{\leqslant\infty}$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $\mu \neq \nu \in \Lambda$ داشته باشیم $\mu x \neq \nu x$. همچنین kـ گراف Λ را به‌طور قوی غیردوره‌ای است هرگاه برای هر زیرمجموعه موروثی و اشباع H در Λ°، $\Lambda \setminus H$ غیردوره‌ای باشد.

۴ رابطه بین ایده‌آل‌های اول و نیم اول

فرض کنیم Λ یک kـ گراف سطری‌ـ متناهی موضعاً محدب، به‌طور قوی غیردوره‌ای و K یک میدان است. در این بخش نشان می‌دهیم اگر مجموعه‌های موروثی و اشباع در Λ° تحت زیرمجموعه بودن تشکیل یک زنجیر دهند هر ایده‌آل نیم اول در جبر کامیان‌ـ پسک تولید شده به‌وسیله Λ یک ایده‌آل اول است.

قضیه ۱.۴. فرض کنیم Λ یک kـ گراف سطری متناهی موضعاً محدب به‌طور قوی غیردوره‌ای و K یک میدان است. همچنین مجموعه‌های موروثی و اشباع H در Λ°، تحت زیرمجموعه بودن تشکیل زنجیر دهند. در این‌صورت هر ایده‌آل نیم اول در جبر $KP_K(\Lambda)$ یک ایده‌آل اول است.

اثبات. با توجه به اینکه Λ، یک kـ گراف به‌طور قوی غیردوره‌ای است هر ایده‌آل در $KP_K(\Lambda)$، یک ایده‌آل مدرج است و به‌صورت یک I_H می‌باشد که در آن H یک زیرمجموعه موروثی و اشباع H در Λ است. از آنجا که طبق فرض مجموعه‌های موروثی و اشباع H در Λ°، تحت زیرمجموعه بودن تشکیل زنجیر می‌دهند و هر ایده‌آل در $KP_K(\Lambda)$ متناظر با یک H در Λ° است، پس ایده‌آل‌ها در این جبر تشکیل یک زنجیر می‌دهند. حال فرض کنیم I_H یک ایده‌آل نیم اول است. همانطور که می‌دانیم هر ایده‌آل نیم اول به‌صورت اشتراکی از ایده‌آل‌های اول است. همچنین اشتراک اعضای هر زنجیر از ایده‌آل‌های اول نیز ایده‌آلی اول است. پس ایده‌آل اول است. □

۵ نتیجه و جمع‌بندی

فرض کنیم Λ یک kـ گراف سطری‌ـ متناهی موضعا محدب، به‌طور قوی غیردوره‌ای و K یک میدان است. در این مقاله بررسی می‌شود که اگر I_H یک ایده‌آل نیم اول در جبر کامیان‌ـ پسک تولید شده به‌وسیله Λ باشد، در چه صورتی I_H ایده‌آلی اول است. و این مطلب اثبات می‌شود که اگر مجموعه‌های موروثی و اشباع در Λ° تحت زیرمجموعه بودن تشکیل یک زنجیر دهند هر ایده‌آل نیم اول در جبر کامیان‌ـ پسک تولید شده به‌وسیله Λ یک ایده‌آل اول است.

مراجع

[1] A. Kumjian and D. Pask, “Higher rank graph C^*-algebras”, *J. Math*, vol. 6, pp. 1-20, 2000.

[2] G. Aranda Pino, J. Clark, A. an Huef and I. Raeburn, “Kumjian-Pask algebras of higher rank graphs”, *Trans. Amer. Math*, vol. 365, pp. 3613-3641, 2013.

[3] L. O. Clark, C. Flynnand. And A. an Huef, “Kumjian-Pask algebras of locally convex higher-rank graphs”, *J. Algebra*, vol. 399, pp. 445-474, 2014.

[4] G. Abrams, B. Greenfeld, Z. Mesyan and K. M. Rangaswamy, “chains of semi prime and prime ideals in Leavitt Path algebras”, *Contemp. Math.,* vol. 715, pp. 1-16, Amer. Math. Soc., Providence, IR, 2018.

[5] P. Ara, M. A. Moreno and E. Pardo, “Nonstable K- theory for graph algebras”, *Algebr. Represent. Theory,* vol. 10, pp. 157-178, 2007.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

ایده‌آل پوچساز در جبر کامیان-پسک

مریم کشول رجب‌زاده [۱] سهیلا سیدبویر [۲]

[۱,۲] استادیار گروه ریاضی و آمار، واحد بین المللی اروند، دانشگاه آزاد اسلامی، آبادان، ایران

چکیده

فرض کنیم Λ یک k-گراف سطری- متناهی بدون منبع و K یک میدان است. در این مقاله نشان می‌دهیم اگر H یک زیرمجموعه موروثی و اشباع در Λ° باشد، در اینصورت ایده‌آل مدرج $I_{H^{\perp}}$ یک ایده‌آل پوچساز در $KP_k(\Lambda)$ است.

کلمات کلیدی: k-گراف، جبر کامیان- پسک، ایده‌آل پوچساز، ایده‌آل مدرج

۱ مقدمه

C^*-جبرهای مربوط به گراف‌های جهت‌دار، اولین بار در سال ۱۹۹۰ به‌عنوان توسیعی از جبرهای کانتز- کریگر برای برای ماتریس‌های متناهی بررسی شدند [۱]. جبر مسیری لیویت که حالت جبری C^*-جبر گرافی است، در سال ۲۰۰۵ مورد مطالعه قرار گرفت [۲]. این جبرها به دلیل ساختار جالبی که داشتند توسط پژوهشگران بسیاری مطالعه شدند و قضایای زیادی در رابطه با آن‌ها بیان شد. همچنین این جبرها منبع مهمی برای مثال‌های جذاب در زمینه‌های جبری و C^*-جبری هستند. در سال ۲۰۰۰، کامیان و پسک در [۳]، K-گراف‌ها و C^*-جبرهای متناظر با آن‌ها را به‌منظور مدل‌سازی جبر کانتز- کریگر برای مرتبه $k \geqslant ۱$ که توسط رابرتسون و استیگر معرفی شده بود، تعریف کردند. همچنین در سال ۲۰۱۱ جبر کامیان- پسک به عنوان ساختاری مشابه با جبر مسیری لیویت، برای گراف‌های با بعد بالاتر معرفی شد [۳].

یک k-گراف (یا یک گراف از مرتبه $k \geqslant ۱$)، یک رسته (کاتگوری) $\Lambda = (\Lambda^{\circ}, \Lambda, r, s)$ به همراه یک ویژگی نمایش یکتاست، که در حالت خاص، $k = ۱$، Λ همان گراف جهت‌دار می‌باشد. در [۴]، ایده‌آل‌های پوچساز در جبر مسیری لیویت بررسی شده است. در این مقاله، به بررسی ایده‌آل پوچساز در جبر کامیان- پسک می‌پردازیم و نشان می‌دهیم اگر H یک زیرمجموعه موروثی و اشباع

[1] m.kashoul.r@iau.ir
[2] s.seyedboveir@iau.ir

در Λ° باشد، در اینصورت ایده‌آل مدرج $I_{H^\perp}$ یک ایده‌آل پوچساز در $KP_K(\Lambda)$ است.
یادآوری می‌کنیم، اگر I یک ایده‌آل در حلقه R باشد، مجموعه $ann_l(I) = (r \in R : Ir = ۰)$، $ann_r(I) = \{r \in R : rI = ۰\}$ و $ann(I) = ann_l(I) \cap ann_r(I)$ به ترتیب پوچسازهای چپ، راست و دوطرفه I در H است. همچنین ایده‌آل I یک ایده‌آل پوچساز نامیده می‌شود، هرگاه برای یک ایده‌آل J داشته باشیم $I = ann(J)$.

۲ تعاریف و قضایا

در این بخش، برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی kـ گراف‌ها را از [۵] یادآوری می‌کنیم که در بخش‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.
این مقاله، مجموعه اعداد طبیعی شامل صفر را با N نشان داده و k را عدد صحیح مثبت در نظر می‌گیریم. برای $m, n \in \mathbb{N}^k$ می‌نویسیم $m \leqslant n$ هرگاه برای هر $۱ \leqslant i \leqslant k$ رابطه $m_i \leqslant n_i$ برقرار باشد. همچنین، ماکسیمم مؤلفه‌ای m و n را با $m \vee n$ مشخص کرده و عضو $(0, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{N}^k$ را با 0 نشان می‌دهیم

تعریف ۱.۲. یک kـ گراف Λ، رسته شمارش‌پذیر $(\Lambda^\circ, \Lambda, r, s)$ به همراه یک تابعگر $d : \Lambda \longrightarrow \mathbb{N}^k$ است که در خاصیت تجزیه یکتا صدق می‌کند. این خاصیت عبارت است از:
برای هر $\lambda \in \Lambda$ و $m, n \in \mathbb{N}^k$ با $d(\lambda) = m + n$، اعضای یکتای $\mu, v \in \Lambda$ وجود دارند که $\lambda = \mu v$، $d(\mu) = m$ و $d(v) = n$.

مثال ۱.۲. گراف جهت‌دار و سطری‌ـ متناهی $E = (E^\circ, E^۱, r, s)$ یک ۱ ـ گراف است. رسته E را به صورت $(E^\circ, P(E), r, s)$ در نظر گرفته که در آن $P(E)$ مجموعه مسیرهای متناهی E است. (توجه کنید هر رأس E یک مسیر با طول صفر خواهد بود.) همچنین برای هر $\mu \in P(E)$، $S(\mu)$ و $r(\mu)$ به ترتیب ابتدا و انتهای مسیر در نظر گرفته می‌شوند. همچنین ترکیب مسیرهای μ و v با شرط $r(v) = s(\mu)$ به صورت $\mu v = \mu_۱\mu_۲....\mu_{|\mu|}v_۱v_۲...v_{|v|}$ تعریف می‌شود.

با تعریف تابعگر $d : P(E) \longrightarrow \mathbb{N}$ به صورت $d(\mu) = |\mu|$، رسته مسیرهای $P(E)$ تبدیل به یک ۱ ـ گراف می‌شود.

۳ جبرهای کامیان‌ـ پسک

در این بخش جبر کامیان‌ـ پسک و چند مفهوم دیگر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. [۶] فرض کنیم Λ یک kـ گراف سطری‌ـ متناهی و موضعا محدب و K یک میدان است. فرض کنید $G_\Lambda = \{\lambda^* : \lambda \in \Lambda\}$ یک Λـ خانواده کامیان‌ـ پسک در جبر A یک تابع به‌صورت $s : \Lambda \cup G(\Lambda) \longrightarrow A$ است که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\{s_v : \nu \in \Lambda'\}$ یک خانواده از عناصر خودتوان دو به دو عمود بر هم باشند.

۲. برای هر $\lambda, \mu \in \Lambda^*$ که $r(\mu) = s(\lambda)$ داشته باشیم

$$s_{\mu^*} S_{\lambda^*} = S_{(\lambda\mu)^*}, S_\lambda S_\mu = S_{\lambda\mu}$$
$$S_{r(\lambda)} S_\lambda = S_\lambda = S_\lambda S_{s(\lambda)},\ S_{s(\lambda)} S_{\lambda^*} = S_{\lambda^*} = S_{\lambda^*} S_{r(\lambda)}$$

۳. برای هر $\lambda, \mu \in \Lambda^{\neq ۰}$ که $\lambda, \mu \in \Lambda^{\leqslant n}$ داشته باشیم $S_{\lambda^*} S_\mu = \delta_{\lambda,\mu} S_{s(\lambda)}$.

۴. برای هر $\nu \in \Lambda^\circ$ و $n \in \mathbb{N}^k \setminus \{۰\}$، $s_\nu = \sum_{\lambda \in \nu\Lambda^{\leqslant n}} S_\lambda S_{\lambda^*}$.

جبر کامیان‌ـپسک تولید شده به‌وسیله Λ با ضرایب در میدان K که با $KP_K(\Lambda)$ نمایش داده می‌شود، یک جبر جامع تولید شده به‌وسیله یک Λ- خانواده کامیان‌ـپسک $\{s_\lambda, s_{\lambda^*} : \lambda \in \Lambda\}$ است. ویژگی جامع بودن برای جبر کامیان‌ـپسک $KP_K(\Lambda)$ بدین معنی است که اگر A یک Kـجبر و $\{T_\lambda, T_{\lambda^*}, T_\nu : \nu \in \Lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$ یک Λـخانواده کامیان‌ـپسک در جبر A باشد، آن‌گاه یک Kـجبر همریختی $\pi_T : KP_K(\Lambda) \longrightarrow A$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\pi_T(S_v) = T_v,\ \pi_T(S_\lambda) = T_\lambda,\ \pi_T(S_{\lambda^*}) = T_{\lambda^*}.$$

وجود این ویژگی جامع برای $KP_K(\Lambda)$ در [۵] بررسی شده است.
یادآوری می‌کنیم حلقه R را $\mathbb{Z}^k$ـمدرج گوییم هرگاه مجموعه‌ای از زیرگروه‌های جمعی $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}^k}$ در R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $R_{n_۱} R_{n_۲} \subseteq R_{n_۱+n_۲}$، برای هر $n_۱, n_۲ \in \mathbb{Z}^k$. در این صورت، هر عضو غیرصفر $a \in R$ را می‌توان به‌صورت مجموعی متناهی و یکتا از عناصر غیرصفر $a_n \in R_n$ نوشت. هر زیرگروه R_n را یک جزء همگن R از درجه n می‌گوییم. اگر R حلقه‌ای مدرج باشد، ایده‌آل I در R را مدرج گوییم هرگاه مجموعه $\{I \cap R_n : n \in \mathbb{Z}^k\}$ یک درجه‌بندی برای I باشد.

تعریف ۲.۳. زیرمجموعه H از Λ° موروثی نامیده می‌شود هرگاه $\lambda \in \Lambda$ و $r(\lambda) \in H$ نتیجه دهد $s(\lambda) \in H$. زیرمجموعه H از Λ° را اشباع می‌گوییم هرگاه برای $\nu \in \Lambda^\circ$ و $n \in \mathbb{N}^k$ رابطه $s(\nu\Lambda^{\leqslant n}) \subseteq H$ نتیجه دهد $\nu \in H$. توجه کنید ویژگی‌های موروثی و اشباع تحت اشتراک بسته هستند. مجموعه همه زیرمجموعه‌های موروثی و اشباع در Λ° را با H_Λ نمایش می‌دهیم.
یادآوری می‌کنیم برای یک زیرمجموعه موروثی و اشباع H در Λ°، ایدآل I_H به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_H := span\{S_\mu S_{\lambda^*} : S(\mu) = S(\lambda) \in H\}$$

بنا بر [۶]، I_H یک ایدآل مدرج در $KP_K(\Lambda)$ است.

گزاره ۷. در این مقاله منظور از ایده‌آل در $KP_K(\Lambda)$، ایده‌آلی دوطرفه است.

۴ ایده‌آل‌های پوچساز در جبر کامیان- پسک

فرض کنیم Λ یک k-گراف سطری-متناهی بدون منبع و K یک میدان است. در این بخش به بیان قضیه اصلی در مورد ایده‌آل پوچساز می‌پردازیم و نشان می‌دهیم اگر H یک زیرمجموعه موروثی و اشباع در Λ° باشد، در اینصورت ایده‌آل مدرج $I_{H^\perp}$ یک ایده‌آل پوچساز در $KP_K(\Lambda)$ است.
ابتدا یادآوری می‌کنیم اگر I یک ایده‌آل در حلقه R باشد، مجموعه $ann_l(I) = \{r \in R : Ir = 0\}$، $ann_r(I) = \{r \in R : rI = 0\}$ و $ann(I) = ann_l(I) \cap ann_r(I)$ به ترتیب پوچسازهای چپ، راست و دوطرفه I در H است.
همچنین ایده‌آل I یک اایده‌آل پوچساز نامیده می‌شود، هرگاه برای یک ایده‌آل J داشته باشیم $I = ann(J)$. همچنین، اگر H یک زیرمجموعه موروثی و اشباع در Λ° باشد،

$$H^\perp = \{\nu \in \Lambda^\circ \cdot \nu\Lambda w = \varnothing, \ \ \forall\, w \in H\}$$

و $R(H) = \Lambda^\circ - H^\perp$ است.

قضیه ۱.۴. فرض کنیم Λ یک K-گراف سطری متناهی بدون منبع و K یک میدان است. همچنین H یک زیرمجموعه موروثی و اشباع در Λ° باشد، در اینصورت ایده‌آل مدرج I_H یک ایده‌آل پوچساز در $KP_K(\Lambda)$ است و داریم $ann(I_H) = I_{H^\perp}$.

اثبات. ایده‌آل‌های I_H و $I_{H^\perp}$ مدرج هستند، بنابراین برای نشان دادن تساوی بالا کافی است نشان دهیم $H^\perp = \{\nu \in \Lambda : p_v \in ann(I_H)\}$. فرض کنیم $\nu \in H^\perp$. با توجه به اینکه $I_H = span_K\{S_\mu S_\lambda : S(\mu) = S(\lambda) \in H\}$ بنابراین کافی است نشان دهیم $P_\nu S_\mu S_{\lambda^*} = S_\mu S_{\lambda^*} P_\nu = 0$ برای هر $\mu, \lambda \in \Lambda$ که $S(\mu) = S(\lambda) \in H$. با توجه به تعریف $H^\perp$ داریم $\nu\Lambda H = \varnothing$ پس بدیهی است که $p_\nu S_\mu S_{\lambda^*} = S_\mu S_{\lambda^*} p_\nu = 0$.
برای اثبات حالت برعکس، فرض کنیم $\nu \in \Lambda^\circ$، به طوریکه $p_\nu \in ann(I_H)$. باید نشان دهیم $\nu \in H^\perp$. به عبارت دیگر باید نشان دهیم $\nu\Lambda H = \varnothing$. حال با توجه به اینکه $p_\nu \in ann(I_H)$ بنابراین $p_\nu I = I p_\nu = 0$. پس برای هر $\lambda, \mu \in \Lambda$ که $s(\mu) = s(\lambda) \in H$ داریم $p_\nu s_\mu s$. حال بنا به برهان خلف فرض کنیم $\nu\Lambda H \neq \varnothing$. یعنی $\gamma \in \Lambda$ای هست که $r(\gamma) = \nu$ و $s(\gamma) \in H$. پس $p_\nu s_\gamma \neq 0$ که در آن $s(\gamma) \in H$ است. این مطلب با توجه به فرض که $p_\nu s_\mu s_{\lambda^*}$ برای هر $\lambda, \mu \in \Lambda$ که $s(\gamma) = s(\lambda) \in H$ برابر صفر است، تناقض دارد. پس برهان خلف باطل و قضیه اثبات می‌شود. □

۵ نتیجه‌گیری

فرض کنیم Λ یک K-گراف سطری متناهی بدون منبع و K یک میدان است. در این مقاله به بررسی مطلبی در مورد ایده‌آل‌های پوچساز در مورد جبرهای کامیان- پسک می‌پردازیم و قضیه ای در این

زمینه اثبات می‌کنیم. در واقع نشان می‌دهیم ایده آل مدرج I_H در $KP_K(\Lambda)$ یک ایده‌آل پوچساز است و رابطه زیر برای آن برقرار می‌باشد:

$$ann(I_H) = I_{H^\perp}$$

مراجع

[1] A. Kumjian, D. Pask and I. Raeburn, "Cuntz-Krieger algebras of directed graphs", *Pacific J. Math.,* vol. 184, pp. 161-174. MR1626528 (99i:46049), 1998

[2] G. Abrams and G. Aranda Pino, "The Leavitt path algebras of a graph", *J. Algebra*, vol. 293, pp. 319-334, 2005.

[3] A. Kumjian and D. Pask, "Higher rank graph -algebras", *J. Math*, vol. 6, pp. 1-20, 2000.

[4] V as, L. Annihilator ideals of graph algebras. *J. Algebra* Comb 58, 331-353 (2023).

[5] G. Aranda Pino, J. Clark, A. an Huef and I. Raeburn, "Kumjian-Pask algebras of higher rank graphs", *Trans. Amer. Math,* vol. 365, pp. 3613-3641, 2013.

[6] C lark, L. O., Flynnand, C. and an Huef, A; *"Kumjian-Pask algebras of locally convex higher-rank graphs"*, J. Algebra, 399, 445-474, 2014.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

ساختن تابع عضویت یک مجموعه فازی

خیرالله هندالی [۱]

[۱] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

مشخصه هر مجموعه فازی تابع عضویت آن می‌باشد. ساختن تابع عضویت یک مجموعه فازی، مرحله مهمی در بسیاری از کاربردهای نظریه فازی است. در این مقاله به معرفی چند روش برای ساختن تابع عضویت مجموعه‌های فازی می‌پردازیم. این روشها مبتنی بر داده‌های آماری، ارتباط بین احتمال و امکان، نسبت و تفاضل بین درجه عضویتها و برآورد پارامترهای تابع عضویت می‌باشند.

کلمات کلیدی: اندازه امکان، تابع عضویت، مجموعه فازی.

۱ مقدمه

تعیین مقادیر عضویت تمام اعضاء یک مجموعه مرجع در یک مجموعه فازی مرحله مهمی در بسیاری از کاربردهای نظریه فازی می‌باشد. این تخصیص مقادیر عضویت اعضاء در مجموعه فازی را می‌توان به دو روش انجام داد، **روش مستقیم** (یا شخصی) و **روش غیر مستقیم** (یا روشهای آماری).

در روش مستقیم، یک کارشناس درجه عضویت هر عضو مجموعه مرجع را در یک مجموعه فازی مشخص می‌کند که کاملا شخصی می‌باشد. در این حالت ممکن است درجه عضویت تخصیص داده‌شده به اعضاء، در کاربرد سئوال برانگیز باشد. مثلا در منطق فازی توابع عضویتی که اطلاعات ورودی را مدل‌بندی می‌کنند، به شدت در اطلاعات خروجی تاثیر می‌گذارند. در روش غیرمستقیم کارشناس بر اساس اطلاعاتی که از اعضاء مجموعه مرجع دارد، بر اساس روشهای آماری درجات عضویت این اعضاء را در یک مجموعه فازی مشخص می‌کند.

اگر چه روشهای متنوعه‌ای برای ساخت تابع عضویت وجود دارد، اما روشی برای بررسی برآزندگی و درستی روش ساخت یا برآورد تابع عضویت وجود ندارد. انتخاب روش برآورد تابع عضویت به زمینه مورد مطالعه و داده‌های تحت بررسی بستگی دارد. در ادامه چند روش برای ساخت تابع عضویت

[1] hendalikhyrala72@gmail.com

مجموعه‌های فازی معرفی می‌شود. این روشها شامل محاسبه تابع عضویت برمبنای داده‌های آماری، محاسبه تابع عضویت براساس تبدیل تابع احتمال به تابع امکان، محاسبه تابع عضویت وقتی اختلاف دقیق و یا نسبت بین عضویتهای اعضاء در مجموعه فازی را داریم، برآورد پارامترهای مکانی و مقیاسی تابع عضویت می‌باشند. در انتهای کار به مروری کلی بر دیگر روشهای موجود در این زمینه می‌پردازیم.

۲ محاسبه تابع عضویت بر مبنای داده‌های آماری

سیونلار و تروسل [۲] تابع عضویتی بر پایه توابع چگالی احتمال $f(x)$، (یا حتی برآوردی از تابع چگالی) معرفی کردند که با توجه به اصول زیر بدست می‌آید:

۱. $۰ \leq \mu(x) \leq ۱$

۲. انتگرال $\int \mu^۲(t)dt$ مینیمم شود.

۳. $\int \mu(t)f(t)dt \geq c$ باشد، که c سطح اطمینان است و نزدیک یک انتخاب می‌شود.

تحت شرایط بالا تابع عضویت بصورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\mu(x) = \begin{cases} \lambda f(x) & \lambda f(x) < ۱ \\ ۱ & \lambda f(x) \geq ۱ \end{cases}$$

که ثابت λ از معادله زیر بدست می‌آید:

$$\lambda \int f^۲(t)dt + \int f(t)dt = c$$

برای نحوه دستیابی به این تابع عضویت به [۲] مراجعه کنید.

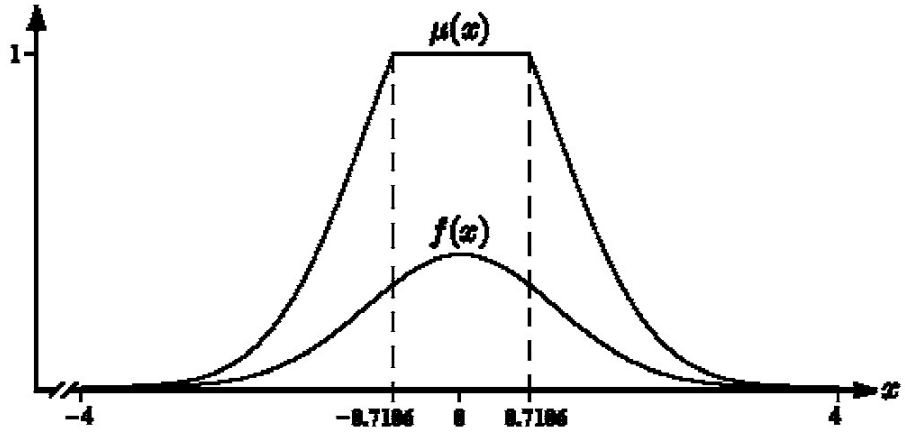
مثال ۱.۲. فرض کنید $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \exp\left\{-\frac{x^۲}{۲}\right\}$. د ر اینصورت:

$$\lambda f(x) < ۱ \Leftrightarrow |x| > \sqrt{-۲ \ln \frac{\sqrt{۲\pi}}{\lambda}},$$

$$\lambda f(x) \geq ۱ \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{-۲ \ln \frac{\sqrt{۲\pi}}{\lambda}},$$

و λ از معادله زیر بدست می‌آید:

$$\Phi\left(\sqrt{-۲ \ln \frac{\sqrt{۲\pi}}{\lambda}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(۱ + c) - \lambda}{۲\sqrt{\pi} - \lambda},$$



شکل ۱: تابع عضویت برآورد شده $\mu(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$

که $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد می‌باشد. در نهایت پس از محاسبه λ، تابع عضویت بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\sqrt{۲\pi}} \exp\left\{-\frac{x^۲}{۲}\right\} & |x| > \sqrt{-۲ \ln \frac{\sqrt{۲\pi}}{\lambda}} \\ ۱ & |x| \leq \sqrt{-۲ \ln \frac{\sqrt{۲\pi}}{\lambda}} \end{cases}$$

حال برای مثال اگر $c = ۰/۹۶$، آنگاه $\lambda = ۳/۲۴۵$ و تابع عضویت برابر است با:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{۳/۲۴۵}{\sqrt{۲\pi}} \exp\left\{-\frac{x^۲}{۲}\right\} & |x| > ۰/۷۱۸۶ \\ ۱ & |x| \leq ۰/۷۱۸۶ \end{cases}$$

تابع عضویت برآورد شده $\mu(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ در شکل ۱ رسم شده‌اند.

۳ تابع عضویت بر اساس تبدیل توزیعهای احتمال به توزیعهای امکان

تبدیل توزیعهای احتمال به توزیعهای امکان و بلعکس، در مقالات متعددی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. این تبدیلات ریشه در اصل سازگاری امکان- احتمال دارند. بر مبنای اصل سازگاری امکان- احتمال می‌توان توزیع امکان متناظر با توزیع احتمال یک متغیر را بدست آورد. اگر توابع عضویت را هم‌ارز توزیعهای امکانی در نظر بگیریم در اینصورت روشهایی که اندازه‌های احتمال را به اندازه‌های امکان تبدیل می‌کنند، می‌توانند توابع عضویت بسازند. برای توضیح بیشتر، فرض کنید μ تابع عضویت یک مجموعه فازی از مجموعه مرجع X باشد. چنانچه μ را بعنوان یک تحدید فازی برای مقادیری که یک متغیر، مانند Δ اختیار می‌کند تلقی کنیم، آنگاه تابع عضویت μ یک تابع امکان برای متغیر Δ

القا می‌کند، یعنی:

$$\pi_{\Delta}(x) = \mu(x) \quad \forall x \in X.$$

لذا هر تابع عضویت را می‌توان یک تابع امکان (مربوط به یک متغیر) در نظر گرفت، و بر عکس هر تابع امکان را می‌توان یک تابع عضویت (مربوط به یک مجموعه فازی) تلقی کرد. در ادامه به سه روش تبدیل احتمال به امکان اشاره می‌کنیم.

فرض کنید اعضاء مجموعه مرجع متناهی X به گونه‌ای باشند که:

$$\pi_{n+1} = 0 \leq \pi_n \leq \cdots \leq \pi_1. \quad \text{و} \quad p_{n+1} = 0 \leq p_n \leq \cdots \leq p_1$$

که در آن p_i و π_i به ترتیب اندازه احتمال و امکان مربوط به x_i می‌باشد.

تبدیل احتمال به امکان دوبوآـ پراد [۴]: برای هر $A \subset X$ امکان مجموعه A حداقل به بزرگی احتمال مجموعه A است، یعنی $\mathrm{Poss}(A) \geq \Pr(A)$. بر این اساس رابطه احتمال و امکان بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_i = \sum_{j=1}^{i} p_j,$$

$$p_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{\pi_j - \pi_{j+1}}{j}.$$

تبدیل احتمال به امکان کلیر [۶] رابطه احتمال و امکان بر اساس دو معیار زیر بیان می‌شود:

- **معیار نسبت:**

$$\pi_i = p_i / p_1,$$

$$p_i = \pi_i / \sum_{j=1}^{n} \pi_j.$$

- **معیار لگاریتم بازه‌ای:** $(0 < \alpha < 1)$

$$\pi_i = (p_i/p_1)^{\alpha},$$

$$p_i = \pi_i^{\frac{1}{\alpha}} / \sum_{j=1}^{n} \pi_j^{\frac{1}{\alpha}}.$$

تبدیل احتمال به امکان موچاوه و همکاران [۱۱]: موچاوه و همکاران یک تبدیل پارامتری

برای رابطه بین احتمال و امکان به صورت زیر بیان کردند:

$$\pi_i = (p_i/p_1)^{k(1-p_i)}, \quad i = 1, ..., n,$$
$$0 \le k \le \frac{\log p_n}{(1-p_n)\log(p_n/p_1)}.$$

k ثابتی است که باید بگونه‌ای انتخاب شود که:

$$\forall x \in X \quad \pi(x) \ge \Pr(x).$$

مثال: فرض کنید تابع احتمال زیر را روی $X = \{1, ..., 6\}$ بصورت زیر داریم:

$$\Pr_\Delta(x) = \frac{7-x}{21}, \quad x = 1, ..., 6.$$

- **روش دوبوآ- پراد:**

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$\pi(x)$	۱	$\frac{15}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{1}{21}$

- **روش کلیر (معیار نسبت):**

$$\pi(x) = \frac{7-x}{6}, \quad x = 1, ..., 6.$$

- **روش موچاوه و همکاران ($k = 1$):** $(0 \le k \le 1/7841)$

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$\pi(x)$	۱	۰/۸۷۰۳	۰/۷۲۰۲	۰/۵۵۲۰	۰/۳۷۰۱	۰/۱۸۱۵

در بعضی حالات که بررسی ابهام از جنبه تصادف مشکل است و در عوض بررسی این ابهام از طریق توزیعهای امکانی و در چارچوب نظریه فازی راحتر است، این روش مناسب است. اما از آنجا که برای برآورد تابع چگالی احتمال احتیاج به داده‌های زیادی داریم، این روش نامناسب است. از جهت دیگر، شکل ظاهری تابع امکان و تابع احتمال یکی خواهد بود. بنابراین می‌توان هیستوگرامهای نرمال‌شده را مستقیما به جای توابع امکان بکار برد. در این حالت فرض می‌شود که درجات عضویت همان فرآوانی‌های نسبی هستند. اما باید خاطرنشان کرد که ابهام ناشی از تصادف و امکان دو مفهوم کاملا متفاوت هستند، و اینگونه توجیه کردن درجات عضویت سئوال برانگیز خواهد بود.

۴ تابع عضویت براساس اختلاف دقیق بین عضویتها

فرض کنید $X = \{x_1, ..., x_n\}$ و A یک زیر مجموعه متناهی فازی از X باشد. حال اگر:

$$p_{ij} = a_i - a_j, \quad a_i = \mu_A(x_i), \quad i, j = 1, ..., n,$$

می‌خواهیم با داشتن مقادیر ماتریس $P=[p_{ij}]_{n\times n}$، مقادیر عضویت a_iها را بدست آوریم. مقادیر دقیق a_iها مشخص نیست، اما مجموع آنها متناهی است و حتی می‌توان فرض کرد که $\sum_{i=۱}^{n} a_i = ۱$. ماتریس $P=[p_{ij}]_{n\times n}$ که نمایانگر تفاضل بین عضویتهای اعضاء مجموعه فازی A می‌باشد دارای خواص زیر برای هر $i,j,h = ۱,...,n$ می‌باشد:

$$p_{ij} = -p_{ji}, \quad p_{ij}+p_{jh}=p_{ih}, \quad p_{ii}=۰.$$

برای بدست آوردن مقادیر $a_۱,...,a_n$ با جمع بستن روی سطر اول ماتریس P داریم:

$$\sum_{j=۱}^{n} p_{۱j} = na_۱ - ۱, \quad \Rightarrow \quad a_۱ = \frac{۱}{n}\left[\sum_{j=۱}^{n} p_{۱j} + ۱\right].$$

حال چون $p_{۱j}=a_۱-a_j$ ؛ $j=۱,...,n$ لذا $a_j = a_۱ - p_{۱j}$.

از آنجا که ماتریس P مجهول است، لذا آنرا از روی داده‌های تجربی برآورد می‌کنیم. حال فرض کنید بوسیله آزمایشی که توسط کارشناس صورت گرفته ماتریس $Q=[q_{ij}]_{n\times n}$ را داریم. بدنبال این هستیم که با داشتن Q، مقادیر a_iها را به بهترین نحو برآورد کنیم. برای اینکار تابع هدف $E=\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}(p_{ij}-q_{ij})^{۲}$ را روی p_{ij}ها مینیمم می‌کنیم. بردار زیر، تابع هدف فوق را مینیمم می‌کند [۱]:

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_{۱۲} \\ \vdots \\ \hat{p}_{۱n} \end{bmatrix} = \Phi^{-۱}\Psi,$$

که در آن:

$$\Phi = \begin{bmatrix} ۲(n-۱) & -۲ & \cdots & -۲ \\ -۲ & ۲(n-۱) & \cdots & -۲ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -۲ & -۲ & \cdots & ۲(n-۱) \end{bmatrix}_{(n-۱)\times(n-۱)}, \quad \Psi = -\begin{bmatrix} \sum_{j=۱}^{n}(q_{۲j}-q_{j۲}) \\ \sum_{j=۱}^{n}(q_{۳j}-q_{j۳}) \\ \vdots \\ \sum_{j=۱}^{n}(q_{nj}-q_{jn}) \end{bmatrix}_{(n-۱)\times ۱}.$$

چون از $\hat{P}$ در برآورد P استفاده کردیم، ممکن است یک یا چند مقدار a_i، $i=۱,...,n$ منفی شود. چون a_iها مقادیر عضویت هستند، باید همواره نامنفی باشند. برای نامنفی شدن a_iها، فرض می‌کنیم $\sum_{i=۱}^{n} a_i = \varepsilon$ است که:

$$\varepsilon \geq \max\left\{ n\hat{p}_{۱i} - \sum_{j=۱}^{n}\hat{p}_{۱j} : \forall i = ۱,...,n \right\}.$$

دراینصورت $a_1 = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} p_{1j} + \varepsilon\right]$ است. اگرچه انتخاب ε بصورت بالا a_iهای مثبت را نتیجه خواهد داد، اما تضمین نمی‌کند که a_iها کوچکتر از یک باشند. اگر یک یا چند مقدار a_i بزرگتر از یک شد، a_iها را بصورت $a_i^* = a_i / \max_{1\le i\le n} a_i$ نرمال می‌کنیم. ب

مثال ۱.۴. فرض کنید $n = 6$ و

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0/3 & 0/2 & 0/4 & -0/2 & -0/5 \\ -0/2 & 0 & -0/2 & 0 & -0/4 & 0/3 \\ -0/1 & 0/3 & 0 & 0/2 & -0/2 & 0/1 \\ -0/4 & 0/1 & -0/3 & 0 & -0/4 & 0/2 \\ 0/1 & 0/4 & 0/3 & 0/5 & 0 & 0/9 \\ 0/1 & 0/5 & -0/6 & 0/8 & -0/1 & 0 \end{bmatrix}.$$

در اینصورت برآورد p_{ij}ها و مقادیر عضویتها بصورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_{12} \\ \hat{p}_{13} \\ \hat{p}_{14} \\ \hat{p}_{15} \\ \hat{p}_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/2333 \\ -0/0167 \\ 0/2833 \\ -0/2333 \\ 0/0833 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/2250 \\ -0/0083 \\ 0/2417 \\ -0/0583 \\ 0/4583 \\ 0/1417 \end{bmatrix}.$$

چون دو مقدار a_2 و a_4 منفی شد، با انتخاب $\varepsilon \ge 1/35$ مقادیر عضویت بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/2833 \\ 0/0500 \\ 0/3000 \\ 0 \\ 0/5166 \\ 0/2000 \end{bmatrix}.$$

۵ تابع عضویت بر اساس برآورد نسبتها

اگر کارشناسی درجات عضویت سه عضو x_1، x_2 و x_3 را در مجموعه فازی A به ترتیب ۰/۸، ۰/۴ و ۰/۲ گزارش دهد، در اینصورت ممکن است سئوالاتی بدین صورت مطرح شوند که آیا عضویت ۰/۸ دوبرابر عضویت ۰/۴ است، یا اینکه ۰/۸ فقط نمایانگر عضویتی بیشتر از ۰/۴ است؟ آیا توجیه نسبت ۰/۸/۰/۴ معادل توجیه نسبت ۰/۴/۰/۲ است؟

برای بررسی موارد فوق باید نظر کارشناس را درباره نسبت عضویت هر دو عضو $x_۱$، $x_۲$ در مجموعه فازی موردنظر جویا شویم و سپس بر این مبنا درجات عضویت را بدست آوریم. در ادامه قضیه‌ای را مطرح می‌کنیم که کلاسی از توابع عضویت را برای تابع نسبت:

$$\rho(x_۱, x_۲) : X \times X \to [۰, \infty),$$

بدست می‌آورد.

قضیه ۱.۵. فرض کنید تابع نسبت $\rho(x_۱, x_۲)$ در شرایط زیر صدق‌کند. تمام نقاط در مجموعه X_A می‌باشند. X_A تکیه‌گاه مجموعه فازی A می‌باشد.

۱. $\rho(x, y) \geq \rho(w, z) \Leftrightarrow \rho(y, x) \leq \rho(z, w)$.

۲. اگر $\begin{cases} \rho(x, y) \geq \rho(x', y') \\ \rho(y, z) \geq \rho(y', z') \end{cases}$ آنگاه $\rho(x, z) \geq \rho(x', z')$.

دراینصورت تابع صعودی اکید $V_A : [۰, +\infty) \to [۰, +\infty)$ و تابع $\mu_A : X \to [۰, ۱]$ وجود دارند که برای هر $x, y \in X$ و $z \in X_A$:

$$\mu_A(x) \geq \mu_A(y) \Leftrightarrow \rho(x, z) \geq \rho(y, z),$$
$$\mu_A(x)/\mu_A(y) = V_A[\rho(x, y)].$$

توابع μ' و V' در شرایط بالا صدق می‌کنند اگر و فقط اگر ثابتهای مثبت حقیقی p و q وجود داشته باشند که $\mu' = p\mu_A^q$ و $V' = pV_A^q$.

برای اثبات قضیه و جزئیات بیشتر درباره این روش به [۹، ۱۰] رجوع کنید.

مثال ۱.۵. فرض کنید $X = \{w, x, y, z\}$ و $X_A = \{w, x, y\}$.

ρ_A	w	x	y
w	۱	۲	۴
x	۱/۲	۱	۲
y	۱/۴	۱/۲	۱

مقادیر عضویت وقتی $V_A(s) = s$ و $V'_A(s) = s^۲$ باشد، بصورت زیر است:

	w	x	y	z
μ_A	۱/۴	۱/۲	۱	۰
μ'_A	۱/۳۲	۱/۸	۱/۲	۰

۶ برآورد پارامترهای تابع عضویت

فرض کنید خانواده‌ای از توابع عضویت مجموعه‌های فازی را بصورت زیر داریم:

$$L(\mu)=\left\{Q_\mu(a,b):Q_\mu(a,b)(x)=\mu\left(\frac{x-a}{b}\right),a\in\mathbb{R},b>0\right\},$$

که در آن $\mu:\mathbb{R}\to[0,1]$، تابع عضویت یک عدد فازی متقارن حول صفر است. اگر $x_1,...,x_n$ یک نمونه مشاهده شده از این خانواده با مقادیر مرتب $x_{(1)}\le x_{(2)}\le\cdots\le x_{(n)}$ باشد، آنگاه یک برآوردگر مناسب برای پارامتر $\theta=(a,b)$ بصورت زیر است:

$$(\hat{a},\hat{b})=\left(\frac{x_{(1)}+x_{(n)}}{2},\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{2c}\right),$$

که در آن c یک عدد حقیقی و ماکسیمم کننده تابع $g(t)=t\mu(t)$ است. خصوصیات این برآوردگر را می‌توانید در [۱۴] مشاهده کنید.

مثال: فرض کنید $x_1,...,x_n$ یک نمونه مشاهده شده از خانواده $L(\mu)$ با توابع عضویت زیر باشد. چون همواره $\hat{a}=(x_{(1)}+x_{(n)})/2$، لذا فقط $\hat{b}$ را در حالات زیر برآورد می‌کنیم:

$$\mu(t)=\max\left\{0,1-|t|^k\right\},k>0,t\in\mathbb{R}\Rightarrow\hat{b}=\frac{1}{2}(k+1)^{1/k}(x_{(n)}-x_{(1)}).$$
$$\mu(t)=\exp(-\rho t^2),\rho>0,t\in\mathbb{R}\Rightarrow\hat{b}=\sqrt{\rho/2}(x_{(n)}-x_{(1)}).$$
$$\mu(t)=\exp(-|t|),t\in\mathbb{R}\Rightarrow\hat{b}=(x_{(n)}-x_{(1)})/2.$$
$$\mu(t)=\sqrt{1-t^2}I_{[-1,1]}(t)\Rightarrow\hat{b}=(x_{(n)}-x_{(1)})/\sqrt{2}.$$

روش فوق را حتی می‌توان در حالاتی که داده‌ها فازی هستند نیز بکار برد، در اینصورت برآوردگرهای پارامترهای a و b مجموعه‌های فازی می‌باشند [۱۴].

۷ مرور کلی بر دیگر روشها

روش مقادیر ویژه: در این روش مقادیر عضویت از ماتریس $T=[t_{ij}]_{n\times n}$، ماتریس نسبت عضویتها، محاسبه می‌شوند. هر t_{ij}، درجه نسبت عضویت دو عضو x_i و x_j را در یک مجموعه فازی نشان می‌دهد و $t_{ij}=t_{ji}^{-1}$ است. هر چه t_{ij} بزرگتر باشد، عضویت x_i در مقایسه با x_j در مجموعه فازی A بیشتر می‌باشد. اگر ماتریس T سازگار باشد، یعنی واقعا نماینده نسبت عضویتها باشد، مقادیر عضویت اعضاء X در مجموعه فازی A، بردار مقادیر ویژه ماتریس T می‌باشند که $Tu=nu$ [۱۲، ۱۳]. اگرچه این روش در حالتی که داده‌ها سازگار باشند، ساده و کارا می‌باشد، اما وقتی مجموعه مرجع بزرگ باشد، بررسی شرط سازگاری دشوار می‌شود.

روش اصول موضوعه: دمبی [۳] روشی را برای ساخت تابع عضویت معرفی می‌کند که بر مبنای یکسری اصول از پیش تعیین شده می‌باشد.
روش پارامتری کوهن و براد [۷] با این فرض که تابع عضویت پیوسته، مشتق‌پذیر و Sـشکل است و در رابطه $d\mu_A(x)/dx = k\mu_A(x)[۱ - \mu_A(x)]$ صدق می‌کند، تابع عضویتی بصورت $\mu_A(x) = [۱ + \exp(a - bx)]^{-۱}$ معرفی کرد. پارامترهای a و b را می‌توان با توجه به روش ارائه شده در بخش ۶ یا روشهای رگرسیونی برآورد کرد. این روش بیشتر توجیه کننده شکل تابع عضویت است تا برآورد آن.
و در انتها به مطالعه روشهایی بر مبنای هیستوگرام، نزدیکترین همسایگی، شبکه‌های عصبی، خوشه‌بندی و ترکیب آمیخته در [۸] بپردازید.

۸ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

از جمله مسائلی که ساخت تابع عضویت را متنوع می‌کند برداشتها و توصیفهای متفاوتی است که از درجه عضویت اعضاء یک مجموعه فازی می‌شود. در این باره می‌توان به دیدگاه درستنمایی، دیدگاه مجموعه‌های تصادفی، دیدگاه مشابهت، دیدگاه اندازه و ... اشاره کرد [۵]. بنابراین بسته به نوع توصیفی که از درجه عضویت اعضاء مجموعه فازی داریم می‌توان روشهای متنوعی برای ساخت تابع عضویت مجموعه‌های فازی ارائه داد. در این مقاله به معرفی چند روش برای ساخت تابع عضویت اشاره کردیم. از آنجا که هنوز معیاری برای محاسبه نیکویی برازش و درستی یک روش ساخت تابع عضویت معرفی نشده است، انتخاب نوع روش بستگی به زمینه مطالعه، نوع داده‌های تحت مطالعه و نظر کارشناس دارد.

مراجع

[1] Chen, Y.H., et al. (2000). New estimation method for the membership values in fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 112: 521-525.

[2] Civanlar, N. R., Trussell, H. J. (1986). Constructing membership functions using statistical data. *Fuzzy sets and Systems* 18: 1-13.

[3] Dombi, J. (1990). Membership function as an evaluation, *Fuzzy Sets and Systems* 35: 1–21.

[4] Dubois, D., Prade, H. (1993). On possibility/ probability transformations, *Fuzzy Logic*, 103-112.

[5] Dubois, D., Prade, H. (1994). Fuzzy sets - a convenient fiction for modeling vagueness and possibility, IEEE Trans. on Fuzzy Systems 2: 16-21.

[6] Klir, G. J. (1992). Probability-possibility transformations: a comparison, *Int. J. General Systems* 21: 291-310.

[7] Kochen, M., Badre, A. N. (1976). On the precision of adjectives which denote fuzzy sets. *J. Cybern.* 4, No. 1: 49–59.

[8] Medasani, S., et al. (1998). An overview of membership function generation techniques for pattern recognition. *Int. J. Approx. Reason* 19: 391–417.

[9] Marchant, T. (2004). The measurement of membership by comparisons, *Fuzzy Sets and Systems* 148: 157–177.

[10] Marchant, T. (2004). The measurement of membership by subjective ratio estimation, *Fuzzy Sets and Systems* 148: 179–199.

[11] Mouchaweh, M. S. et al. (2002). Conception d'un système de diagnostic adaptatif et prédictif basé sur la method Fuzzy pattern Matching pour la surveillance en ligne des systèmes évolutifs, Thèse soutenue à l'Université de Reims, France.

[12] Saaty, T.L. (1980). The Analytic Hierarchy Process, McGraw Hill, New York.

[13] Triantaphyllou, E., Mann, S.H. (1990). An evaluation of the eigenvalue approach for determining the membership values in fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems* 35: 295-301.

[14] Xizhao, W., Minghu, H. (1998). Note on maxmin$\frac{\mu}{E}$ estimation, *Fuzzy Sets and Systems* 94: 71-75.

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

یافتن معکوس ماتریس‌های بلوکی مزدوج هنکل

فاطمه رضائیان [۱] مریم شمس سولاری [۲] مریم مومنی [۳] هادی روحانی قهساره [۴] سارا شکراللهی یانچشمه [۵]

[۱,۳,۵] گروه ریاضی، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
[۴] دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران

چکیده

این مقاله با بهره‌گیری از تکنیک‌های تجزیه و بازآرایی بلوکی، به مطالعه روش محاسبه معکوس ماتریس‌های بلوکی هنکل با ساختار Kـ قطری و گوشه‌های آشفته می‌پردازد. کارآمدی روش پیشنهادی از منظر دقت محاسباتی و سرعت اجرا با استفاده از نرم‌افزار MATLAB مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: مزدوج مختلط، ماتریس بلوکی هنکل، معکوس ماتریس

۱ مقدمه

ماتریس‌های ساختاریافته نقشی اساسی در تحلیل تصویر، بهینه‌سازی و پردازش سیگنال دارند و تاکنون پژوهش‌های متعددی برای یافتن معکوس، مقادیرویژه و دترمینان آن‌ها انجام شده است [۳، ۲، ۱]. تکامل این حوزه با گسترش به ماتریس‌های CH و $BBPSH$ ادامه داشته است [۵، ۴]. با توجه به پیچیدگی‌های روزافزون در حوزه‌های فناوری‌های نوظهور، ضرورت ادغام و یکپارچه‌سازی این ماتریس‌ها به‌منظور پاسخگویی مؤثر به چالش‌های متعدد، امری اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. این مقاله، ماتریس‌های $H_{CKB,N}$ را که ترکیبی از ماتریس‌های CH و $BBPSH$ است، معرفی می‌نماید و روشی را برای محاسبه معکوس این ماتریس‌ها ارائه می‌دهد. سپس کارایی این روش از نظر دقت و سرعت انجام محاسبات مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد.

[1] F.rezaeian@iau.ac.ir
[2] Shamssolary@pnu.ac.ir
[3] mary.momeni@iau.ac.ir
[4] Hadiroohani61@gmail.com
[5] sa.shokrollahi@iau.ac.ir

تعریف ۱.۱. ماتریس $H_{CKB,N}$ یک آرایش بلوکی $N \times N$ دارد که هر بلوک $m \times m$ از ماتریس‌های هنکل با ساختار Kـ قطری و گوشه‌های آشفته تشکیل شده و به قرار زیر است:

$$H_{CKB,N} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{N-2} & A_{N-1} \\ c(A_1) & c(A_2) & \dots & c(A_{N-1}) & c(A_N) \\ c^2(A_2) & c^2(A_3) & \dots & c^2(A_N) & c^2(A_{N+1}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ c^{N-1}(A_{N-1}) & c^{N-1}(A_N) & \dots & c^{N-1}(A_{2N-3}) & c^{N-1}(A_{2N-2}) \end{bmatrix},$$

به‌طوری که، هر بلوک A_i به‌صورت زیر است:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & a_{i,2} & a_{i,1} & r \\ \vdots & \dots & a_{i,1} & a_{i,j} & a_{i,-1} \\ a_{i,2} & \dots & \dots & \dots & a_{i,-2} \\ a_{i,1} & a_{i,j} & \dots & \dots & \vdots \\ r & a_{i,-1} & a_{i,-2} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

که در آن، r و $a_{i,j}$ اعداد مختلط بوده و همچنین، $-N \leq j \leq N$ و به ازای $i = 1, 2, \dots$ خواهیم داشت $K = 2i + 1$.

تذکر ۱.۱. در چارچوب این مقاله، نماد O برای نمایش ماتریس صفر است.

۲ دست‌آوردهای پژوهش

در این بخش، با کمک بسط ماتریس مزدوج مختلط هنکل فرمولی برای محاسبه معکوس ماتریس‌های $H_{CKB,N}$ ارائه می‌شود.

قضیه ۱.۲. فرض کنید ماتریس‌های $H_{CKB,N}$ و $H_{CKB,N-1}$ معکوس‌پذیر باشند. با در نظر گرفتن ماتریس‌های زیر:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0 \\ \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{N-1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{-N+1} \\ \boldsymbol{\delta}_{-N+2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{-N+1} & \boldsymbol{\beta}_{-N+2} & \dots & \boldsymbol{\beta}_0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_0 & \boldsymbol{\gamma}_1 & \dots & \boldsymbol{\gamma}_{N-1} \end{bmatrix},$$

به‌طوری که $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\gamma}$ ماتریس‌های مربعی $m \times m$ هستند و به ترتیب به m ستون آخر، m ستون اول، m سطر اول و m سطر آخر از $H_{CKB,N}$ اشاره دارند و به‌وضوح مشخص است که $\boldsymbol{\alpha}_{\cdot}, \boldsymbol{\gamma}_{\cdot} \neq \mathrm{O}$. بنابراین، $H^{-1}_{CKB,N}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
H^{-1}_{CKB,N} = &\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{\cdot} & & & \mathrm{O} \\ \boldsymbol{\alpha}_{1} & c(\boldsymbol{\alpha}_{\cdot}) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \boldsymbol{\alpha}_{N-1} & c(\boldsymbol{\alpha}_{N-2}) & \dots & c^{N-1}(\boldsymbol{\alpha}_{\cdot}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi & & & \mathrm{O} \\ & c(\Pi) & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & c^{N-1}(\Pi) \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{-N+1} & \dots & \boldsymbol{\beta}_{-1} & \boldsymbol{\beta}_{\cdot} \\ c(\boldsymbol{\beta}_{-N+2}) & \dots & c(\boldsymbol{\beta}_{\cdot}) & \\ \vdots & \dots & & \\ c^{N-2}(\boldsymbol{\beta}_{\cdot}) & & & \mathrm{O} \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} \mathrm{O} & & & \\ c(\boldsymbol{\delta}_{-N+1}) & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c(\boldsymbol{\delta}_{-1}) & \dots & c^{N-1}(\boldsymbol{\delta}_{-N+1}) & \mathrm{O} \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} c(\Lambda) & & & \mathrm{O} \\ & c^{2}(\Lambda) & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & c^{N}(\Lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c(\gamma_{1}) & \dots & c(\boldsymbol{\gamma}_{N-1}) & \mathrm{O} \\ \vdots & \dots & \dots & \\ c^{N-1}(\boldsymbol{\gamma}_{N-1}) & \dots & & \\ \mathrm{O} & & & \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

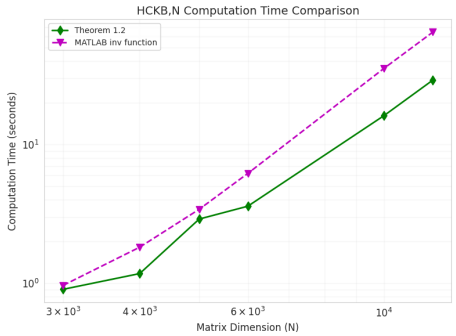
و

$$
\begin{aligned}
H^{-1}_{CKB,N-1} = &\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{\cdot} & & & \mathrm{O} \\ \boldsymbol{\alpha}_{1} & c(\boldsymbol{\alpha}_{\cdot}) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \boldsymbol{\alpha}_{N-2} & c(\boldsymbol{\alpha}_{N-3}) & \dots & c^{N-2}(\boldsymbol{\alpha}_{\cdot}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi & & & \mathrm{O} \\ & c(\Pi) & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & c^{N-2}(\Pi) \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_{-N+2} & \dots & \boldsymbol{\beta}_{-1} & \boldsymbol{\beta}_{\cdot} \\ c(\boldsymbol{\beta}_{-N+3}) & \dots & c(\boldsymbol{\beta}_{\cdot}) & \\ \vdots & \dots & & \\ c^{N-2}(\boldsymbol{\beta}_{\cdot}) & & & \mathrm{O} \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{-N+1} & & & \mathrm{O} \\ \boldsymbol{\delta}_{-N+2} & c(\boldsymbol{\delta}_{-N+1}) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \boldsymbol{\delta}_{-1} & c(\boldsymbol{\delta}_{-2}) & \dots & c^{N-1}(\boldsymbol{\delta}_{-N+1}) \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} \Lambda & & & \mathrm{O} \\ & c(\Lambda) & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & c^{N-1}(\Lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{1} & \dots & \boldsymbol{\gamma}_{N-2} & \boldsymbol{\gamma}_{N-1} \\ c(\gamma_{2}) & & c(\boldsymbol{\gamma}_{N-1}) & \\ \vdots & \dots & & \\ c^{N-2}(\boldsymbol{\gamma}_{N-1}) & & & \mathrm{O} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

وقتی که،

$$\Lambda = A_{N-1} - P(c(H_{c,N-1}))^{-1}U,$$

$$\Pi = (c^{N-1}(A_{N-1}) - G(H_c, N-1)^{-1})^{-1}W,$$



شکل ۱: مقایسه زمان انجام محاسبات $H^{-1}_{CKB,N}$ برای روش پیشنهادی و تابع معکوس در MATLAB.

$$U = \begin{bmatrix} c(A_N) \\ c^2(A_{N+1}) \\ \vdots \\ c^{N-1}(A_{2N-2}) \end{bmatrix}_{m(N-1)\times m},$$

$$P = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{N-2} \end{bmatrix}_{m\times m(N-1)},$$

$$G = \begin{bmatrix} c^{N-1}(A_N) & c^{N-1}(A_{N+1}) & \dots & c^{N-1}(A_{2N-2}) \end{bmatrix}_{m\times m(N-1)},$$

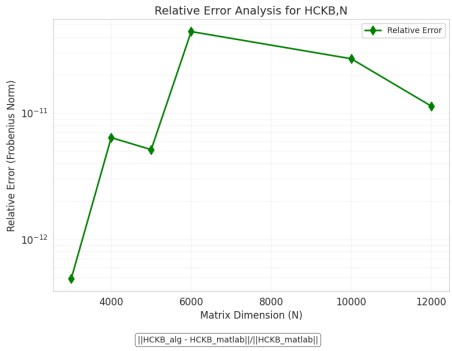
$$W = \begin{bmatrix} A_0 \\ c(A) \\ \vdots \\ c^{N-2}(A_{N-2}) \end{bmatrix}_{m(N-1)\times m}.$$

۳ تحلیل‌های عددی

در این بخش، با نمودارهای تحلیلی کارایی روش پیشنهادی در محاسبه معکوس ماتریس‌های $H_{CKB,N}$ ارزیابی می‌شود. مزیت روش پیشنهادی از نظر افزایش سرعت محاسبات و حفظ دقت برای ماتریس‌ها با مقیاس بزرگ، نسبت به تابع معکوس در MATLAB، به‌ترتیب در شکل‌های ۱ و ۲ نمایش داده شده است.

نتیجه‌گیری

دراین مقاله، با کمک بازآرایی بلوکی روشی برای محاسبه معکوس ماتریس‌های $H_{CKB,N}$ با ساختار Kـ قطری و گوشه‌های آشفته ارائه شد. ارزیابی‌های عددی نشان داده‌اند که در ماتریس‌ها با مقیاس بزرگ، محاسبه $H^{-1}_{CKB,N}$ با استفاده از روش پیشنهادی، ضمن حفظ دقت محاسباتی، به کاهش قابل



شکل ۲: مقایسه خطای نسبی روش پیشنهادی و تابع معکوس در MATLAB.

توجه زمان پردازش منجر می‌گردد. تحقیقات بعدی می‌تواند به کاربرد این روش در حل سیستم‌های معادلات خطی و پردازش سیگنال بپردازد.

مراجع

[1] W. F. Trench, *An algorithm for the inversion of finite Toeplitz matrix*, J. SIAM. 13 (1964), no. 3, 515–522.

[2] G. Labahn, T. Shalom, *Inversion of Toeplitz structured matrices using only standard equations*, Linear Algebra and its Applications. 207 (1994), 49–70.

[3] G. Labahn, T. Shalom, *Inversion of Toeplitz matrices with only two standard equations*, Linear Algebra and its Applications. 175 (1992), 143–158.

[4] Z. Jiang, T.-Y. Tam, Y. Wang, *Inversion of conjugate-Toeplitz matrices and conjugate-Hankel matrices*, Linear and Multilinear Algebra. 65 (2016), no. 2, 256–268.

[5] M. Shams Solary, *Computational properties of pentadiagonal and antipentadiagonal block band matrices with perturbed corners*, Soft Computing. 24 (2020), no. 1, 301–310.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

محاسبه معکوس ماتریس‌های هنکل با بهره‌گیری از خواص ساختاری ماتریس‌های توپلیتز

فاطمه رضائیان [۱] مریم شمس سولاری [۲] مریم مومنی [۳] هادی روحانی قهساره [۴] سارا شکراللهی یانچشمه [۵]

[۱,۳,۵] گروه ریاضی، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
[۴] دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران

چکیده

در این مقاله، دو روش مبتنی بر تبدیلات ساختاری ماتریس‌های توپلیتز به هنکل از منظر دقت محاسباتی و کارایی زمانی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB مورد مقایسه و تحلیل قرار می‌گیرند. سپس، روش بهینه برای تدوین فرمول صریح محاسبه معکوس ماتریس هنکل به کار گرفته می‌شود و کارآمدی آن از طریق تحلیل نمودارهای گرافیکی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: ماتریس هنکل، ماتریس توپلیتز، خواص ساختاری

۱ مقدمه

ماتریس‌های ساختاریافته نقش بنیادینی در حوزه‌های متنوع علمی و مهندسی از جمله پردازش سیگنال‌های پزشکی، نظریه تقریب و پیش‌بینی سیستم‌های خطی ایفا می‌کنند. ماتریس‌های توپلیتز با برخورداری از ویژگی‌های منحصربه‌فرد، کارایی قابل توجهی در محاسبات عددی از خود نشان داده‌اند و پژوهش‌های گسترده در زمینه محاسبه دترمینان، مقادیر ویژه و معکوس آن‌ها به توسعه الگوریتم‌های کارآمد در علوم مختلف منجر شده است [۳، ۲، ۱]. ماتریس‌های هنکل، گروه دیگری از ماتریس‌های ساختاریافته هستند که علی‌رغم کاربردهای متعدد، در ابعاد بالا با چالش بدوضعی مواجه می‌شوند که محاسبه

[1] F.rezaeian@iau.ac.ir
[2] Shamssolary@pnu.ac.ir
[3] mary.momeni@iau.ac.ir
[4] Hadiroohani61@gmail.com
[5] sa.shokrollahi@iau.ac.ir

معکوس آن‌ها را با دشواری‌های قابل توجهی همراه می‌سازد [۴]. در این مقاله، پس از ارائه تعاریف اولیه، با هدف ارتقای کیفیت محاسبات برای ماتریس‌های هنکل، از خصوصیات ساختاری ماتریس‌های توپلیتز بهره گرفته شده و فرمول صریحی برای محاسبه معکوس آن‌ها تدوین می‌گردد. کارایی و اثربخشی این فرمول از منظر دقت محاسباتی و بهینگی زمانی در محیط نرم‌افزاری MATLAB مورد تحلیل و ارزیابی قرار می‌گیرد.

تعریف ۱.۱. ماتریس هنکل $H = [h_{i,j}]_{i,j=۱}^{n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ماتریسی است که عناصر آن به صورت $h_{i,j} = c_{i+j-۲}$ تعریف می‌شوند و در آن $c_k{}_{k=۰}^{۲n-۲}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط است.

تعریف ۲.۱. ماتریس توپلیتز $T = [t_{i,j}]_{i,j=۱}^{n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ماتریسی است که عناصر آن به صورت $t_{i,j} = c_{i-j}$ تعریف می‌شوند و در آن $c_k{}_{k=-(n-۱)}^{n-۱}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط است.

تعریف ۳.۱. ماتریس جایگشت $P = [P_{i,j}]_{i,j=۱}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریسی است که برای $i+j = n+۱$ عناصر آن برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر می‌باشند.

۲ دست‌آوردهای پژوهش

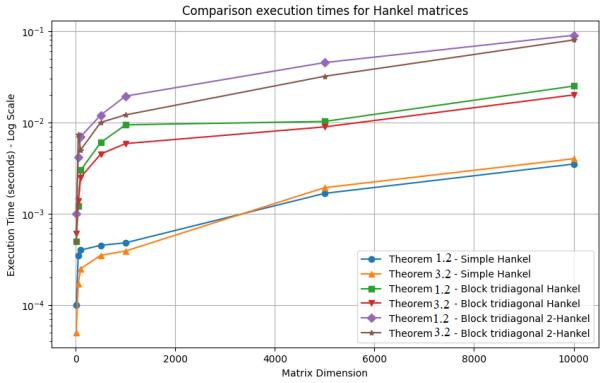
در این بخش، دو روش کارآمد برای تبدیل ماتریس‌های توپلیتز به هنکل معرفی می‌شود که بر اساس قضایا و نتایج زیر استوار است:

قضیه ۱.۲. برای هر ماتریس توپلیتز $T_n = [t_{i,j}]$ با عناصر $t_{i,j} = c_{i-j}$، می‌توان از طریق تبدیل‌های زیر، ماتریس هنکل $H_n = [h_{i,j}]$ با عناصر $h_{i,j} = d_{i+j-۲}$ را ساخت، به‌طوری که برای $k = ۰, ۱, \ldots, ۲n-۲$ در آن $d_k = c_{-(k+۲-n)}$ است. مراحل تبدیل به صورت زیر است:

$$T_n \xrightarrow{\text{ترانهاده}} T_n^T = [c_{j-i}]_{i,j=۱}^{n},$$
$$T_n^T \xrightarrow{\text{چرخش ۱۸۰ درجه}} T_n^R = [c_{-(i+j-۲)}]_{i,j=۱}^{n},$$
$$T_n^R \xrightarrow{\text{وارونه‌سازی سطرها}} H_n = [c_{-(۲n-i-j)}]_{i,j=۱۰}^{n}.$$

نتیجه ۱.۲. برای هر ماتریس توپلیتز $T_n = [t_{i,j}]_{i,j=۱}^{n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$، می‌توان یک ماتریس هنکل $H_n = [h_{i,j}]_{i,j=۱}^{n}$ با عناصر $h_{i,j} = d_{i+j-۲}$ را ساخت، به‌طوری که برای $k = ۰, ۱, \ldots, ۲n-۲$ در آن $d_k = c_{-(k+۱-n)}$ است. در این صورت، تبدیل از طریق مراحل زیر حاصل می‌شود

$$T_n \xrightarrow{\text{ترانهاده}} T_n^T = [c_{j-i}]_{i,j=۱}^{n},$$
$$T_n^T \xrightarrow{\text{تغییر ترتیب}} T_n^P = [c_{-(j-i)}]_{i,j=۱}^{n},$$
$$T_n^P \xrightarrow{\text{چرخش ۱۸۰ درجه}} T_n^R = [c_{-(n-۱+i-j)}]_{i,j=۱}^{n},$$
$$T_n^R \xrightarrow{\text{وارونه‌سازی سطرها}} H_n = [c_{-(۲n-۱-i-j)}]_{i,j=۱۰}^{n}.$$



شکل ۱ : مقایسه زمان تبدیل ماتریس توپلیتز به هنکل مطابق قضایای ۱.۳ و ۲.۲.

قضیه ۲.۲. اگر $T_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ یک ماتریس توپلیتز و P_n ماتریس جایگشت مشابه تعریف ۴.۲ باشد، آنگاه روابط زیر بین ماتریس‌های توپلیتز و هنکل برقرار است:

- $T_nP_n = H_n.$
- $H_nP_n = T_n.$

نتیجه ۲.۲. اگر P_n ماتریس جایگشت و T_n ماتریس سه قطری توپلیتز یا دو-توپلیتز باشد، آنگاه با اعمال تبدیلات چندگانه (شامل S برای جابجایی ستون‌ها، F برای وارونه‌سازی سطرها و R برای چرخش ماتریس)، روابط زیر بین این ماتریس‌ها برقرار می‌باشند:

- $T_n^{SS}P_n = H_n.$
- $T_n^{FF}P_n = H_n.$
- $T_n^{RRRR}P_n = H_n.$

در ادامه، مطابق قضایای ۱.۳ و ۲.۲ ماتریس‌های هنکل در حالت‌های مختلف مقایسه می‌شوند. نتایج این مقایسه در شکل زیر نشان داده شده است: شکل ۱ بر اساس قضایای ۱.۳ و ۲.۲، مقایسه زمان محاسباتی تبدیل ماتریس‌های متنوع توپلیتز به هنکل را نمایش می‌دهد که برتری قابل توجه روش ارائه شده در قضیه ۲.۲ را آشکار می‌سازد. بر این اساس، این روش کارآمد برای دست‌یابی به فرمول محاسبه معکوس ماتریس هنکل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳ معکوس ماتریس‌های هنکل در حالت عمومی

در این بخش، با بهره‌گیری از روش ارائه شده در قضیه ۲.۲، فرمول محاسبه معکوس ماتریس هنکل تدوین می‌گردد. سپس، کارایی این فرمول از منظر دقت محاسباتی و بهینگی زمانی در مقایسه با تابع معکوس استاندارد در محیط MATLAB مورد ارزیابی و تحلیل قرار می‌گیرد.

قضیه ۱.۳. فرض کنید H_n و T_n به ترتیب ماتریس‌های هنکل و توپلیتز باشند. اگر داشته باشیم:

$$P_n = \begin{bmatrix} & & ۱ \\ & \cdots & \\ ۱ & & \end{bmatrix}, e_n^T = [۰, \ldots, ۰, ۱], e_۱^T = [۱, ۰, \ldots, ۰],$$

$$f^T = [۰, a_{۱-n} - a_۱, \ldots, a_{۲-n} - a_{n-۲}, a_{-۱} - a_{n-۱}],$$

$$K = \begin{bmatrix} ۰ & \cdots & \cdots & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۰ & \cdots & \cdots & ۰ \\ ۰ & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix},$$

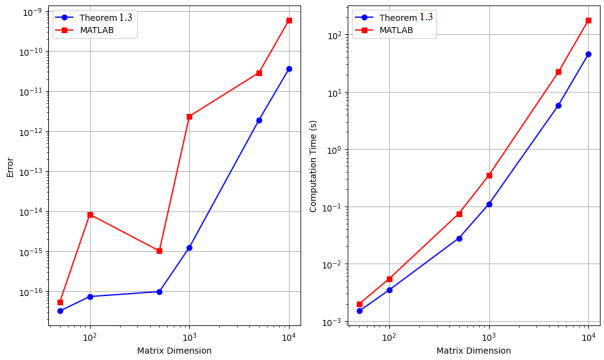
$$H_۱ = \begin{bmatrix} y_۱ & \cdots & y_{n-۱} & y_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & y_{n-۱} \\ y_{n-۱} & \cdots & \cdots & \vdots \\ y_n & y_{n-۱} & \cdots & y_۱ \end{bmatrix}, \quad H_۲ = \begin{bmatrix} x_۱ & \cdots & x_{n-۱} & x_n \\ \vdots & \cdots & \cdots & x_{n-۱} \\ x_{n-۱} & \cdots & \cdots & \vdots \\ x_n & x_{n-۱} & \cdots & x_۱ \end{bmatrix},$$

$$U_۱' = \begin{bmatrix} ۱ & -x_۱ & \cdots & -x_{n-۱} \\ & ۱ & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -x_۱ \\ & & & ۱ \end{bmatrix}, U_۲' = \begin{bmatrix} ۰ & y_۱ & \cdots & y_{n-۱} \\ & ۰ & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & y_۱ \\ & & & ۰ \end{bmatrix},$$

آنگاه:

$$KH_n - H_nK^T = fe_n^T - e_۱f^T,$$
$$P_nT_۱U_۱' = H_۱U_۱',$$
$$P_nT_۲U_۲' = H_۲U_۲',$$
$$H_n^{-۱} = H_۱U_۱' + H_۲U_۲'.$$

در ادامه، به منظور ارزیابی دقت محاسباتی و کارایی زمانی روش ارائه شده در قضیه ۱.۳ برای محاسبه $H^{-۱}$، مقایسه‌ای میان این روش و تابع معکوس استاندارد در محیط MATLAB انجام



شکل ۲: مقایسه دقت و سرعت انجام محاسبات روش قضیه‌ی ۱.۳ و تابع معکوس در MATLAB برای محاسبه معکوس ماتریس هنکل.

می‌پذیرد: شکل ۲ نشان می‌دهد که روش مبتنی بر قضیه ۱.۳ از لحاظ دقت محاسباتی و کارایی زمانی، به‌ویژه در ابعاد بالاتر، عملکرد بهتری نسبت به تابع معکوس استاندارد در محیط MATLAB دارد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، پس از مقایسه و تحلیل دو روش تبدیل ماتریس‌های توپلیتز به هنکل و انتخاب روش بهینه، فرمول صریحی برای محاسبه معکوس ماتریس هنکل تدوین گردید. نتایج ارزیابی‌ها نشان داد که این فرمول در مقایسه با تابع معکوس در MATLAB، برای ماتریس‌ها با مقیاس بزرگ از دقت محاسباتی بالاتر و کارایی زمانی مطلوب‌تری برخوردار است. این دست‌آورد می‌تواند کاربردهای قابل توجهی در حوزه‌های پردازش سیگنال‌های پزشکی و پیش‌بینی سیستم‌های خطی داشته باشد.

مراجع

[1] W. F. Trench, *An algorithm for the inversion of finite Toeplitz matrix*, J. SIAM. 13 (1964), no. 3, 515–522.

[2] G. Labahn, T. Shalom, *Inversion of Toeplitz structured matrices using only standard equations*, Linear Algebra and its Applications. 207 (1994), 49–70.

[3] G. Labahn, T. Shalom, *Inversion of Toeplitz matrices with only two standard equations*, Linear Algebra and its Applications. 175 (1992), 143–158.

[4] E. E. Tyrtyshnikov, *How bad are Hankel matrices?*, Numerische Mathematik, 67 (1994), no. 2, 261–269.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

کاربرد روش سینک–گالرکین در حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری معمولی و جزیی با شرایط مرزی

زهره مرادی [۱] امید نیکان [۲] حمید مسگرانی [۳]

[۱] دانشجوی دکتری، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران
[۳] گروه ریاضی، دانشگاه شهید رجایی، تهران ،ایران

چکیده

در این مقاله، روش سینک–گالرکین برای حل عددی مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل کسری (اعم از معمولی و با مشتقات جزئی) بررسی و توسعه یافته است. معادلات دیفرانسیل کسری به‌دلیل توانایی بالا در مدل‌سازی پدیده‌های پیچیده و دشواری‌های موجود در یافتن جواب تحلیلی آن‌ها، از اهمیت فزاینده‌ای در علوم مختلف برخوردارند. روش سینک–گالرکین با بهره‌گیری از توابع پایه‌ی سینک و نگاشت‌های همدیس، قادر است جواب این معادلات را با دقت بالا و همگرایی نمایی تقریب بزند. در این چارچوب، جواب مسئله به‌صورت ترکیب خطی از توابع سینک بیان شده و ضرایب ناشناخته با اعمال شرایط گالرکین و حل یک دستگاه معادلات جبری تعیین می‌شوند. نتایج عددی به‌دست‌آمده برای مثال‌های مختلف، مؤید دقت، کارایی و قابلیت اعتماد بالای روش پیشنهادی بوده و نشان می‌دهند که این روش در مقایسه با سایر روش‌های عددی رایج، عملکردی رقابتی و در برخی موارد برتر ارائه می‌دهد.

کلمات کلیدی: روش سینک–گالرکین، معادلات دیفرانسیل کسری، مشتق کپوتو، روش طیفی، تقریب عددی

۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل کسری به‌سبب توانایی بالا در مدل‌سازی پدیده‌های پیچیده در حوزه‌های مختلف علوم، به‌طور فزاینده‌ای مورد توجه قرار گرفته‌اند [۱]. از آن‌جا که یافتن جواب تحلیلی این معادلات اغلب دشوار یا غیرممکن است، توسعه روش‌های عددی کارآمد برای حل آن‌ها امری ضروری به شمار می‌رود. روش سینک–گالرکین، که یکی از روش‌های طیفی محسوب می‌شود، به‌دلیل ویژگی‌هایی همچون همگرایی نمایی و کارایی بالا به‌ویژه در نزدیکی نقاط تکین، به‌عنوان ابزاری قدرتمند در حل

[1] zohremoradi86@yahoo.com
[2] nikan@yahoo.com
[3] h.mesgarani@yahoo.com

عددی این معادلات معرفی شده است [۲]. در این مقاله، به بررسی و توسعه کاربرد روش سینک–گالرکین در حل عددی مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل کسری، اعم از معادلات معمولی و معادلات دیفرانسیل کسری با مشتقات جزئی، پرداخته می‌شود. هدف اصلی، نشان دادن دقت و کارایی این رویکرد در مواجهه با این دسته از مسائل است.

۲ مفاهیم مقدماتی

در این بخش، مفاهیم پایه و ضروری مرتبط با معادلات دیفرانسیل کسری و توابع سینک را مرور می‌کنیم که برای درک و پیاده‌سازی روش سینک–گالرکین اهمیت دارند.

۱.۲ مشتقات کسری کپوتو

در این مقاله، مشتق کسری چپ به‌صورت کپوتو از مرتبه α برای تابع $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (که در آن $n-1 \leq \alpha \leq n$ و $n \in \mathbb{Z}$)، به‌شکل زیر تعریف می‌شود [۳]:

$$ {}_a^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt $$

این تعریف به‌دلیل ویژگی‌هایی همچون صفر بودن مشتق ثابت و امکان اعمال آسان شرایط اولیه فیزیکی، در بسیاری از کاربردهای عملی ترجیح داده می‌شود.

۲.۲ توابع سینک و خواص آن‌ها

تابع سینک به‌صورت

$$ \sin(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}, \quad z \neq 0, \quad \sin(0) = 1 $$

تعریف می‌شود [۲]. این تابع دارای خواص متعامد مفیدی برای تقریب توابع است. تقریب سینک یک تابع $f(x)$ که بر روی مجموعه‌ای گسسته تعریف شده، با استفاده از توابع پایه‌ی سینک به‌صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$ s(k,h)(x) = \sin\left(\frac{x}{h} - k\right), \quad f_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} f(kh)\, s(k,h)(x), $$

که در آن h گام نمونه‌برداری است. برای اعمال این روش در دامنه‌های محدود، از نگاشت‌های همدیس مانند

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)$$

استفاده می‌شود که دامنه $[a,b]$ را به نوار افقی در صفحه مختلط نگاشت می‌کنند [۲]. نقاط گره‌ای سینک نیز با رابطه

$$x_k = \varphi^{-1}(kh)$$

تعریف می‌شوند.

۳ ایده سینک–گالرکین برای معادلات دیفرانسیل معمولی کسری

در این بخش، روش سینک–گالرکین برای حل مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل معمولی کسری به‌شکل زیر معرفی می‌شود [۴]:

$$\mu_2(x)y''(x)+\mu_1(x)y'(x)+\lambda(x){}_a^C D_x^\alpha y(x)+\mu_0(x)y(x) = f(x), \quad a<x<b, \quad 0<\alpha<1,$$

با شرایط مرزی $y(a) = y(b) = 0$. جواب تقریبی $y_N(x)$ به‌صورت ترکیبی خطی از توابع پایه سینک در نظر گرفته می‌شود:

$$y_N(x) = \sum_{k=-M}^{M} c_k S_k(x), \quad S_k(x) = s(k,h)(\varphi(x)).$$

ضرایب مجهول c_k با اعمال شرایط گالرکین به‌دست می‌آیند:

$$\langle L[y_N(x)] - f(x), S_j(x)\rangle = 0, \quad j = -M,\ldots,M,$$

که در آن L عملگر دیفرانسیلی و $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ضرب داخلی با تابع وزن $w(x) = \frac{1}{\varphi'(x)}$ است [۴]. با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء، خواص توابع سینک، گزاره هم‌یوغی مشتقات کسری کپوتو مانند:

$$\int_a^b g(x)\,{}_a^C D_x^\alpha f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,{}_x D_b^\alpha g(x)\,dx$$

[۳]، و همچنین تقریب انتگرال‌ها با استفاده از کوادراتورهای سینک، دستگاهی از معادلات جبری خطی برای ضرایب c_k به‌دست می‌آید که حل آن، جواب تقریبی $y_N(x)$ را تعیین می‌کند.

۴ ایده سینک–گالرکین برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری

روش سینک–گالرکین را می‌توان به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) از نوع کسری نیز تعمیم داد. به‌عنوان نمونه، برای مسئله‌ای به فرم:

$$u_{tt}(x,t) = a(x)u_{xx}(x,t)+b(x)\,{}_{\cdot}^{C}D_t^{\beta}u(x,t)+c(x)u(x,t)+f(x,t), \quad ۰ < x,t < ۱, \quad ۰ < \beta <$$

با شرایط مرزی همگن، جواب تقریبی $u(x,t)$ به‌صورت ترکیب دو بعدی از توابع سینک در نظر گرفته می‌شود:

$$u_{N_x,N_t}(x,t) = \sum_{i=-M_x}^{N_x}\sum_{j=-M_t}^{N_t} u_{ij}S_{ij}(x,t), \quad S_{ij}(x,t) = S_i(x)S_j(t),$$

که توابع S_i و S_j، پایه‌های سینک در متغیرهای x و t هستند و با استفاده از نگاشت‌های همدیس مانند $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x}{۱-x}\right)$ در دامنه $[۰,۱]$ تعریف می‌شوند. شرایط گالرکین به‌صورت دوبعدی اعمال می‌شود:

$$\langle L[u_{N_x,N_t}(x,t)] - f(x,t), S_{kl}(x,t)\rangle = ۰,$$

که در آن $\langle ۰,۰\rangle$ ضرب داخلی دوبعدی با توابع وزن مناسب است [۵]. در نهایت، با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء، خواص توابع سینک و کوادراتورهای سینک، دستگاهی از معادلات جبری برای ضرایب مجهول u_{ij} حاصل می‌شود که با حل آن، جواب تقریبی معادله دیفرانسیل جزئی به‌دست می‌آید.

۵ نتایج عددی و بحث

به‌منظور ارزیابی دقت و اثربخشی روش سینک–گالرکین، نتایج عددی مربوط به نمونه‌هایی از معادلات دیفرانسیل کسری (اعم از معمولی و با مشتقات جزئی) ارائه شده‌اند. در تمامی آزمایش‌ها، پارامترهای $N = M$، $\alpha = \beta = ۰/۵$ و $d = \pi/۲$ (برای نگاشت همدیس) در نظر گرفته شده‌اند.

مثال ۱.۵. معادله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

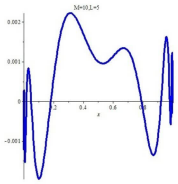
(۱)

$$y''(x)+\alpha D_x^c D_x^r y(x)+y(x) = ۴x^{۲}(\Delta x-۲)+\alpha\Delta x^{۲/۷}\left(\frac{۱۲}{F(\Delta x)}x - \frac{۲۴}{F(۲/۷)}\right)+x^{۲}(x-۱)$$

با شرایط مرزی $y(۱) = y(۰)$ جواب تحلیلی این مسئله به‌صورت $y(x) = x^{۲}(x-۱)$ شناخته شده است. نتایج عددی حاصل از روش سینک–گالرکین برای $M = L = ۵$ در جدول ۱ ارائه شده‌اند. همچنین نمودار خطا در شکل ۱ نشان داده شده است که همگرایی بسیار خوب روش را تایید می‌کند.

جدول ۱: مقادیر منتخب حاصل از روش سینک–گالرکین برای مثال ۱.۵ با $M = L = ۵$

x	جواب دقیق	جواب تقریبی	خطا
0.125	-0.0002136230469	-0.0002512664747	0.00003764367242
0.500	-0.03125000000	-0.0282408000	0.0029592000
0.875	-0.07327270508	-0.07662929685	0.003356595235



شکل ۱: نمودار خطا برای مثال ۱.۵

همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش سینک–گالرکین قادر است با دقت بالا جواب دقیق را تقریب بزند و میزان خطا در بیشتر نقاط بسیار ناچیز است.

مثال ۲.۵. قابلیت روش پیشنهادی در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری (PDEs) نیز مورد ارزیابی قرار گرفت. به عنوان نمونه، معادله زیر

$$u_{tt} = e^x u_{xx} + (x^۲ + ۱)\,{}^C D_x^{r(x)} u - \frac{۱}{۱+x} u + f(x,t) \qquad (۲)$$

با شرایط مرزی $u(x,0) = u(x,1) = 0 \quad u(0,t) = u(1,t) = 0$ و دارای جواب دقیق $u(x,t) = x^r(1-x)\sin(\pi t)$ است. و داریم

$$\begin{aligned} f(x,t) = {} & -\pi^r(۱-x)x^r \sin(\pi t) + \frac{(۱-x)x^r \sin(\pi t)}{۱+x} \\ & - \frac{(۱+x^r)}{۶}\left(۶Vx^{۱/۷} - \frac{۱}{۶}x^{۲/۷}\right)\sin(\pi t) \\ & + e^x\left(\gamma(۱-x)\sin(\pi t) - \gamma x \sin(\pi t)\right) \end{aligned} \qquad (۳)$$

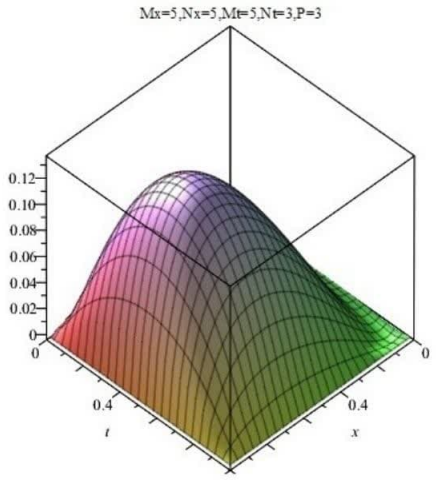
نتایج عددی حاصل از حل این معادله، دقت بالا و همگرایی نمایی روش پیشنهادی را برای این نوع مسائل به‌خوبی تأیید می‌کند.

۶ نتیجه‌گیری

در این پژوهش، روش سینک–گالرکین به‌عنوان یک رویکرد عددی کارآمد برای حل مسائل مقدار مرزی معادلات دیفرانسیل کسری (معمولی و با مشتقات جزئی) معرفی و تحلیل شد. ویژگی‌هایی چون

جدول ۲: نتایج عددی منتخب برای مثال ۲.۵ با پارامترهای $M_t = M_x = N_x = 5$، $N_t = P = 3$

t	x	جواب دقیق	جواب تقریبی	خطا
۰/۰۳	۰/۳	$۵/۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۰ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۰۳	۰/۶	$۱/۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۵ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۰۳	۰/۹	$۷/۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۷/۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۵ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۰۶	۰/۳	$۱/۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۸/۰ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۰۶	۰/۶	$۲/۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۲/۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۹/۰ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۰۶	۰/۹	$۱/۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۰۹	۰/۳	$۱/۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۸ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۰ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۰۹	۰/۶	$۴/۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۴/۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۲ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۰۹	۰/۹	$۲/۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۲/۹ \times ۱۰^{-۲}$	$۶/۰ \times ۱۰^{-۳}$



شکل ۲: نمودار مقایسه‌ای جواب تقریبی و دقیق برای مثال ۲.۵

نرخ همگرایی بالا و توانایی مقابله با تکینگی‌ها، این روش را به گزینه‌ای مناسب برای حل معادلاتی تبدیل کرده‌اند که یافتن جواب تحلیلی برای آن‌ها دشوار است. نتایج عددی ارائه‌شده نه‌تنها دقت بالای روش را تأیید می‌کنند، بلکه نشان می‌دهند که روش سینک–گالرکین در مقایسه با سایر روش‌های عددی، نتایج رقابتی و در برخی موارد دقیق‌تری را ارائه می‌دهد. از جمله مسیرهای پژوهشی آینده می‌توان به توسعه این روش برای حل عددی مسائل مقدار مرزی غیرخطی کسری و گسترش آن به دامنه‌های چندبعدی اشاره کرد.

مراجع

[1] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Elesvier, Vol. 198, (1998).

[2] J. Lund, K.L Bowers, *Sinc Method for Quadrature and Differential Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, (1992).

[3] R. Almeida, D.F.M. Torres,*Necessary and sufficient conditions for the fractional calculus of variations with Caputo derivatives*, Commun Nonlinear Sci. Numer. Simula 16, no. 3, (2011), 1490–1500.

[4] A. Secer, S. Alkan, M.A. Akinlar and M. Bayram, *Sinc-Galerkin method for approximate solutions of fractional order boundary value problems*, Boundary value Problems, (2013),1-14.

[5] S. Alkan and A. Secer, *Application of Sinc-Galerkin method for Solving Space-Fractional Boundary Value problem*, Mathematical Problems in Engineering, no. 1, (2015).

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC
Islamic World Science Citation Center
۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

مدل انتقال واریانس برای شناسایی داده‌های پرت در مدل‌های خطی با خطا در اندازه‌گیری تحت محدودیت ریج

بابک بابادی [۱]

[۱] دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه آمار

چکیده

در این مقاله مدل انتقال واریانس برای مدل‌های خطی با خطا در اندازه‌گیری تحت محدودیت ریج معرفی و برآورد پارامترهای مدل براساس روش امتیاز تصحیح شده ارائه و خواص مجانبی آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس آزمون امتیاز تصحیح شده را برای این مدل معرفی و با استفاده از یک روش بوت استرپ پارامتری توزیع تجربی آماره مرتبط با این آزمون محاسبه می‌شود. در پایان جهت نشان دادن توانایی این آزمون یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی ارائه می‌شود.

کلمات کلیدی: آزمون امتیاز ، بوت استرپ پارامتری، توانایی

۱ مقدمه

برای مدل‌های خطی با اثرات ثابت، روش‌های تشخیصی گوناگونی به منظور شناسایی نقاط پرت ارائه شده‌اند که می‌توان به روش حذف موردی اشاره نمود. از جمله آماره‌های موجود در مدل حذف موردی می‌توان به فاصله‌ی کوک (۱۹۷۷) وآماره‌ی کوک-وایسبرگ (کوک و وایسبرگ، ۱۹۸۰) اشاره نمود.

کوک و همکاران (۱۹۸۲) روش دیگری را در نظر گرفتند که در آن هر مشاهده به‌عنوان مشاهده‌ای با تورم در واریانس خطا در نظر گرفته شد، بطوری‌که افزایش نسبی این تورم توسط یک پارامتر مشخص می‌گردد. کوک و وایسبرگ (۱۹۸۲) این مدل را به نام مدل انتقال واریانس معرفی کردند. در این روش به جای حذف مشاهده (یا گروهی از مشاهدات) به مشاهده مورد نظر وزن کمتری اختصاص داده می‌شود. کوک و همکاران (۱۹۸۲) نشان دادند که در مدل‌های خطی با اثرات ثابت تحت روش حداکثر درستنمایی، مکان تخمین یک نقطه‌ی پرت تحت این مدل و مدل حذف موردی (انتقال میانگین) می‌تواند متفاوت باشد.

[1] b.babadi@scu.ac.ir

در مدل‌های خطی با خطا در اندازه‌گیری مانند متغیرهای وابسته، متغیرهای مستقل (یا حتی ضرایب مربوط به پارامترهای اثرات تصادفی) نیز با خطا اندازه‌گیری می‌شوند و در صورتی‌که بدون توجه به این خطاها، از یک مدل خطی عمومی استفاده شود، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و برآوردهای گشتاوری در این حالت برآوردهایی ناسازگار خواهند شد (استفانسکی، ۱۹۸۹، فولر، ۱۹۸۷، چنگ و ون نس، ۱۹۹۹، کارول و همکاران، ۲۰۰۶). چندین روش برای تصحیح اریبی این برآوردگرها مطرح شده است که از آن جمله می‌توان به روش امتیاز تصحیح شده (ناکامورا، ۱۹۹۰) و روش SIMEX (وانگ و همکاران، ۱۹۹۸) اشاره کرد.
در رگرسیون خطی، مستقل بودن متغیرها از اهمیت خاصی برخوردار است به‌گونه‌ای که اگر استقلال بین متغیرها از بین برود، تجزیه و تحلیل رگرسیونی تحت تأثیر قرار می‌گیرد. درصورت وجود همبستگی بین متغیرهای مدل با پدیده‌ای به نام همخطی مواجه هستیم. همخطی سبب بروز مشکلاتی مانند: ناپایدار بودن برآوردها، فواصل اطمینان بزرگ (به دلیل افزایش انحراف معیار) عدم اعتبار برآورد کمترین توان دوم و ... می‌شود. روش‌های مختلفی جهت مقابله با همخطی وجود دارد از جمله: استفاده از اطلاعات پیشین و اطلاعات کمکی در قالب محدودیت خطی تصادفی بر روی ضرایب رگرسیونی، استفاده از برآوردگرهای اُریب مانند برآوردگر لیو، برآوردگر ریج که توسط استین (۱۹۵۶) هورل و کنارد(۱۹۷۰) و لیو (۱۹۹۳) پیشنهاد شده است.

۲ مدل انتقال واریانس برای مدل‌های خطی با خطا در اندازه‌گیری

فرض کنید مشاهده‌ی iـام دارای تورم در واریانس باشد. یک مدل انتقال واریانس برای این مشاهده به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} y &= Z\beta + b_i d_i + \varepsilon, \\ X &= Z + \triangle \end{aligned} \qquad (۱)$$

در این مدل y یک بردار $n \times ۱$ از مشاهدات، Z یک ماتریس غیرقابل مشاهده‌ی $n \times p$، β یک بردار $p \times ۱$ از پارامترها که اثرات ثابت نامیده می‌شوند و ε بردار خطاهای تصادفی با توزیع $N(0, \sigma^۲ I_n)$ است. $\sigma^۲$ واریانس مجهول مشترک و ماتریس X مقدار مشاهده‌ی ماتریس Z با خطای اندازه‌گیری $\Delta = (\delta_۱, \delta_۲, ..., \delta_n)'$ است که Δ یک ماتریس تصادفی با توزیع $N(0, I_n \otimes \Lambda)$ می‌باشد. همچنین ماتریس Λ یک ماتریس با عناصر معلوم فرض شده است و d_i یک بردار ستونی از مرتبه‌ی n است که iـامین عضو آن یک و سایر عضوها صفر است. b_i یک اثر تصادفی نامعلوم از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس α_i است. مدل (۱) را می‌توان به‌عنوان یک مدل خطی آمیخته با خطا در اندازه‌گیری در نظر گرفت که در آن b_i به‌عنوان اثری تصادفی معرفی می‌شود. با این فرض که b_i و ε از هم مستقل باشند، در این حالت ماتریس واریانس کوواریانس بردار مشاهدات یعنی y برابر است با :

$$Var(y) = \alpha_i d_i d_i' + \sigma^۲ I_n = \sigma^۲ \left[(w_i - ۱) d_i d_i' + I_n \right] = \sigma^۲ H_i,$$

که $w_i = \frac{\alpha_i}{\sigma^2} + 1$ و $\sigma^2 w_i$ واریانس مشاهده‌ی iـام یعنی y_i است. اگر بدون درنظر گرفتن خطای اندازه‌گیری، ماتریس X جایگزین ماتریس Z شود، برآوردهای حداکثر درستنمایی و گشتاوری پارامترهای مدل سازگار نیستند. ناکامورا (۱۹۹۰) برای رفع این مشکل روشی را بنام روش امتیاز تصحیح شده معرفی کرد.

۱.۲ برآورد پارامترها در مدل انتقال واریانس تحت محدودیت ریج

با افزودن محدودیت ریج به لگاریتم تابع درستنمایی و لگاریتم تابع درستنمایی تصحیح شده (ناکامورا، ۱۹۹۰)، این توابع به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$l_k(\beta, \sigma^2, w_i, Z, y) = l(\beta, \sigma^2, w_i, Z, y) - \frac{k}{2}(\beta'\beta - L)$$
$$l_k^*(\beta, \sigma^2, w_i, X, y) = l^*(\beta, \sigma^2, w_i, X, y) - \frac{k}{2}(\beta'\beta - L)$$

جایی که

$$l(\beta, \sigma^2, w_i, Z, y) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\log|H_i| - \frac{1}{2\sigma^2}(y - Z\beta)' H_i^{-1}(y - Z\beta)$$
$$l^*(\beta, \sigma^2, w_i, X, y) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\log|H_i| - \frac{1}{2\sigma^2}\{(y - X\beta)' H_i^{-1}(y - X\beta) - tr(H_i^{-1})\beta'\Lambda\beta\}$$

با فرض ثابت بودن w_i و با مشتق‌گیری از تابع l_k^* نسبت به β و σ^2 برآوردهای امتیاز تصحیح شده‌ی این پارامترها به‌ترتیب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\beta}_k(w_i) = (X' H_i^{-1} X + kI_p - tr(H_i^{-1})\Lambda) X' H_i^{-1} Y$$
$$\hat{\sigma}_k^2(w_i) = \frac{1}{n}\left[(y - X\hat{\beta}_k(w_i))' H_i^{-1}(y - X\hat{\beta}_k(w_i) - tr(H_i^{-1})\hat{\beta}_k'(w_i)\Lambda\hat{\beta}_k(w_i)\right]$$

۱.۱.۲ برآوردهای مجانبی پارامترها در مدل انتقال واریانس

کوک و همکاران (۱۹۸۲) برآوردهای β و σ^2 مربوط به یک مدل انتقال واریانس در مدل‌های خطی را به‌صورت توابعی از برآورد آنها در حالتی‌که هیچ نقطه‌ی پرتی وجود نداشته باشد، به‌دست آوردند.

قضیه ۱.۲. برای مدل انتقال واریانس (۱) داریم:

$$\hat{\beta}_k(w_i) = \hat{\beta}_k - \frac{w_i - ۱}{۱ + r_{ii}(w_i - ۱)}(X'X + KI_p - n\Lambda)^{-۱}x_i\hat{v}_i + O_p(n^{-۱}).$$

جایی که $\hat{\beta}_k$ برآورد تصحیح شده β تحت محدودیت ریج است و r_{ii} و $\hat{v}_i$ به‌ترتیب عضو iـام قطر اصلی ماتریس $R = I_n - X(X'X + kI_p - n\Lambda)^{-۱}X'$ و بردار باقیمانده‌ها یعنی $\hat{V} = y - X\hat{\beta}_k$ است.

قضیه ۲.۲.

$$\hat{\sigma}_k^{۲}(w_i) = \hat{\sigma}_k^{۲}\big[۱ - \frac{r_{ii}(w_i - ۱)}{۱ + r_{ii}(w_i - ۱)} \times \frac{v_i^{۲}}{n}\big] + O_p(n^{-۱})$$

جایی‌که $\sigma_k^{۲}$ برآورد تصحیح شده $\sigma^{۲}$ تحت محدودیت ریج و $t_i = \dfrac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_v\sqrt{r_{ii}}}$ باقیمانده‌ی استیودنت مربوط به iـامین مشاهده است. از این پس برای راحتی کار، مقادیر تقریبی به‌دست آمده برای $\hat{\beta}_k(w_i)$ و $\hat{\sigma}_k^{۲}(w_i)$ را به‌ترتیب با $\tilde{\beta}_k(w_i)$ و $\tilde{\sigma}_k^{۲}(w_i)$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۱.۲. برآوردهای $\tilde{\beta}_k(w_i)$ و $\tilde{\sigma}_i^{۲}(w_i)$ در حالت خاص عبارتند از:
حالت الف) اگر $w_i = ۱$ و $r_{ii} = ۰$ آن‌گاه $\tilde{\beta}_k(w_i) = \hat{\beta}_k$ و $\hat{\sigma}_k(w_i) = \hat{\sigma}_k^{۲}$
حالت ب) برای $r_{ii} > ۰$

$$\lim_{w_i \longrightarrow +\infty} \tilde{\beta}_k(w_i) = \hat{\beta}_k - \frac{(X'X + KI_p - n\Lambda)^{-۱}x_i\hat{v}_i}{r_{ii}} = \tilde{\beta}_{kmi}$$

$$\lim_{w_i \longrightarrow +\infty} \tilde{\sigma}_k^{۲}(w_i) = \hat{\sigma}_v^{۲}(۱ - \frac{v_i^{۲}}{n}) = \tilde{\sigma}_{kmi}^{۲}$$

که در آن $\tilde{\beta}_{kmi}$ و $\tilde{\sigma}_{kmi}^{۲}$ به‌ترتیب برآوردهای β و $\sigma^{۲}$ در یک مدل انتقال میانگین تحت محدودیت ریج است.

۳ برآورد پارامتر انتقال واریانس

با قرار دادن $\hat{\beta}_k(w_i)$ و $\hat{\sigma}_k^{۲}(w_i)$ در لگاریتم تابع درستنمایی تصحیح‌شده‌ی l_k^*، این تابع تبدیل به تابعی بر حسب w_i خواهد شد که بدون در نظر گرفتن ضرایب ثابت، آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$h(w_i) = -n\log[\hat{\sigma}_k^{۲}(w_i)] - \log(w_i).$$

با استفاده از بسط تیلور می‌توان تخمینی مناسب برای $h(w_i)$ شبیه شکلی که کوک و همکاران (۱۹۸۲) برای مدل‌های خطی ارائه دادند، به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}\tilde{h}(w_i) &= -n\log\left[\hat{\sigma}_k^{۲} - \frac{w_i - ۱}{۱ + r_{ii}(w_i - ۱)} \times \frac{\hat{v}_i^{۲}}{n}\right] - \log(w_i) \\ &= -n\log\left[\tilde{\sigma}_k^{۲}(w_i)\right] - \log(w_i).\end{aligned}$$

کوک و همکاران (۱۹۸۲) نشان دادند که می‌توان مقداری از w_i در بازه‌ی $[۱, +\infty)$ پیدا کرد بطوری‌که به‌ازای آن تابع $\tilde{h}(w_i)$ بیشینه شود. این مقدار را با $\tilde{w}_i$ نشان می‌دهیم. آن‌ها همچنین در این مورد که یک مشاهده با باقیمانده‌ی بزرگ ممکن است نشانه‌ای از وجود یک نقطه‌ی پرت باشد، بحث کردند.

۴ آزمون امتیاز

قبل از معرفی آماره‌ی امتیاز ابتدا به معرفی تابع امتیاز و ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده برای یک مدل انتقال واریانس می‌پردازیم.

۱.۴ تابع امتیاز

$$U_k(w_i) = \frac{d}{dw_i} l_i^*(\beta, \sigma^{۲}, w_i; X, y) = -\frac{۱}{۲w_i} - \frac{۱}{۲\sigma^{۲}}\left[\frac{-(y - X\beta)' d_i d_i' (y - X\beta) + \beta'\Lambda\beta}{w_i^{۲}}\right].$$

تابع امتیاز برای پارامتر انتقال واریانس w_i را می‌توان با مشتق گرفتن از l_k^* نسبت به w_i به‌صورت زیر به‌دست آورد.

تحت فرض $H_۰ : (w_i = ۱)$، مقدار β و $\sigma^{۲}$ به‌ترتیب برابر $\hat{\beta}_k$ و $\hat{\sigma}_k^{۲}$ خواهد بود. لذا مقدار تابع امتیاز فوق برابر است با:

$$U_k(w_i = ۱) = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲\hat{\sigma}_k^{۲}}(\hat{v}_i^{۲} - \hat{\beta}_k'\Lambda\hat{\beta}_k) = \frac{۱}{۲}A(r_i\dot{t}_{۱}^{۲} - ۱)$$

که در آن $A = \frac{\hat{\sigma}_v^۲}{\hat{\sigma}_k^۲}$ تحت فرض $H_.$

$$J(\sigma^۲, w_i) = \begin{bmatrix} -\frac{n}{۲\hat{\sigma}_k^۲} & -\frac{۱}{۲\hat{\sigma}_k^۲}(\hat{v}_i^۲ - \hat{\beta}_k'\Lambda\hat{\beta}_k) \\ -\frac{۱}{۲\hat{\sigma}_k^۲}(\hat{v}_i - \hat{\beta}_k\Lambda\hat{\beta}_k) & -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\hat{\sigma}_k^۲}(v_i^۲ - \hat{\beta}_k'\Lambda\hat{\beta}_k) \end{bmatrix}$$

۲.۴ ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده

ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده برای مدل انتقال واریانس (۱) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(\sigma^۲, w_i) = \begin{bmatrix} -\frac{d^۲}{(d\sigma^۲)^۲} l_k^*(\beta, \sigma^۲, w_i; X, Y) & -\frac{d^۲}{d\sigma^۲ dw_i} l_k^*(\beta, \sigma^۲, w_i; X, y) \\ -\frac{d^۲}{d\sigma^۲ dw_i} l_k^*(\beta, \sigma^۲, w_i, X, y) & -\frac{d^۲}{(dw_i)^۲} l_k^*(\beta, \sigma^۲, w_i, X, y) \end{bmatrix}$$

تحت فرض $H_.$ این ماتریس برابر است با:

$$J(\sigma^۲, w_i) = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}_k^۲} & -\frac{۱}{۲\hat{\sigma}_k^۲}(\hat{v}_i^۲ - \hat{\beta}'\Lambda\hat{\beta}) \\ -\frac{۱}{۲\hat{\sigma}_k^۲}(\hat{v}_i^۲ - \hat{\beta}'\Lambda\hat{\beta}) & -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\hat{\sigma}_k^۲}(\hat{v}_i^۲ - \hat{\beta}'\Lambda\hat{\beta}) \end{bmatrix}$$

قضیه ۱.۴. آماره‌ی آزمون امتیاز برای مشاهده‌ی iـام (SC_i) و براساس ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده برای آزمون $w_i = ۱$: $H_.$ برابر است با:

$$SC_i(w_i = ۱) = \frac{nA^۲(r_{ii}t_i^۲ - ۱)^۲}{۲\{(n-۱)[۲A(r_{ii}t_i^۲ - ۱) + ۱] - A^۲(r_{ii}t_i^۲ - ۱)^۲\}}, \qquad r_{ii}t_i^۲ > ۱$$

با توجه به گومز و همکاران (۲۰۱۰)، از روش بوت استرپ پارامتری برای به‌دست آوردن توزیع تجربی برای آماره آزمون امتیاز، تحت شرایطی که هیچ داده‌ی پرتی وجود نداشته باشد، استفاده می‌شود.

۵ مطالعه‌ی شبیه‌سازی

برای بررسی عملکرد آزمون SC_i از مطالعه‌ی شبیه‌سازی استفاده می‌کنیم. برای این کار متغیر پاسخ y_j را از مدل

$$y_j = Z\beta + \varepsilon_j; \quad j = ۱, ۲, ..., ۱۱۰۰,$$
$$X_j = Z + \triangle_j,$$

تولید می‌شود که $y_j = (y_{۱j}, y_{۲j}, ..., y_{nj})'$، $Z = (I_n, z)$، $X = (I_n, x)$، ۱_n یک بردار از مرتبه‌ی n است که همه‌ی عناصرش یک می‌باشد، $z' = (z_۱, ..., z_n)$، $x' = (x_۱, ..., x_n)$ و ε_j دارای ساختاری مانند y_j است. ترکیبات متفاوت از پارامترهای موجود در مدل برای انجام شبیه‌سازی در نظر می‌گیریم که عبارتند از: $\beta = (\beta_۰, \beta_۱) = (۱۰, ۰/۳)$ یا $\beta = (۲۰, ۱)$، Z_j از توزیع $U(۱۰۰, ۹۰۰)$، ε_{ij} دارای توزیع $N(۰, \sigma^۲)$ که $\sigma^۲ = ۲$ یا $\sigma^۲ = ۸$، $\Lambda = diag(\lambda_۱, \lambda_۲) =$ $diag(۰, ۰/۲۵)$ یا $\Lambda = diag(۰, ۱)$ و $n = ۴۰$ یا $n = ۱۰۰$ برای شبیه‌سازی انتخاب شدند. برای انجام این مطالعه‌ی شبیه‌سازی از نرم‌افزار R استفاده شده است و در هر مجموعه از داده‌های شبیه‌سازی آماره آزمون SC برای مشاهده‌ی اول محاسبه می‌شود. این انتخاب این مشاهده اختیاری است و می‌توان هر کدام از مشاهدات را انتخاب کرد. همچنین مقدار $k = \frac{۲\sigma^۲}{\beta'\beta}$ در نظر گرفته می‌شود.

برای تولید یک توزیع تجربی از آماره آزمون تحت فرض صفر، ابتدا $s = ۲۵۰۰$ مجموع داده از مدل زیر تولید می‌شود.

$$y^*_{js} = \hat{Z}_j\hat{\beta}_j + \varepsilon^*_{js},$$
$$X^*_{js} = \hat{Z}_j + \triangle_{js},$$

که در آن ε^*_{js} از توزیع $N(0, \hat{\sigma}^۲_{kj} I_n)$ و $\triangle_{js}$ از یک توزیع $N(0, I_n \otimes \Lambda)$ تولید می‌شوند $\hat{Z}_{kj}$، $\hat{\beta}_{kj}$ و $\hat{\sigma}^۲_{kj}$ نیز به‌ترتیب برآوردهای تصحیح شده‌ی Z، β و $\sigma^۲$ حاصل از بردار مشاهدات y_j تحت محدودیت ریج می‌باشند. سپس در هر بردار از مشاهدات y^*_{js} آماره آزمون SC برای یک مدل انتقال واریانس متناظر با مشاهده‌ی اول محاسبه شده و با استفاده از آن‌ها صدک ۹۵ هر آماره‌ی آزمون به‌دست می‌آید. همانطور که قبلاً گفتیم از این مقدار به‌عنوان یک مقدار آستانه‌ای برای آماره‌ی آزمون محاسبه شده از داده‌های y_j استفاده می‌شود. برای پیدا کردن تخمین مناسب از خطای نوع اول در یک آماره‌ی آزمون با $\alpha = ۰/۰۵$ کافیست تعداد مجموعه داده‌هایی که در آن‌ها آماره‌ی آزمون از صدک ۹۵ حاصل از توزیع تجربی بیشتر باشد را بر ۱۱۰۰ تقسیم کنیم. خطاهای نوع اول تجربی متناظر با آماره آزمون برای آستانه به‌دست آمده از توزیع تجربی تحت فرض صفر در جدول ۴ ارائه شده است. با مشاهده‌ی مقادیر موجود در این جدول نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی خطای نوع اول تجربی برای هر آماره‌ی آزمون SC به مقدار مورد نظر $\alpha = ۰/۰۵$ نزدیک است. به‌منظور بررسی حساسیت نسبی آزمون SC

جدول ۱: احتمال خطای نوع اول و توان آزمون SC در یک مدل انتقال واریانس در سطح $\alpha = ۰/۰۵$

SC						
Power	Sig Level	$(\lambda_۱, \lambda_۲)$	$\sigma^۲$	β	n	b
۰/۰۶۲۱	۰/۰۴۳۱	(۰, ۱)	۲	(۱, ۲۰)	۴۰	۱
۰/۰۸۷۳	۰/۰۴۶۳	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۰۵۱۳	۰/۰۴۷۴	(۰, ۱)	۸			
۰/۰۶۰۳	۰/۰۴۰۳	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۰۹۰۹	۰/۰۴۴۱	(۰, ۱)	۲	(۱۰, ۰/۳)		
۰/۰۹۴۵	۰/۰۳۸۷	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۰۶۰۳	۰/۰۳۸۷	(۰, ۱)	۸			
۰/۰۶۲۱	۰/۰۳۶۰	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۰۸۰۱	۰/۰۴۵۰	(۰, ۱)	۲	(۱, ۲۰)	۱۰۰	
۰/۰۹۵۴	۰/۰۵۲۲	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۰۶۴۸	۰/۰۵۲۲	(۰, ۱)	۸			
۰/۰۶۶۶	۰/۰۵۳۱	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۰۹۵۴	۰/۰۵۲۲	(۰, ۱)	۲	(۱۰, ۰/۳)		
۰/۰۹۹۰	۰/۰۵۲۲	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۰۶۳۰	۰/۰۵۳۱	(۰, ۱)	۸			
۰/۰۶۳۹	۰/۰۵۲۲	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۲۹۰۱	۰/۰۴۵۳	(۰, ۱)	۲	(۱, ۲۰)	۴۰	۳
۰/۴۵۶۱	۰/۰۴۷۸	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۱۳۹۷	۰/۰۴۷۵	(۰, ۱)	۸			
۰/۱۵۸۲	۰/۰۴۱۹	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۴۷۳۱	۰/۰۳۹۹	(۰, ۱)	۲	(۱۰, ۰/۳)		
۰/۴۹۰۵	۰/۰۳۵۱	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۱۶۴۳	۰/۰۳۷۵	(۰, ۱)	۸			
۰/۱۷۸۱	۰/۰۳۹۶	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۳۵۹۸	۰/۰۴۴۹	(۰, ۱)	۲	(۱, ۲۰)	۱۰۰	
۰/۴۸۴۴	۰/۰۵۱۷	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۱۶۷۴	۰/۰۵۵۱	(۰, ۱)	۸			
۰/۱۵۷۸	۰/۰۵۴۴	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۵۵۱۱	۰/۰۵۴۷	(۰, ۱)	۲	(۱۰, ۰/۳)		
۰/۵۲۳۷	۰/۰۵۱۴	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۱۷۳۲	۰/۰۵۲۶	(۰, ۱)	۸			
۰/۱۶۷۶	۰/۰۵۶۷	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۷۲۳۴	۰/۰۴۳۹	(۰, ۱)	۲	(۱, ۲۰)	۴۰	۵
۰/۸۸۹۱	۰/۰۴۷۳	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۳۲۸۷	۰/۰۴۶۸	(۰, ۱)	۸			
۰/۳۵۳۷	۰/۰۴۲۳	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۹۱۲۳	۰/۰۴۵۱	(۰, ۱)	۲	(۱۰, ۰/۳)		
۰/۹۴۲۳	۰/۰۳۷۸	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۳۷۸۰	۰/۰۳۵۹	(۰, ۱)	۸			
۰/۳۷۴۵	۰/۰۳۷۵	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۷۸۷۶	۰/۰۴۶۳	(۰, ۱)	۲	(۱, ۲۰)	۱۰۰	
۰/۹۲۳۱	۰/۰۵۴۲	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۳۵۵۳	۰/۰۵۳۶	(۰, ۱)	۸			
۰/۳۸۷۸	۰/۰۵۵۳	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۹۳۴۳	۰/۰۵۱۱	(۰, ۱)	۲	(۱۰, ۰/۳)		
۰/۹۵۲۳	۰/۰۵۳۲	(۰, ۰/۲۵)				
۰/۴۲۳۴	۰/۰۵۷۶	(۰, ۱)	۸			
۰/۴۱۷۱	۰/۰۵۱۲	(۰, ۰/۲۵)				

نسبت به تغییر در واریانس مشاهده‌ی اول، مقادیر ۱، ۳ و ۵ را برای اثر تصادفی b در نظر می‌گیریم. مجدداً برای هر ترکیب از پارامترها ۱۱۰۰ مجموعه داده از مدل زیر تولید می‌شود.

$$y_j = Z\beta + bd_۱ + \varepsilon_j,$$
$$X_j = Z + \triangle_j,$$

که d_1 بردار $n \times 1$ با مقدار یک در عضو اول و مقدار صفر در سایر عضوها است.
مانند آن‌چه در مورد خطای نوع اول انجام گرفت، آماره آزمون SC و توزیع تجربی متناظرش محاسبه می‌شود با این کار توان آزمون مطرح شده را می‌توان به‌دست آورد نتایج حاصل از جدول ۴ نشان می‌دهد که در حالت کلی با افزایش مقدار b توان آزمون SC افزایش می‌یابد.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا مدل انتقال واریانس برای مدل‌های خطی با خطا در اندازه‌گیری تحت محدودیت ریج معرفی و برآورد پارامترها در این مدل براساس روش ناکامورا محاسبه گردید. برآورد مجانبی بعضی از پارامترهای مدل انتقال واریانس را به‌دست آوردیم و نشان دادیم که اگر مقدار تغییر در واریانس به بی‌نهایت میل کند مقدار این برآوردها با مقادیر متناظرشان در مدل انتقال میانگین یکی خواهد شد. با استفاده از تابع امتیاز و ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده، آزمون امتیاز براساس تابع درستنمایی تصحیح شده‌ی ناکامورا معرفی می‌شود. از آنجا که مقدار پارامتر موجود در فرض صفر در ابتدای بازه‌ی قابل قبول پارامتر مورد بحث (میزان تغییر در واریانس) قرار داشت، با استفاده از یک روش بوت استرپ پارامتری، توزیع تجربی آماره آزمون امتیاز محاسبه گردید. با استفاده از یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی توانایی این آزمون را مورد بررسی قرار دادیم و نشان می‌دهیم که، اولاً خطای نوع اول تجربی آن به مقدار $\alpha = ۰/۰۵$ نزدیک است و ثانیاً با افزایش اثر تصادفی مربوط به تغییر در میزان واریانس توان این آزمون افزایش می‌یابد.

مراجع

[1] Carroll, R.J., Ruppert, D., Stefanski, L.A. and Crainiceanu, C.M. (2006). *Measurement error in nonlinear models, monographs on statistics and applied probability*, Chapman and Hall, London.

[2] Cheng, C. L. and Van Ness, J.W. (1999). Statistical regression with measurement error, Arnold, London.

[3] Cook, R.D. (1977). Detection of influential observations in linear regression. *Technometrics*, **19**, 15-18.

[4] Cook, R.D., Holschuh, N., Weisberg, S. (1982). A note on an alternative outlier model, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **44**, 370-376.

[5] Cook, R.D. and Weisberg, S. (1980). Characterization of an empirical influence function for detecting influential cases in regression. *Technometrics*, **22**, 495-508.

[6] Cook, R.D. and Weisberg, S. (1982). *Residuals and influence in regression.* Chapman and Hall, London.

[7] Fuller, W.A. (1987). *Measurement error models*, Wiley, New York.

[8] Gumedze, F.N., Welham, S.J., Gogel, B.J. and Thompson, R. (2010). A variance shift model for detection of outliers in the linear mixed model, *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 2128-2144.

[9] Hoerl, A. E. and Kennard, R. W. (1970). Ridge regression: biased estimation for non-orthogonal problems. *Technometrics.* **12**, 69-82.

[10] Liu, K. (1993). A new class of biased estimate in linear regression. *Communications in Statistics - Theory and Methods* **22**, 393–402.

[11] Nakamura, T. (1990). Corrected score function for errors in variables models: methodology and application to generalized linear models,*Biometrika*, **77**, 127-137.

[12] Stefanski, L.A. (1989). Unbiased estimation of a nonlinear function of a normal mean with application to measurement error models, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **18**, pp. 4335–4358.

[13] Stein, C. 1956. Inadmissibility of usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution. Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley University of California Press, 197–206.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC
Islamic World Science Citation Center
۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

ارزیابی عملکرد روش تدریس لایه به لایه در درس ریاضی برای دانش‌آموزان پایه هشتم شهرستان اهواز

سهیلا سیدبویر [۱] مریم کشول رجب‌زاده [۲]

[۱,۲] استادیار گروه ریاضی و آمار، واحد بین المللی اروند، دانشگاه آزاد اسلامی، آبادان، ایران

چکیده

آموزش و یادگیری ریاضیات یکی از چالش برانگیزترین مباحث در سراسر دنیا به شمار می‌رود. یک معیار برای سنجش عملکرد، به دست آوردن کارایی است و تحلیل پوششی داده ها (DEA) یک روش ناپارامتریک برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیری (DMUs) توسط ورودی‌های و خروجی‌های چندگانه است. از آنجایی که تدریس و فهم و درک دانش‌آموزان در درس ریاضی برای سیستم آموزشی کشور از اهمیت بالایی برخوردار است، روش تدریس لایه به لایه برای دانش‌آموزان دختر پایه هشتم یکی از مدارس شهرستان اهواز انجام شد و سپس با استفاده از نمرات حاصل از آزمون عملکرد آنها مورد بررسی قرار گرفت. نتایج آماری و همچنین نتایج حاصل از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها نشان داد که روش لایه به لایه نسبت به روش سنتی تاثیر مطلوب‌تری دارد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، روش تدریس لایه به لایه، کارایی

۱ مقدمه

رابطه بین روش تدریس معلمان و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان جنبه اساسی تحقیق و عمل آموزشی است. تحقیقات نشان داده است که اثربخشی روش‌های تدریس به‌طور مستقیم بر عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارد. رویکردهای تدریس مختلف، مانند یادگیری تجربی، یادگیری مشارکتی و آموزش متمایز برای درک تأثیر آنها بر نتایج دانش‌آموز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. یادگیری تجربی که شامل تجربیات عملی و کاربردهای دنیای واقعی است، باعث افزایش درک دانش‌آموزان و حفظ دانش آنها می‌شود. به‌طور مشابه یادگیری مشارکتی، که در آن دانش‌آموزان به‌صورت گروهی با هم کار می‌کنند، تفکر انتقادی و مهارت‌های حل مسئله را ارتقامی‌دهد. همچنین نشان داده شده است که آموزش‌های متمایز، متناسب با نیازهای فردی دانش‌آموزان و سبک‌های یادگیری تأثیر مثبتی بر پیشرفت تحصیلی دارد. علاوه بر این، استفاده از فناوری در تدریس مانند منابع چندرسانه‌ای تعاملی و پلتفرم‌های آنلاین،

[1] s.seyedboveir@iau.ir
[2] m.kashoul.r@iau.ir

تجربه یادگیری را متحول کرده است [۱]. روش تدریس لایه به لایه بیانگر آن است که مرور و تکرار چندین باره‌ی مطالب درسی و کشف نکات و مطالب جدید در هر لایه، قدرت تحلیل، یادگیری و ماندگاری مطالب در ذهن دانش‌آموزان را تقویت میکند. در این روش که حل مسائل و پرسش‌های ریاضی به‌صورت پلکانی و در قالب چندین لایه ارائه می‌شود، دانش‌آموزان برای رسیدن به پاسخ‌های صحیح در هر مرحله با چالشی جدید مواجه می‌شوند که این خود حس کنجکاوی آنها را برانگیخته و منجر به پرورش خلاقیت و تفکر آنان می‌شود [۲]. در این مقاله برای محاسبه کارایی دانش‌آموزان در درس ریاضی از روش تحلیل پوششی داده‌ها استفاده شده است روش تحلیل پوششی داده‌ها ابزاری است برای اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده همگن که دارای چندین ورودی و چندین خروجی هستند. تحقیقات زیادی در زمینه آموزش ریاضی و نحوه مطلوب کردن عملکرد دانش‌آموزان انجام شده است [۳، ۴]. اما این تحقیق سنجش عملکرد دانش‌آموزان با توجه به اهمیت چگونگی تدریس ریاضی توسط معلمین صورت گرفته است.

۲ ابعاد روش تدریس لایه به لایه

الگوی تدریس لایه به لایه به شیوه‌ای از آموزش گفته می‌شود که طی آن از تدریس مستقیم مطالب آموزشی اجتناب می‌شود. در این شیوه‌ی تدریس برخلاف شیوه‌های سنتی، دیگر خبری از دیکته جزء به جزء مطالب درسی نیست؛ بلکه معلم سعی دارد با راهنمایی و خلق موقعیت‌های مختلف دانش‌آموزان را وادار به درک مسئله از طریق مشاهده آزمایش و مطالعه کند؛ سپس دانش‌آموزان نیز این مراحل را تا جایی ادامه می‌دهند که به یک نتیجه و استنباط کلی برسند. بیشترین نقش در این الگوی تدریس را دانش‌آموزان ایفا می‌کنند؛ اما معلم نیز باید نقش خود را در هدایت این مسیر به سمت پاسخ سؤالات به درستی ایفا کند در ضمن الگوی تدریس لایه به لایه بسته به حجم درس و میزان سطح علمی دانش‌آموزان می‌تواند به‌صورت فردی یا گروهی در کلاس اجرا شود [۵]. سبک لایه به لایه به این‌صورت است که ابتدا مبانی و مفاهیم اصلی بیان می‌شود و سپس لایه به لایه موضوع موشکافانه بررسی می‌شود و دانش‌آموزان ذهن ساختارمندی نسبت به موضوع پیدا می‌کنند و لایه‌های بعدی به همین‌صورت بررسی می‌گردد.

۱.۲ تحقیقات و انجام مصاحبه

یکی از مهمترین و اساسی‌ترین موارد در روش تدریس لایه به لایه تحقیق و بحث درباره مسئله موردنظر است. در واقع طی این روش بستری فراهم می‌شود تا دانش‌آموزان مهارت‌های مهمی همچون شنیدن و پرسیدن را یاد گرفته و از آنها در جهت رسیدن به اطلاعات و پاسخ درست کمک بگیرند؛ همچنین با یادداشت برداری از فرایند پرسش و پاسخ می‌توان یک نقشه راه برای رسیدن به استنباط کلی تهیه کرد.

۲.۲ شبیه‌سازی آزمایش‌های عملی

از آنجایی که بسیاری از آزمایشگاه‌ها امکانات کافی برای پیشبرد مراحل آزمایش تمامی دانش‌آموزان را ندارند، امروزه می‌توان از تکنولوژی‌های مختلف و ابزار آنلاین در راستای تحقق این امر مهم استفاده کرد؛ به‌گونه‌ای که می‌توانید از طریق برنامه‌های شبیه‌ساز، شرایطی را فراهم سازید تا دانش‌آموزان آزمایش‌های مختلف را به‌صورت مجازی پیش برده و محدودیتی در اطلاعات مورد نیاز نداشته باشند.

۳.۲ تعریف پروژه‌های داده محور

یکی از مهمترین اهداف الگوی تدریس لایه به لایه ایجاد و پیگیری مسیر یادگیری توسط شخص دانش‌آموز است. به همین جهت بهترین روش برای تحقق این هدف می‌تواند تعریف پروژه های محور باشد که طی آنها اطلاعات خام و اولیه در اختیار دانش آموزان قرار گرفته و دستیابی به نتیجه‌ای مشخص نیز درخواست میشود. با این روش هر یک از دانش‌آموزان بسته به نوع تفکری که دارند ایده‌هایی منحصر به فرد برای حل مسئله ارائه خواهند داد.

۴.۲ بحث و تحقیق گروهی

برای پیاده‌سازی این روش از الگوی تدریس لایه به لایه، دانش‌آموزان را باید به چند گروه کوچک ۳ الی ۶ نفره تقسیم کرد تا هر یک از این گروه‌ها با استفاده از مهارت‌های ویژه‌ای که دارند، پاسخ نهایی مسئله را کشف کنند. طی این روش مهارت‌های گروهی دانش‌آموزان تقویت شده و به خوبی می‌آموزند چگونه فعالیت‌های خود را در راستای تحقق یک هدف کلان و گروهی هدایت و مدیریت کنند. همچنین تجربه ثابت کرده است با این روش می‌توان اعتمادبه‌نفس دانش‌آموزان را برای اظهار نظرات خود افزایش داد.

۳ بررسی اشتباهات

رسیدن به پاسخ اشتباه یا حتی نرسیدن به پاسخ به منزله شکست نیست؛ بلکه فرصت خوبی است برای بررسی اشتباهات و یافتن نقاط ضعف و قوت کار؛ بنابراین، اگر دانش‌آموزان در مسیر یافتن پاسخ با هر یک از این موارد مواجه شوند چیزی را از دست نداده و و با بررسی مراحلی که طی کردند نسبت به خطاهای خود و راه‌حل‌های جدید آگاه خواهند شد.

۴ طرح پرسش صحیح

قطعاً دانش‌آموزان طی مراحل مختلف با سؤال‌های جدیدی مواجه خواهند شد که پاسخ هر یک از آن‌ها می‌تواند آنها را به مرحله بعد منتقل کند؛ به همین جهت الزام است در این موقعیت پرسش‌هایی

مطرح شود که به همان اطلاعات مورد نیاز ختم شوند؛ بنابراین، معلم در این شرایط با دانش‌آموز همراه می‌شود تا بتواند بهترین سؤالات را برای دستیابی به راه‌حل‌های کوچک و بزرگ، طرح کند [۵].

۵ تحلیل پوششی داده‌ها

اندازه‌گیری کارایی به خاطر اهمیت آن در ارزیابی عملکرد یک شرکت یا سازمان همواره مورد توجه محققان بوده است. در سال ۱۹۵۷ اولین روش غیرپارامتری جهت تعیین کارایی را در حالت دو ورودی و یک خروجی ارائه نمود. روش فارل قابلیت بررسی حالت‌های چند ورودی و چند خروجی را ندارد اما این روش، اساس کارچارنز، کوپر و رودز شد. آنها کار اولیه فارل را به حالت چند ورودی و چند خروجی تعمیم دادند و روش آنها به روش CCR معروف شد. در این روش، کارایی همانند روش‌های پارامتری به‌صورت نسبت خروجی به ورودی تعریف شده و واحدی که این نسبت برای آن بیشترین باشد کارا نامیده می‌شود. با این تفاوت که به جای استفاده از نسبت یک خروجی به یک ورودی از نسبت مجموع موزون خروجی‌ها به مجموع موزون وزودی‌ها استفاده می‌شود. فرم مضربی BCC در ماهیت خروجی به‌صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=۱}^{m} v_i X_{i۰} \\
&S.t \ \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{r۰} = ۱ \\
&\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} - u_{۰} \leqslant ۰; \ \ j = ۱, ..., n. \\
&u_r, v_i \geqslant ۰ \ \ \forall\, i, r \qquad (۱)
\end{aligned}
$$

تفاوت این مدل با مدل CCR در وجود متغیر آزاد $u_{۰}$ است. علامت این متغیر در این مدل نوع بازده به مقیاس را مشخص می‌کند:

الف) اگر $u_{۰} < ۰$، نوع بازده به مقیاس از نوع کاهشی است.

ب) اگر $u_{۰} = ۰$، نوع بازده به مقیاس از نوع ثابت است.

ج) اگر $u_{۰} > ۰$، نوع بازده به مقیاس از نوع افزایشی است.

۶ جامعه آماری

جامعه آماری شامل کلیه دانش‌آموزان دختر پایه هشتم شهر اهواز که در سال تحصیلی ۱۴۰۲ - ۱۴۰۳ مشغول به تحصیل بودند، می‌باشد که از میان آنها ۱۲۰ نفر به روش روش نمونه‌گیری خوشه‌ای

جدول ۱: نتایج آمار توصیفی (نمرات دانش‌آموزان)

	بعد از آزمون		قبل از آزمون	
آمار توصیفی	گروه آزمایش	گروه کنترل	گروه آزمایش	گروه کنترل
میانگین	۱۷/۸۹۵	۱۵/۶۶۴	۱۲/۳۹۹	۱۳/۱۰۵
انحراف از معیار	۱/۹۴۲	۲/۴۹۸	۲/۰۰۲	۲/۳۶۲

جدول ۲: نتایج جدول کواریانس (مقایسه تدریس لایه به لایه با تدریس سنتی)

متغیر	منبع تغییرات	مجموع مجذورات	درجه آزادی	F	معناداری
عملکرد درس ریاضی	گروه	۱۵۳/۳۳۹	۱	۹/۶۷۷	۰.۰۰۹
	خطا	۳۱/۶۲۱	۶۳		
	کل	۲۱/۱۴۷	۶۶		

جدول ۳: (نتایج تحلیل پوششی داده‌ها)

	بعد از آزمون		قبل از آزمون	
	گروه آزمایش	گروه کنترل	گروه آزمایش	گروه کنترل
تعداد افراد کارا	۲۰	۱۲	۱۳	۹
تعداد افراد ناکارا	۱۰	۱۸	۱۷	۲۱

چندمرحله‌ای به دو گروه آزمایش (۳۰ نفر) و گروه کنترل (۳۰ نفر) تخصیص داده شدند. گروه آزمایش به مدت ۱۱ جلسه یک ساعته تحت آموزش با روش تدریس لایه به لایه قرار گرفتند.

۷ نتایج عددی

روش تدریس لایه به لایه برای جامعه آماری مورد نظر انجام شد و سپس با استفاده از نمرات حاصل از آزمون عملکرد آنها مورد بررسی قرار گرفت. ورودی‌ها به‌صورت میانگین ساعت کار گروهی حین تدریس، میانگین ساعت اختصاص داده شده دانش‌آموز جهت مطالعه، میزان ساعت اختصاص داده شده برای تدریس لایه به لایه و خروجی نیز میانگین نمره دانش‌آموز در آزمون کتبی در نظر گرفته شد، که نتایج با استفاده از روش تحلیل پوششی داده‌ها کارایی دانش‌آموزان را قبل و بعد از روش تدریس لایه به لایه بررسی می‌کنیم. همچنین از تحلیل کواریانس برای نشان دادن تأثیر روش تدریس لایه به لایه بر عملکرد درس ریاضی دانش‌آموزان استفاده شده است. مقدار آماره F ۹/۶۷۷ می‌تواند نشان دهد که تفاوت معنی‌داری میان عملکرد درس ریاضی در دو شیوه تدریس لایه به لایه و شیوه سنتی وجود دارد. پس از پذیرش تفاوت معناداری بین میانگین نمرات کسب شده دانش‌آموزان در دو شیوه تدریس لایه به لایه و شیوه سنتی، برای تحلیل اثرگذاری بیشتر کدام شیوه بر متغیر عملکرد درس ریاضی نیز می‌توان به میانگین‌های نمرات کسب شده در شیوه‌های تدریس استناد نمود، از این رو می‌توان ارزیابی نهایی را از آزمون‌های صورت گرفته چنین بیان نمود که براساس یافته‌های مندرج در بخش آمار توصیفی و

تحلیل داده‌های بخش استنباطی پژوهش در قالب آزمون تحلیل کوواریانس بین گروهی نمرات درس ریاضی مشخص شد که شیوه تدریس لایه به لایه توانسته است تاثیر بیشتری بر عملکرد درس ریاضی دانش‌آموزان پایه هشتم داشته باشد. همچنین از جدول ۵، با استفاده از روش تحلیل پوششی داده‌ها می‌توان نتیجه گرفت که تدریس لایه به لایه اثر مطلوب‌تری بر عملکرد دانش‌آموزان در درس ریاضی دارد.

مراجع

[۱] نوری حکمت، خ.۱۴۰۲ . تأثیر استفاده از روش‌های تعاملی در تدریس ریاضی بر عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان همایش بین‌المللی معلمان برتر و مدارس پیشرو در هزاره سوم، بوشهر، ایران جزایری، س. ۱۴۰۳ .

[۲] نور علیزاده، ر ؛ امیدیان، ف؛ امینیان، ف. ۱۴۰۳ . تأثیر روش تدریس وارونه بر عملکرد تحصیلی و انگیزش ریاضی درس ریاضیات دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی شهر دزفول، اولین کنفرانس بین‌المللی، سلامت بهداشت و آموزش، ساری، ایران.

[۳] بررسی اثربخشی تدریس پژوهش محور بر فرآیند یاددهی یادگیری ریاضی، همایش ملی نگرش‌های نوین در مسائل آموزش و پرورش، ایران.

[4] Haghi, E., Ostamy-Malkhalifeh, M, Behzadi, M.H, Shahvarani, A., 2020,Performance Evaluation of schools' math education from a cultural, analysis social and economic points of view by data envelopment modeling, Measurement and Control, 17.

[5] Jakaitiene, A., Zilinskas, A, Stumbriene, D.,2018. Analysis of education systems performance in European Countries by means of PCA-DEA, Informatics in Education, 2245-263.

[6] Vale, L., Barbosa, A., 2023. Active learning strategies for an effective mathematics teaching and learning, European Journal of science and Mathematics Education, 11 (3), 573-588.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

ارزیابی عملکرد تدریس ریاضیات واقع‌بینانه در درس ریاضی برای دانش‌آموزان پایه نهم شهرستان اهواز

سهیلا سیدبویر [۱] مریم کشول رجب‌زاده [۲]

[۱,۲] استادیار گروه ریاضی و آمار، واحد بین المللی اروند، دانشگاه آزاد اسلامی، آبادان، ایران

چکیده

درس ریاضی یکی از دروس اساسی و مهم در سیستم آموزشی است و اهمیت زیادی در زندگی روزمره و حرفه‌ای دارد. آموزش، توالی و سازمان‌بندی خاص خود را داراست و طبق یک دوره و برنامه معینی صورت می‌گیرد یادگیری ریاضی زمانی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان متوجه شوند مطالبی که با آن سر و کار دارند معنادار است یکی از روش‌های جدید در حوزه یاددهی و یادگیری، روش تدریس واقع‌بینانه درس ریاضی است که به یادگیری عمیق‌تر دانش‌آموزان کمک می‌کند. هدف از این مقاله بررسی تأثیر روش تدریس واقع‌بینانه روی عملکرد ریاضی دانش‌آموزان است که با استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها بررسی شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، ریاضی واقعیت‌مدار، کارایی

۱ مقدمه

در اواخر دهه ۷۰ میلادی، آموزش ریاضی واقع‌بینانه در پاسخ به نهضت ریاضی جدید در آمریکا و رویکرد آموزش ریاضی مکانیکی در هلند توسط فرودنتال و همکارانش معرفی شد. براساس این رویکرد برنامه‌های آموزشی باید فرصتی در اختیار دانش‌آموزان قرار دهد تا از طریق انجام دادن فعالیت‌های مناسب به بازآفرینی ریاضی بپردازند [۱].

در رویکرد ریاضیات واقعیت‌مدار اصطلاح واقعی بودن به این معنا که موضوعات لزوماً از دنیای واقعی باشند نیست و زمینه‌های طرح مسئله به‌طور ضروری به موقعیت‌های دنیای واقعی محدود و منحصر نمی‌شوند، بلکه واژه واقع‌گرایی بیشتر اشاره به آن دارد که موقعیت‌های طرح مسئله برای دانش‌آموزان معنادار باشد تا نسبت به آنها احساس مالکیت کنند [۲].

آموزش، توالی و سازمان‌بندی خاص خود را داراست و طبق یک دوره و برنامه معینی صورت می‌گیرد. یادگیری ریاضی زمانی اتفاق می‌افتد که کودکان متوجه می‌شوند مطالبی که با آن سر و کار دارند معنادار

[1] s.seyedboveir@iau.ir
[2] m.kashoul.r@iau.ir

است. لذا ریاضیات به‌خصوص برای کودکان نباید از بافت‌ها و زمینه‌های زندگی روزمره آنها جدا باشد. یکی از کشورهایی که ایده را مدت‌هاست به معرض اجرا قرار داد کشور هلند است و موفقیت‌های این کشور در سطح بین‌المللی نشان‌دهنده مؤثر بودن این رویکرد است. این آموزش همان آموزش ریاضی واقع‌بینانه می‌باشد و برای بررسی تاثیر این روش تدریس بر دانش‌آموزان از تکنیک ناپارامتری تحلیل پوششی داده‌ها استفاده شده است.
تحلیل پوششی داده‌ها داده‌ها ابزاری است برای اندازه‌گیری کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده همگن که دارای چندین ورودی و چندین خروجی هستند. تحقیقات زیادی در زمینه آموزش ریاضی و نحوه مطلوب کردن عملکرد دانش‌آموزان انجام شده است [۶، ۷] اما این تحقیق سنجش عملکرد دانش‌آموزان با توجه به اهمیت چگونگی تدریس ریاضی توسط معلمین صورت گرفته است.

۲ ریاضی واقعیت مدار

آموزش ریاضی واقعیت‌مدار از طریق معرفی دو نوع ریاضی ورزی معرفی شد: ریاضی ورزی افقی که به جنبه کاربردی ریاضی مربوط می‌شد و ریاضی ورزی عمودی که به جنبه‌ی رویه‌ای آن مربوط می‌شد. در ریاضی ورزی افقی یادگیرنده به انواعی از ابزار ریاضی دست می‌یابد که می‌توانند به او در سازمان‌دهی و حل مسئله در موقعیت زندگی واقعی، کمک کنند. اما ریاضی ورزی عمودی فرآیند سازمان‌دهی دوباره در خود نظام ریاضی است. ریاضی ورزی افقی، رفتن از دنیای زندگی واقعی به دنیای نمادها است؛ در حالی که ریاضی ورزی عمودی به معنای حرکت درون دنیای نمادها است. فرودنتال تأکید می‌کند که این دو شکل ریاضی ورزی دارای ارزش برابر هستند. به‌علاوه باید توجه داشت که ریاضی ورزی می‌تواند در سطوح مختلف درک و فهم اتفاق بیفتد. در واقع اهمیت آموزش ریاضی واقعیت‌مدار این است که از طریق آن، یادگیرندگان می‌توانند نسبت به دانش ریاضی خود احساس مالکیت یا تعلق کنند، یعنی ریاضی را از آن خود بدانند. باید توجه داشت که واژه واقعیت‌مدار به تمام موقعیت‌هایی اشاره دارد که در ذهن یادگیرنده واقعی است [۱]. فن دن هیوول-پنهاوزن به‌طور کلی این دو نوع ریاضی‌ورزی را به‌صورت زیر شرح می‌دهد ریاضی‌ورزی افقی، که از طریق آن دانش‌آموزان به انواعی از ابزار ریاضی دست می‌یابند که می‌توانند به آنان در سازمان‌دهی و حل مسأله در یک موقعیت واقعی زندگی کمک کند. فعالیت‌های زیر مثال‌هایی از ریاضی‌ورزی افقی هستند:

- تشخیص و توصیف ریاضیاتی خاص در یک زمینه کلی
- طراحی، صورت‌بندی و متصورسازی یک مسأله به‌صورت‌های مختلف
- کشف رابطه‌ها کشف نظم و تشخیص جنبه‌های یکسان در مسائل مختلف (ایزومورفیک)
- تبدیل یک مسأله دنیای واقعی به یک مسأله ریاضی آشنا

ریاضی‌ورزی عمودی، فرآیند نظام‌دهی دوباره در خود نظام ریاضی است. فعالیت‌های زیر نمونه‌هایی از ریاضی‌ورزی عمودی هستند:

- نمایش یک رابطه در قالب یک فرمول
- قواعد اثبات کردن
- اصلاح و تنظیم مدل‌ها
- استفاده از مدل‌های مختلف
- ترکیب و ادغام مدل‌ها
- صورت‌بندی مدل‌های ریاضی و تعمیم [۳].

با توجه به مقاله دکینسون و هاگ [۵] آموزش ریاضی واقعیت‌مدار صرفاً به معنای آموزش ریاضی دنیای واقعی نیست بلکه آنها معتقدند که دلیل این برداشت اشتباه را واژه realiseren zich دانند که ترجمه انگلیسی آن تصور کردن است. آنان توضیح می‌دهند که علت آن که اصلاحات آموزش ریاضی هلند، واقعیت‌مدار خوانده شده ارتباط صرف آن با دنیای واقعی نبوده بلکه به دلیل تأکیدی است که این رویکرد بر ارائه مسائلی دارد که برای دانش‌آموزان قابل تصور باشد [۳].

۳ تحلیل پوششی داده‌ها

کارایی یک واحد مورد بررسی برابر با نسبت خروجی به ورودی است. تحلیل پوششی داده‌ها یک روش ناپارامتریک برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) است. این روش به حالت ابتکاری واحدهایی با چند ورودی و چند خروجی را به یک ورودی و یک خروجی تبدیل کند. یکی از ویژگی‌های تحلیل پوششی داده‌ها ساختار بازده به مقیاس آن است. بازده به مقیاس می‌تواند ثابت یا متغیر باشد بازده به مقیاس ثابت به این معنا است که افزایش در مقدار ورودی به افزایش در خروجی به همان نسبت منجر می‌شود. مدل‌های بازده به مقیاس ثابت (CCR) زمانی مناسب است که همه واحدها در مقیاس بهینه عمل کنند. بازده به مقیاس متغیر به این معنی است که افزایش در ورودی‌ها به افزایش نامتناسب در خروجی‌ها منجر می‌شود. در ادامه برای به‌دست آوردن کارایی مدل BCC با ماهیت خروجی می‌باشد که به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=۱}^{m} v_i X_i. \\
&S.t \quad \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{r.} = ۱ \\
&\qquad \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} - u_{.} \leqslant ۰; \quad j = ۱, ..., n. \\
&\qquad u_r, v_i \geqslant ۰ \quad \forall\, i, r
\end{aligned}
$$

جدول ۱: نتایج آماری (مقایسه تدریس واقعیت‌مدار با تدریس سنتی)

	بعد از آزمون		قبل از آزمون	
آمار توصیفی	گروه آزمایش	گروه کنترل	گروه آزمایش	گروه کنترل
میانگین	۱۷/۲۰۶	۱۴/۲۴۵	۱۴/۱۰۷	۱۳/۲۴۹
انحراف از معیار	/۹۷۹	۱/۰۱۴	۱/۴۰۵	/۷۵۸

تفاوت این مدل با مدل CCR در وجود متغیر آزاد $u_.$ است. علامت این متغیر در این مدل نوع بازده به مقیاس را مشخص می‌کند.

الف) اگر $u_. < 0$، نوع بازده به مقیاس از نوع کاهشی است.

ب) اگر $u_. = 0$، نوع بازده به مقیاس از نوع ثابت است.

ج) اگر $u_. > 0$، نوع بازده به مقیاس از نوع افزایشی است.

۴ جامعه آماری

جامعه آماری این پژوهش عبارت است از کلیه‌ی دانش‌آموزان پایه نهم واقع در ناحیه ۳ که در سال ۰۳-۱۴۰۲ مشغول به تحصیل می‌باشند. قابل ذکر است که تعداد این دانش‌آموزان برابر با ۱۴۰ نفر می‌باشد. برای نمونه‌گیری از روش نمونه‌گیری خوشه‌ای چند مرحله‌ای استفاده شد، به این‌صورت که به‌طور تصادفی از میان کلاس‌ها ۲ کلاس بطور تصادفی انتخاب شدند، کلاس اول با تعداد ۳۵ نفر به‌عنوان گروه کنترل و کلاس دوم نیز با تعداد ۳۵ نفر به‌عنوان گروه آزمایش انتخاب شدند.

۵ نتایج عددی

تدریس واقع بینانه درس ریاضی در ۱۰ جلسه درسی ریاضی در گروه آزمایش انجام شد و در گروه کنترل بر اساس روال عادی به همان میزان ساعت و در مباحث یکسان از کتاب ریاضی پایه نهم تدریس انجام گرفت. این مباحث شامل سه فصل «فصل دوم مجموعه‌ها، عددهای حقیقی، فصل سوم استدلال و اثبات در هندسه و فصل چهارم توان و ریشه» می‌باشد.. برای بررسی عملکرد درس ریاضی از آزمونی به‌صورت مسئله‌های ریاضی در سطوح مختلف حیطه شناختی از یک آزمون محقق ساخته ۱۸ سوالی با بارم ۲۰ نمره‌ای یکسان در گروه‌های آزمایش و کنترل و در قالب دو آزمون در پیش آزمون و پس آزمون که به تأیید متخصصان این حوزه رسید، استفاده شد. در رابطه با متغیر عملکرد ریاضی می‌توان گفت میانگین نمره پیش آزمون عملکرد ریاضی در گروه آزمایش برابر با ۱۴/۱۰۷ و نمره پس آزمون برابر با ۱۷/۲۰۶ می‌باشد بنابراین افزایش میانگین نمرات عملکرد ریاضی دانش‌آموزان گروه آزمایش در مرحله پس آزمون مناسب ارزیابی می‌شود، در مقابل میانگین نمره پیش آزمون عملکرد ریاضی در گروه

جدول ۲: (نتایج تحلیل پوششی داده‌ها)

	بعد از آزمون		قبل از آزمون	
	گروه آزمایش	گروه کنترل	گروه آزمایش	گروه کنترل
تعداد افراد کارا	۲۱	۱۳	۱۱	۸
تعداد افراد ناکارا	۱۴	۲۲	۲۴	۲۷

کنترل برابر با ۱۳/۲۴۹ و نمره پس‌آزمون برابر با ۱۴/۲۴۵ می‌باشد. بنابراین میانگین نمرات عملکرد ریاضی دانش‌آموزان گروه کنترل در مرحله پس آزمون نیز افزایش یافته است. اما در مقایسه با گروه آزمایش در سطح پائین‌تری قرار دارد. لذا می‌توان گفت میانگین نمرات عملکرد ریاضی دانش‌آموزان در مراحل پس آزمون در گروه‌های آزمایش و کنترل در هر دو روش تدریس سنتی و تدریس ریاضی واقع‌بینانه افزایش پیدا کرده است، اما همانطور که ملاحظه می‌شود این تفاوت میانگین در مورد روش تدریس ریاضی واقع‌بینانه نسبت به روش تدریس سنتی بیشتر است.

روش تدریس ریاضیات واقع‌بینانه برای جامعه آماری مورد نظر انجام شد و سپس با استفاده از نمرات حاصل از آزمون عملکرد آنها مورد بررسی قرار گرفت. ورودی‌ها به‌صورت میانگین ساعت کار گروهی حین تدریس، میانگین ساعت اختصاص داده شده دانش‌آموز جهت مطالعه، میزان ساعت اختصاص داده شده برای تدریس ریاضیات واقعیت‌مدار و خروجی نیز میانگین نمره دانش‌آموز در آزمون کتبی در نظر گرفته شد که نتایج با استفاده از مدل BCC خروجی محور کارایی دانش‌آموزان را قبل و بعد از روش تدریس ریاضی واقع‌بینانه بررسی می‌کنیم. با نتایج حاصل از جدول ۴ می‌توان گفت که آموزش ریاضی واقع‌بینانه باعث تسهیل یادگیری عمیق از طریق فعالیت‌های یادگیری در کلاس درس و افزایش خروجی شده است. در کلاس تحت آموزش ریاضی واقع‌بینانه دانش‌آموزان مهارت‌هایی همچون پرسش‌های عمیق و گسترده، ادراک مفهومی پرداختن به ابعاد واقعی مفاهیم ریاضی حمایت و تشویق از سوی معلم را تجربه می‌کنند، که این مهارت‌ها باعث توانمندسازی دانش‌آموزان در تعیین هدف و حل مسئله می‌شود. از سویی دیگر در این نوع از یادگیری می‌توان زمان بیشتری را در کلاس برای مهارت‌های تفکر صرف نمود . افزایش اطلاعات معلمان در زمینه تدریس واقع‌بینانه ریاضی، برگزاری دوره‌های ضمن خدمت برای معلمان و فراهم کردن اطلاعات تدریس واقع‌بینانه ریاضی از پیشنهادات کاربردی این پژوهش است.

مراجع

[۱] کریمی فردین‌پور، ی. ۱۳۹۵. تحلیل محتوای برنامه درسی معادلات دیفرانسیل، فرهنگ اندیشه ریاضی، ۵۸، ۸۹-۱۰۲.

[۲] عرب ع؛ محمدیان، م؛ رستگار، م؛ پیراینده، پ ۱۳۹۷. بررسی رابطه اضطراب بر موفقیت تحصیلی دانش‌آموزان دختر مقطع متوسطه دوره اول ششمین کنفرانس ملی توسعه پایدار در علوم

تربیتی و روانشناسی مطالعات اجتماعی و فرهنگی، تهران مرکز راهکارهای دستیابی به توسعه پایدار ـ موسسه آموزش عالی مهر اروند.

[۳] غلام آزاد، س. ۱۳۹۳. رد پای آموزش ریاضی واقعیت‌مدار در ریاضیات مدرسه‌ای در ایران، فصلنامه نظریه و عمل در برنامه درسی،۳، ۴۷-۷۰.

[۴] توانایی، ن. چک نژاد، ع. ۱۴۰۲، ریاضیات واقعیت‌مدار تاریخچه مختصری از فرآیند بلندمدت جنبش اصلاحات فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۷۲، ۲۱۳-۲۲۴

[5] Dickinson, P. & Hough, S., 2012, Using Realistic Mathematics education in UK classrooms. A booklet designed for teachers and students, Available on-line at: http://www.mei.org.uk/files/pdf/RME Impact booklet.pdf.

[6] Haghi, E.,Ostamy-Malkhalifeh, M, Behzadi, M.H, Shahvarani, A., 2020, Performance Evaluation of schools' math education from a cultural, social and economic points of view by data envelopment analysis modeling, Measurement and Control, 17.

[7] Jakaitiene, A.,Zilinskas, A, Stumbriene, D.,2018. Analysis of education systems performance in European Countries by means of PCA-DEA, Informatics in Education, 2245-263.

[8] Nana,S.,2018,. Mathematics Learning Devices Development based on Probability. AL-TA'LIM Realistic Mathematics Education JOURNAL, 25 (1), 87-96

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

جواب‌های غیرمغلوب ضعیف یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی

مریم مکروم [۱] منصور سراج [۲]

[۱,۲] دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی

چکیده

در این مقاله، می‌خواهیم یک روش جدید برای یافتن جواب‌های غیرمغلوب ضعیف فازی در مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی ارائه دهیم، که این مسائل شامل محدودیت‌های نامساوی با اعداد فازی ذوزنقه‌ای و نه لزوماً متقارن می‌باشند. در این روش، مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی را با استفاده از روش چارنز-کوپر، به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی و سپس آن را به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه معادل، با اعداد قاطع تبدیل می‌کنیم. این روش به توابع رتبه‌بندی نیازی ندارد. یک رابطه بین مجموعه جواب‌های غیرمغلوب ضعیف مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی و مجموعه جواب‌های کارای ضعیف مسأله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه اثبات می‌شود. سپس یک الگوریتم برای تولید جواب‌های غیرمغلوب ضعیف مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی از طریق حل یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه کمکی، ارائه می‌دهیم. برای تشریح روش پیشنهادی، یک مثال عددی حل خواهد شد و نتایج مورد بحث قرار خواهد گرفت.

کلمات کلیدی: مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی، اعداد فازی ذوزنقه‌ای، مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی

۱ مقدمه

برنامه‌ریزی ریاضی به‌طور گسترده‌ای در تصمیم‌گیری‌های مدیریتی استفاده می‌شود و می‌تواند در حوزه‌های مختلف زندگی واقعی نیز اعمال شود. نظریه مجموعه‌های فازی برای مقابله با عدم قطعیت‌ها در موقعیت‌های تصمیم‌گیری، بسیار حائز اهمیت است. مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی (LFP) یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین مفاهیم در زمینه تحقیق در عملیات است. برنامه‌ریزی کسری خطی در حوزه‌های مختلف زندگی واقعی مانند برنامه‌ریزی تولید و بخش مالی کاربرد دارد. در مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی (FFLFP)، تمامی پارامترها و متغیرها با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند. برای حل این مسائل، مدل‌های ریاضی و تکنیک‌های عددی مورد نیاز است و توسعه‌ی آن‌ها نیز از اهمیت بالایی برخوردار است. این حوزه از تحقیقات در سال‌های اخیر اهمیت پیدا کرده است. روش‌های زیادی برای حل مسائل FFLFP با متغیرهای فازی نامنفی وجود دارد.

[1] M.makroum76@gmail.com
[2] msaraj@scu.ac.ir

بلمن و زاده مفهوم تصمیم‌گیری در محیط فازی را معرفی کردند [۱۶]. باکلی و فیورینگ مسأله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی (FFLP) را یک برنامه خطی با ضرایب و متغیرهای فازی معرفی کردند [۱۱]. لطفی و همکاران، روش جدیدی را برای یافتن جواب بهینه فازی، در مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی (FFLP)؛ با محدودیت‌های به‌صورت تساوی و اعداد فازی متقارن پیشنهاد کردند [۷]. خان و همکاران روی مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی تحقیق کردند و همچنین مقادیر تابع هدف را از طریق توابع رتبه‌بندی مقایسه کردند [۴، ۹، ۱۰].

عزتی و همکاران یک روش جدید براساس مسأله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه با محدودیت‌های تساوی پیشنهاد کردند. بدین منظور، آن‌ها یک رابطه‌ی جدید بین دو عدد فازی مثلثی ارائه کردند تا جواب‌های غیرمغلوب ضعیف مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی را بدست آورند [۱۷]. گانسان و ویرامانی مسأله برنامه‌ریزی خطی فازی با اعداد فازی ذوزنقه‌ای را بدون تبدیل آن‌ها به مسأله برنامه‌ریزی خطی قاطع معرفی کردند [۱۲]. ابراهیم‌نژاد و توانا شکل جدیدی از مسأله برنامه‌ریزی خطی را پیشنهاد کردند که در آن ضرایب تابع هدف و مقادیر سمت راست با اعداد فازی ذوزنقه‌ای و سایر قسمت‌ها با اعداد حقیقی نشان داده می‌شوند. آن‌ها مسأله برنامه‌ریزی خطی فازی را به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی قاطع تبدیل کردند و با روش سیمپلکس حل کردند [۲]. جیمنز یک روش جدید برای یافتن جواب‌های غیرمغلوب ضعیف مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی از طریق تبدیل آن‌ها به مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه معادل ارائه داد که این مسائل شامل محدودیت‌های نامساوی با اعداد فازی مثلثی و نه لزوماً متقارن می‌باشند. این روش به توابع رتبه‌بندی نیازی ندارد [۱۳]. ساکاوا و یانو روشی را برای حل مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه (MOLFP) تحت شرایط فازی ارائه کردند [۱۵]. ویرامانی و سوماتی روش جدیدی را برای حل مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی ایجاد کردند و این مسأله را به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه تبدیل کردند [۶].

پاپ و مینسن روشی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی که در آن‌ها تمام پارامترها و متغیرها اعداد فازی مثلثی هستند، پیشنهاد کردند [۵]. داس و همکاران به اصلاح روش پاپ و مینسن برای حل مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی پرداختند. بدین منظور، یک روش جدید از ترکیب روش چارنز- کوپر و مسأله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بدست آوردند [۱۸].

در این مقاله، ما به مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی و یکی از روش‌های حل آن‌ها به کمک مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه می‌پردازیم. این مقاله، یک روش جدید از ترکیب روش چارنز- کوپر و الگوریتم جیمنز ارائه می‌دهد.

چگونگی تخصیص مباحث این مقاله در بخش‌های دو تا شش به شرح زیر است:

در بخش ۲، نمادها، ویژگی‌ها و ترتیب‌های جزئی در مورد اعداد فازی به‌ویژه اعداد فازی ذوزنقه‌ای را ارائه می‌دهیم. در بخش ۳، ابتدا مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی را تعریف کرده، سپس یک رابطه بین مجموعه جواب‌های غیرمغلوب ضعیف مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی و مجموعه جواب‌های غیرمغلوب ضعیف مسأله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی و مجموعه جواب‌های

کارای ضعیف مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه درنظر گرفته و در ادامه، روند چگونگی آن را اثبات می‌کنیم. در بخش ۴، یک الگوریتم برای تولید جواب‌های غیرمغلوب ضعیف مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی از طریق حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه کمکی، ارائه می‌دهیم. در بخش ۵، برای تشریح روش پیشنهادی، یک مثال عددی حل می‌کنیم. در بخش ۶ نیز نتایج بدست آمده را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲ نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

اعداد فازی شکل تعمیم‌یافته اعداد قاطع هستند که به‌جای اشاره به یک ارزش خاص، شامل بازه‌ای از ارزش‌های ممکن هستند. هر یک از ارزش‌های ممکن وزنی بین صفر تا ۱ دارد و به این وزن درجه‌ی عضویت گفته می‌شود. اعداد قاطع دارای ارزش دقیق و مشخصی هستند اما اعداد فازی، بازه‌ای از اعداد را شامل می‌شوند. نکته‌ی بسیار مهم این است که همه‌ی اعداد موجود در این بازه درجه‌ی شمول و عضویت یکسانی ندارند.
در مجموعه‌های قاطع اگر عددی عضو مجموعه باشد درجه‌ی عضویت آن برابر ۱ و اگر عضو مجموعه نباشد درجه‌ی عضویت آن برابر صفر است درصورتی‌که در مجموعه‌های فازی، هر یک از اعضا درجه‌ی عضویتی در بازه‌ی صفر تا یک دارند.

تعریف ۱.۲. به عدد فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$، عدد فازی ذوزنقه‌ای گفته می‌شود، اگر تابع عضویت آن به‌صورت زیر تعریف شود:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leqslant a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & , \quad a_1 \leqslant x \leqslant a_2 \\ 1 & , \quad a_2 \leqslant x \leqslant a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & , \quad a_3 \leqslant x \leqslant a_4 \\ 0 & , \quad a_4 \leqslant x \end{cases}$$

به‌طوری‌که a_1 و a_2 و a_3 و a_4 اعداد حقیقی هستند و رابطه‌ی $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$ بین آن‌ها برقرار است.

تعریف ۲.۲. (αـبرش عدد فازی ذوزنقه‌ای): اگر αـبرش عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ را که یک بازه‌ی قاطع می‌باشد بدست آوریم، آن‌گاه می‌توان A_α را به ازای $\alpha \in [0, 1]$ به‌صورت زیر نشان داد:

$$A_\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha \ , \ a_4 - (a_4 - a_3)\alpha]$$

فرمولی که برای αـبرش عدد فازی ذوزنقه‌ای بیان شد، یک عدد فازی ذوزنقه‌ای منحصربه‌فرد را مشخص می‌کند.

تعریف ۳.۲. (عملگرهای حساب اعداد فازی ذوزنقه‌ای): فرض کنید که $\tilde{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ و $\tilde{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای و $\lambda \in \mathbb{R}$ یک اسکالر هستند. اکنون برخی از عملیات حسابی روی این اعداد را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

۱.
$$\lambda\tilde{u} = \begin{cases} (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \lambda u_4) \;\; ; \;\; \lambda \geqslant 0 \\ (\lambda u_4, \lambda u_3, \lambda u_2, \lambda u_1) \;\; ; \;\; \lambda < 0 \end{cases}$$

۲.
$$\tilde{u} \oplus \tilde{v} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \oplus (v_1, v_2, v_3, v_4) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4) \quad (1)$$

۳. $\tilde{u} \ominus \tilde{v} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \ominus (v_1, v_2, v_3, v_4) = (u_1 - v_4, u_2 - v_3, u_3 - v_2, u_4 - v_1)$
حاصل‌ضرب و تقسیم دو عدد فازی ذوزنقه‌ای لزوماً یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نمی‌باشد اما در اغلب حالات می‌توان حاصل‌ضرب و تقسیم آن‌ها را به‌صورت تقریبی شبیه حالت ذوزنقه‌ای در نظر گرفت.

۴. اگر $\tilde{u}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نامنفی باشد، بنابراین:

$$\tilde{u} \odot \tilde{v} = \begin{cases} (u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4) \;\; ; \;\; v_1 \geqslant 0 \\ (u_4v_1, u_2v_2, u_3v_3, u_4v_4) \;\; ; \;\; v_2 \geqslant 0 \quad v_1 < 0 \\ (u_4v_1, u_3v_2, u_2v_3, u_4v_4) \;\; ; \;\; v_4 \geqslant 0 \;,\; v_1 < 0 \\ (u_4v_1, u_3v_2, u_2v_3, u_1v_4) \;\; ; \;\; v_4 < 0 \end{cases} \quad (2)$$

۵. $\tilde{u}/\tilde{v} \simeq \begin{cases} \left(\frac{u_1}{v_4}, \frac{u_2}{v_3}, \frac{u_3}{v_2}, \frac{u_4}{v_1}\right) ; \text{ اگر هر دو عدد فازی مثبت و یا هر دو عدد فازی منفی باشند.} \\ \left(\frac{u_4}{v_4}, \frac{u_3}{v_3}, \frac{u_2}{v_2}, \frac{u_1}{v_1}\right) ; \text{ اگر یکی از اعداد فازی منفی و دیگری مثبت باشد.} \end{cases} \quad ; \; 0 \notin \tilde{v} \;\; ;$

۳ مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی (FFLFP)

حالت کلی یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی به شکل زیر می‌باشد:

$$\text{FFLFP} : \min / \max \tilde{z} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{x}_j + \tilde{q}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \tilde{x}_j + \tilde{r}} = \frac{F(\tilde{x})}{G(\tilde{x})}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \tilde{x}_j \begin{pmatrix} \preceq \\ = \\ \succeq \end{pmatrix} \tilde{b}_i \quad , \quad i = 1, ..., m$$

$$\tilde{x}_j \succeq \tilde{0} \qquad\qquad , \; j = 1, ..., n$$

$\tilde{z}$ تابع هدف فازی مسأله، $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_n)$ و $\tilde{d} = (\tilde{d}_1, ..., \tilde{d}_n)$ بردارهایی شامل ضرایب متغیرهای تصمیم درتابع هدف فازی، $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)$ برداری شامل متغیرهای تصمیم فازی و $\tilde{a}_{ij}$ نیز مؤلفه‌های ماتریس ضرایب $\tilde{A}$ و $\tilde{b}_i$ نیز ضرایب سمت راست محدودیت‌های تصمیم هستند که در مجموع $\tilde{a}_{ij}$ و $\tilde{b}_i$ را ضرایب تکنولوژیکی می‌نامند. همچنین $\tilde{q}, \tilde{r} \in F(\mathbb{R})$ هستند.
به‌ازای برخی از مقادیر $\tilde{x}$، $G(\tilde{x})$ که همان مخرج تابع هدف کسری می‌باشد، ممکن است برابر با عدد فازی $\tilde{0}$ باشد. برای اجتناب از چنین مواردی، باید جواب‌های شدنی از مسأله را در نظر بگیریم که $G(\tilde{x}) \succ \tilde{0}$ و یا $G(\tilde{x}) \prec \tilde{0}$ را به‌دست می‌آورند.
در این تحقیق، فرض بر این است که جواب‌های شدنی از مسأله در نظر گرفته شوند که شرط $G(\tilde{x}) \succ \tilde{0}$ برقرار باشد.
ما با مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی (FFLFP) بدون استفاده از هیچ نوع تابع رتبه‌بندی سروکار داریم و به‌همین منظور، جواب غیرمغلوب ضعیف را برای FFLFP تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. فرض کنید $\overline{\tilde{x}}$ یک جواب شدنی برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی باشد. در حالت مینیمم‌سازی، $\overline{\tilde{x}}$ جواب غیرمغلوب ضعیف مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی نامیده می‌شود، اگر هیچ جواب شدنی مانند $\tilde{x}$ برای مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی وجود نداشته باشد به‌طوری‌که:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{x}_j + \tilde{q}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \tilde{x}_j + \tilde{r}} \prec \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \overline{\tilde{x}}_j + \tilde{q}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \overline{\tilde{x}}_j + \tilde{r}}$$

و در حالت ماکزیمم‌سازی، $\overline{\tilde{x}}$ جواب غیرمغلوب ضعیف مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی نامیده می‌شود، اگر هیچ جواب شدنی مانند $\tilde{x}$ برای مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی وجود نداشته باشد به‌طوری‌که:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{x}_j + \tilde{q}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \tilde{x}_j + \tilde{r}} \succ \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \overline{\tilde{x}}_j + \tilde{q}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \overline{\tilde{x}}_j + \tilde{r}}$$

حال، با قضیه‌ای که در ادامه بیان می‌کنیم، نشان می‌دهیم که مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی را می‌توان به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی تبدیل کرد.

قضیه ۱.۳. مسأله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\min / \max \quad & \tilde{z}^* = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{y}_j + \tilde{q}\tilde{t} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \tilde{y}_j - \tilde{b}_i \tilde{t} = \tilde{0} \quad , \quad i = 1, ..., m \\
& \sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \tilde{y}_j + \tilde{r}\tilde{t} = \tilde{1} \\
& \tilde{t} \succ \tilde{0} \quad , \quad \tilde{y}_j \succeq \tilde{0} \qquad , \quad j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

فرض کنید هیچ نقطه‌ای مانند $(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{0})$ با $\tilde{y}_j \succeq \tilde{0}$، نقطه‌ی شدنی برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی نباشد. آن‌گاه ضمن رعایت شرط $G(\tilde{x}) \succ \tilde{0}$ مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی با مسأله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی بالا معادل است [۱۸].

اثبات. برای مشاهده‌ی اثبات قضیه مرجع [۱۸] را ببینید. □

در روند اثبات قضیه فوق آورده شده است که، براساس تبدیل چارنز–کوپر در [۱]، یک مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی، معادل با یک مسأله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی به شکل زیر

می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{FFLP}: \ \min / \max \quad & \tilde{z}^* = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{y}_j + \tilde{q}\tilde{t} \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \tilde{y}_j \preceq \tilde{b}_i \tilde{t} \quad , \quad i = 1, ..., m \\ & \sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \tilde{y}_j + \tilde{r}\tilde{t} \preceq \tilde{1} \\ & \tilde{t} \succ \tilde{0} \quad \tilde{y}_j \succeq \tilde{0} \quad , \quad j = 1, ..., n \end{aligned}$$

تعریف ۲.۳. فرض کنید $(\overline{\tilde{y}}_1, ..., \overline{\tilde{y}}_n, \overline{\tilde{t}})$ یک جواب شدنی برای مسأله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی باشد. در حالت مینیمم‌سازی، $(\overline{\tilde{y}}_1, ..., \overline{\tilde{y}}_n, \overline{\tilde{t}})$ جواب غیرمغلوب ضعیف مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی نامیده می‌شود، اگر هیچ جواب شدنی مانند $(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t})$ برای مسأله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{y}_j + \tilde{q}\tilde{t} \prec \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \overline{\tilde{y}}_j + \tilde{q}\overline{\tilde{t}}$. در حالت ماکزیمم‌سازی، $(\overline{\tilde{y}}_1, ..., \overline{\tilde{y}}_n, \overline{\tilde{t}})$ جواب غیرمغلوب ضعیف مسأله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی نامیده می‌شود، اگر هیچ جواب شدنی مانند $(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t})$ برای مسأله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{y}_j + \tilde{q}\tilde{t} \succ \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \overline{\tilde{y}}_j + \tilde{q}\overline{\tilde{t}}$[۱۳].

قضیه ۲.۳. $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)$ یک جواب غیرمغلوب ضعیف مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی است اگروتنهااگر $(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t})$ به‌ازای $\tilde{t} = \dfrac{\tilde{1}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \tilde{x}_j + \tilde{r}}$ و $\tilde{y}_j = \tilde{t}\tilde{x}_j$ و $j = 1, ..., n$، جواب غیرمغلوب ضعیفی برای مسأله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی باشد.

اثبات. ابتدا حالت مینیمم‌سازی را برای مسائل FFLFP و FFLP در نظر می‌گیریم. در گام اولیه‌ی اثبات قضیه، باید ثابت کنیم که $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)$ یک جواب شدنی برای مسأله‌ی FFLFP است، اگروتنهااگر $(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t})$ یک جواب شدنی برای مسأله‌ی $FFLP$ باشد که اثبات آن در قضیه‌ی ۱.۳ انجام شده است و برای مشاهده‌ی آن مرجع [۱۸] را ببینید.
($\Longleftarrow$) اکنون، فرض می‌کنیم که $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)$ یک جواب غیرمغلوب ضعیف برای FFLFP است، و در ادامه، به کمک برهان خلف اثبات می‌کنیم که جواب شدنی مانند $(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t})$ وجود دارد که یک جواب غیر مغلوب ضعیف برای FFLP است.
فرض خلف: فرض می‌کنیم که $(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t})$ جواب غیرمغلوب ضعیف مسأله‌ی FFLP نمی‌باشد،

بنابراین یک جواب شدنی مانند $(\bar{\tilde{y}}_1, ..., \bar{\tilde{y}}_n, \bar{\tilde{t}})$ برای مسأله‌ی FFLP وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \bar{\tilde{y}}_j + \tilde{q}\bar{\tilde{t}} \prec \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{y}_j + \tilde{q}\tilde{t} \qquad (۳)$$

شرط (۳) معادل با شرط زیر است:

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j (\bar{\tilde{t}}\bar{\tilde{x}}_j) + \tilde{q}\bar{\tilde{t}} \prec \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j (\tilde{t}\tilde{x}_j) + \tilde{q}\tilde{t} \Longrightarrow \\
\bar{\tilde{t}} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \bar{\tilde{x}}_j + \tilde{q} \right) \prec \tilde{t} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{x}_j + \tilde{q} \right) \Longrightarrow \\
\frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \bar{\tilde{x}}_j + \tilde{q}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \bar{\tilde{x}}_j + \tilde{r}} \prec \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{x}_j + \tilde{q}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \tilde{x}_j + \tilde{r}}
\end{gathered} \qquad (۴)$$

از آنجایی که $(\bar{\tilde{y}}_1, ..., \bar{\tilde{y}}_n, \bar{\tilde{t}})$ برای FFLP یک جواب شدنی است، پس $\bar{\tilde{x}} = (\bar{\tilde{x}}_1, ..., \bar{\tilde{x}}_n)$ به‌ازای $\bar{\tilde{t}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \bar{\tilde{x}}_j + \tilde{r}}$ و $\bar{\tilde{y}}_j = \bar{\tilde{t}}\bar{\tilde{x}}_j$ و $j = 1, ..., n$ برای FFLFP جواب شدنی است. با توجه به شرط (۴)، که همان شرط غیرمغلوب ضعیف بودن برای FFLFP می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که $\tilde{x}$ یک جواب غیرمغلوب ضعیف برای FFLFP نیست، که با فرض مسأله در تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است یعنی نتیجه می‌گیریم که اگر $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)$ جواب غیرمغلوب ضعیفی برای FFLFP باشد، آن‌گاه $(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t})$ یک جواب غیرمغلوب ضعیف برای FFLP خواهد بود.

$(\Longrightarrow)$ به‌عکس و به روشی مشابه قبل، فرض می‌کنیم که $(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t})$ یک جواب غیرمغلوب ضعیف برای FFLP است، و در ادامه، به کمک برهان خلف اثبات می‌کنیم که $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)$ جواب غیرمغلوب ضعیفی برای FFLFP است.

فرض خلف: فرض می‌کنیم که $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)$ جواب غیرمغلوب ضعیفی برای مسأله‌ی FFLFP نیست، بنابراین یک جواب شدنی مانند $\bar{\tilde{x}} = (\bar{\tilde{x}}_1, ..., \bar{\tilde{x}}_n)$ برای مسأله‌ی FFLFP وجود دارد.

به‌طوری‌که:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \bar{\bar{x}}_j + \tilde{q}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \bar{\bar{x}}_j + \tilde{r}} \prec \frac{\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{x}_j + \tilde{q}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \tilde{x}_j + \tilde{r}}$$

این شرط به شرط (۴) دلالت دارد و شرط (۴) نیز معادل با شرط زیر است:

$$\bar{\tilde{t}} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \bar{\bar{x}}_j + \tilde{q} \right) \prec \tilde{t} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{x}_j + \tilde{q} \right) \Longrightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \bar{\bar{x}}_j \bar{\tilde{t}} + \tilde{q} \bar{\tilde{t}} \prec \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{x}_j \tilde{t} + \tilde{q} \tilde{t} \Longrightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \bar{\bar{y}}_j + \tilde{q} \bar{\tilde{t}} \prec \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \tilde{y}_j + \tilde{q} \tilde{t}$$

این شرط معادل با شرط (۳) است که همان شرط غیرمغلوب ضعیف بودن برای FFLP می‌باشد و جواب شدنی $(\bar{\bar{y}}_1, ..., \bar{\bar{y}}_n, \bar{\tilde{t}})$ به‌ازای $\bar{\tilde{t}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{d}_j \bar{\bar{x}}_j + \tilde{r}}$ و $\bar{\bar{y}}_j = \bar{\tilde{t}}\ \bar{\bar{x}}_j$ و $j = 1, ..., n$ در آن صدق می‌کند. پس نتیجه می‌گیریم که $(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t})$ یک جواب غیرمغلوب ضعیف برای FFLP نیست، که با فرض مسأله در تناقض است.
بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است یعنی نتیجه می‌گیریم که اگر $(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t})$ جواب غیرمغلوب ضعیف مسأله‌ی FFLP باشد، آن‌گاه $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n)$ یک جواب غیرمغلوب ضعیف برای مسأله‌ی FFLFP می‌باشد. □

۴ الگوریتم محاسبه‌ی جواب‌های غیرمغلوب ضعیف

با در نظر گرفتن عملیات حسابی بیان شده در بخش چهارم تعریف ۳.۲ مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی (FFLP) که براساس تبدیل چارنز-کوپر از مسأله‌ی FFLFP بدست آمد را به مسأله‌ی

برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) تبدیل کرده و می‌توان آن را به‌صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$
\begin{aligned}
\text{MOLP} : \min / \max z_{۱} &= f_{۱}(x) = \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{c}_j \tilde{y}_j)_{۱} + (\tilde{q}\tilde{t})_{۱} \\
z_{۲} &= f_{۲}(x) = \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{c}_j \tilde{y}_j)_{۲} + (\tilde{q}\tilde{t})_{۲} \\
z_{۳} &= f_{۳}(x) = \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{c}_j \tilde{y}_j)_{۳} + (\tilde{q}\tilde{t})_{۳} \\
z_{۴} &= f_{۴}(x) = \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{c}_j \tilde{y}_j)_{۴} + (\tilde{q}\tilde{t})_{۴} \\
\text{subject to} \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{a}_{ij} \tilde{y}_j)_{۱} - (\tilde{b}_i \tilde{t})_{۴} &\leqslant ۰ \ , \ i = ۱, ..., m \\
\sum_{j=۱}^{n} (\tilde{a}_{ij} \tilde{y}_j)_{۲} - (\tilde{b}_i \tilde{t})_{۳} &\leqslant ۰ \ , \ i = ۱, ..., m \\
\sum_{j=۱}^{n} (\tilde{a}_{ij} \tilde{y}_j)_{۳} - (\tilde{b}_i \tilde{t})_{۲} &\leqslant ۰ \ , \ i = ۱, ..., m \\
\sum_{j=۱}^{n} (\tilde{a}_{ij} \tilde{y}_j)_{۴} - (\tilde{b}_i \tilde{t})_{۱} &\leqslant ۰ \ , \ i = ۱, ..., m \\
\sum_{j=۱}^{n} (\tilde{d}_j \tilde{y}_j)_{۱} + (\tilde{r}\tilde{t})_{۱} &\leqslant ۱ \\
\sum_{j=۱}^{n} (\tilde{d}_j \tilde{y}_j)_{۲} + (\tilde{r}\tilde{t})_{۲} &\leqslant ۱ \\
\sum_{j=۱}^{n} (\tilde{d}_j \tilde{y}_j)_{۳} + (\tilde{r}\tilde{t})_{۳} &\leqslant ۱ \\
\sum_{j=۱}^{n} (\tilde{d}_j \tilde{y}_j)_{۴} + (\tilde{r}\tilde{t})_{۴} &\leqslant ۱ \\
y_{j,۱} - y_{j,۲} &\leqslant ۰ \quad , \quad j = ۱, ..., n \\
y_{j,۲} - y_{j,۳} &\leqslant ۰ \quad , \quad j = ۱, ..., n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y_{j,۳} - y_{j,۴} \leqslant ۰ \quad , \quad j = ۱, ..., n \\
& t_۱ - t_۲ \leqslant ۰ \\
& t_۲ - t_۳ \leqslant ۰ \\
& t_۳ - t_۴ \leqslant ۰
\end{aligned}
$$

$$y_{j,۱} \geqslant ۰ \ , \ y_{j,۲} \geqslant ۰ \ , \ y_{j,۳} \geqslant ۰ \ , \ y_{j,۴} \geqslant ۰ \ , \ j = ۱, ..., n \ , \ t_۱ > ۰, t_۲ > ۰, t_۳ > ۰, t_۴ > ۰$$

$f : \mathbb{R}^{۴(n+۱)} \longrightarrow \mathbb{R}^۴$ یک تابع برداری، با متغیر
$L = (y_{۱,۱}, y_{۱,۲}, y_{۱,۳}, y_{۱,۴}, ..., y_{n,۱}, y_{n,۲}, y_{n,۳}, y_{n,۴}, t_۱, t_۲, t_۳, t_۴) \in \mathbb{R}^{۴(n+۱)}$ و با توابع خطی f_i به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳, ۴$ است. تمامی محدودیت‌های مسأله به‌صورت نامساوی‌های خطی روی متغیر L، بیان می‌شوند.

تعریف ۱.۴. (جواب کارای ضعیف): یک نقطه‌ی شدنی مانند $\bar{L} \in \mathbb{R}^{۴(n+۱)}$ از مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، جواب کارای ضعیف مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه از نوع مینیمم‌سازی نامیده می‌شود، هرگاه نقطه‌ی شدنی دیگری مانند L وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $f(L) < f(\bar{L})$، یعنی $f_i(L) < f_i(\bar{L})$ به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳, ۴$. برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه از نوع ماکزیمم‌سازی نیز این شرایط یکسان است، اما واضح است که علامت $<$ با علامت $>$ در جمله‌ی قبل جایگزین می‌شود [۱۳].

قضیه ۱.۴. $(\tilde{y}_۱, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t}) \in F(\mathbb{R})$ با $\tilde{y}_j = (y_{j,۱} \ , \ y_{j,۲} \ , \ y_{j,۳} \ , \ y_{j,۴})$ و $\tilde{t} = (t_۱, t_۲, t_۳, t_۴)$ به‌ازای
$j = ۱, ..., n$، یک جواب غیرمغلوب ضعیف مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی است اگر و تنها اگر
$L = (y_{۱,۱}, y_{۱,۲}, y_{۱,۳}, y_{۱,۴}, ..., y_{n,۱}, y_{n,۲}, y_{n,۳}, y_{n,۴}, t_۱, t_۲, t_۳, t_۴) \in \mathbb{R}^{۴(n+۱)}$ جواب کارای ضعیفی برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه باشد [۱۳].

روشی که ما در این مقاله برای حل مسائل MOLP در نظر گرفته‌ایم و قرار است آن را بکار گیریم، روش مجموع وزن‌دار می‌باشد.

فرمول‌بندی مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه می‌تواند به شکلی که در ادامه بیان می‌شود، باشد. مسأله‌ی MOLP با بردار وزنی $w = (w_۱, w_۲, w_۳, w_۴) \in \mathbb{R}^۴$ و $w_i \geqslant ۰$ و $\sum_{i=۱}^{۴} w_i = ۱$ داده

شده است، اکنون ما مسأله‌ی وزنی مرتبط را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MOLP}_w : \min / \max \quad & \sum_{i=۱}^{۴} w_i f_i(x) = w_۱ \left[\sum_{j=۱}^{n} (\tilde{c}_j \tilde{y}_j)_۱ + (\tilde{q}\tilde{t})_۱ \right] + w_۲ \left[\sum_{j=۱}^{n} (\tilde{c}_j \tilde{y}_j)_۲ + (\tilde{q}\tilde{t})_۲ \right] \\
& + w_۳ \left[\sum_{j=۱}^{n} (\tilde{c}_j \tilde{y}_j)_۳ + (\tilde{q}\tilde{t})_۳ \right] + w_۴ \left[\sum_{j=۱}^{n} (\tilde{c}_j \tilde{y}_j)_۴ + (\tilde{q}\tilde{t})_۴ \right] \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{a}_{ij} \tilde{y}_j)_۱ - (\tilde{b}_i \tilde{t})_۴ \leqslant ۰ \quad , \quad i = ۱, ..., m \\
& \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{a}_{ij} \tilde{y}_j)_۲ - (\tilde{b}_i \tilde{t})_۳ \leqslant ۰ \quad , \quad i = ۱, ..., m \\
& \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{a}_{ij} \tilde{y}_j)_۳ - (\tilde{b}_i \tilde{t})_۲ \leqslant ۰ \quad , \quad i = ۱, ..., m \\
& \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{a}_{ij} \tilde{y}_j)_۴ - (\tilde{b}_i \tilde{t})_۱ \leqslant ۰ \quad , \quad i = ۱, ..., m \\
& \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{d}_j \tilde{y}_j)_۱ + (\tilde{r}\tilde{t})_۱ \leqslant ۱ \\
& \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{d}_j \tilde{y}_j)_۲ + (\tilde{r}\tilde{t})_۲ \leqslant ۱ \\
& \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{d}_j \tilde{y}_j)_۳ + (\tilde{r}\tilde{t})_۳ \leqslant ۱ \\
& \sum_{j=۱}^{n} (\tilde{d}_j \tilde{y}_j)_۴ + (\tilde{r}\tilde{t})_۴ \leqslant ۱ \\
& y_{j,۱} - y_{j,۲} \leqslant ۰ \quad , \quad j = ۱, ..., n \\
& y_{j,۲} - y_{j,۳} \leqslant ۰ \quad , \quad j = ۱, ..., n \\
& y_{j,۳} - y_{j,۴} \leqslant ۰ \quad , \quad j = ۱, ..., n
\end{aligned}
$$

$$t_۱ - t_۲ \leqslant ۰$$
$$t_۲ - t_۳ \leqslant ۰$$
$$t_۳ - t_۴ \leqslant ۰$$
$$y_{j,۱} \geqslant ۰,\ y_{j,۲} \geqslant ۰, y_{j,۳} \geqslant ۰,\ y_{j,۴} \geqslant ۰,\ j = ۱, ..., n, t_۱ > ۰,\ t_۲ > ۰,\ t_۳ > ۰,\ t_۴ > ۰$$

اکنون باید بدانیم که چه ارتباطی بین جواب بهینه‌ی این مسأله‌ی وزنی و جواب کارای ضعیف مسأله‌ی MOLP اولیه وجود دارد. بدین منظور قضیه‌ای تحت عنوان قضیه‌ی ۲.۴ بیان می‌شود.

قضیه ۲.۴. با توجه به بردار وزنی $w = (w_۱, w_۲, w_۳, w_۴) \in \mathbb{R}^۴$ و $w_i \geqslant ۰$ و $\sum_{i=۱}^{۴} w_i = ۱$، اگر $L = (y_{۱,۱}, y_{۱,۲}, y_{۱,۳}, y_{۱,۴}, ..., y_{n,۱}, y_{n,۲}, y_{n,۳}, y_{n,۴}, t_۱, t_۲, t_۳, t_۴) \in \mathbb{R}^{۴(n+۱)}$ یک جواب بهینه برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی وزنی MOLP_w باشد، آنگاه L یک جواب کارای ضعیف برای MOLP است [۱۳].

به‌عنوان یک نتیجه از قضیه قبل، قضیه‌ی زیر را برای یافتن جواب‌های غیرمغلوب ضعیف FFLFP خواهیم داشت. این قضیه و اثبات آن اقتباسی از قضیه ۵ ارائه شده در مرجع [۱۳] می‌باشد.

قضیه ۳.۴. با توجه به بردار وزنی $w = (w_۱, w_۲, w_۳, w_۴) \in \mathbb{R}^۴$ و $w_i \geqslant ۰$ و $\sum_{i=۱}^{۴} w_i = ۱$، اگر $L = (y_{۱,۱}, y_{۱,۲}, y_{۱,۳}, y_{۱,۴}, ..., y_{n,۱}, y_{n,۲}, y_{n,۳}, y_{n,۴}, t_۱, t_۲, t_۳, t_۴) \in \mathbb{R}^{۴(n+۱)}$ یک جواب بهینه برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی وزنی MOLP_w باشد، آنگاه $\tilde{x} = (\tilde{x}_۱, ..., \tilde{x}_n)$ با $\tilde{x}_j = (x_{j,۱}, x_{j,۲}, x_{j,۳}, x_{j,۴}) \in F(\mathbb{R})$ و به ازای $j = ۱, ..., n$، یک جواب غیرمغلوب ضعیف برای FFLFP است.

اثبات. اگر $L = (y_{۱,۱}, y_{۱,۲}, y_{۱,۳}, y_{۱,۴}, ..., y_{n,۱}, y_{n,۲}, y_{n,۳}, y_{n,۴}, t_۱, t_۲, t_۳, t_۴) \in \mathbb{R}^{۴(n+۱)}$ جواب بهینه‌ای برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی وزنی MOLP_w باشد، طبق قضیه ۲.۴، نتیجه می‌شود که L یک جواب کارای ضعیف برای MOLP است. سپس، طبق قضیه ۱.۴، نتیجه می‌شود که $(\tilde{y}_۱, ..., \tilde{y}_n, \tilde{t})$ با $\tilde{y}_j = (y_{j,۱}, y_{j,۲}, y_{j,۳}, y_{j,۴}) \in F(\mathbb{R})$ و $\tilde{t} = (t_۱, t_۲, t_۳, t_۴)$ به ازای $j = ۱, ..., n$، یک جواب غیرمغلوب ضعیف برای FFLP است و در نهایت، براساس قضیه ۲.۳، نتیجه می‌شود که $\tilde{x} = (\tilde{x}_۱, ..., \tilde{x}_n)$ با $\tilde{x}_j = (x_{j,۱}, x_{j,۲}, x_{j,۳}, x_{j,۴}) \in F(\mathbb{R})$ و $\tilde{x}_j = \frac{\tilde{y}_j}{\tilde{t}}$ به ازای $j = ۱, ..., n$، یک جواب غیرمغلوب ضعیف برای FFLFP می‌باشد. □

قضیه‌ی قبل، به ما اجازه می‌دهد تا روشی را برای بدست آوردن جواب غیرمغلوب ضعیف مسأله‌ی FFLFP ترسیم کنیم که می‌تواند از طریق الگوریتم نوشته شود.
این الگوریتم برگرفته از الگوریتم ارائه شده توسط جیمنز در مرجع [۱۳] می‌باشد که برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی با اعداد فازی مثلثی بیان شده اما ما آن را برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی با اعداد فازی ذوزنقه ای ارائه کردیم.

تعریف ۲.۴. مقدار دهی اولیه $D \longleftarrow \varnothing$ و $s \longleftarrow ۱$.
گام اول: مجموعه‌ای از بردارهای وزنی مانند

$$S_w = \{(w_{s,۱}, w_{s,۲}, w_{s,۳}, w_{s,۴}) : s = ۱, ..., r;\ r \in \mathbb{N}\}$$

را تعریف کنید($(w_{s,۱}, w_{s,۲}, w_{s,۳}, w_{s,۴}) \in S_w$ یعنی $w_{s,۱}, w_{s,۲}, w_{s,۳}, w_{s,۴} \geqslant ۰$ و $\sum_{i=۱}^{۴} w_{s,i} =$ ۱ به ازای همه‌ی $s = ۱, ..., r$).
گام دوم: مسأله MOLP_{w_s} را حل کنید. $\longleftarrow$

$$L_s = (y_{s,۱,۱}, y_{s,۱,۲}, y_{s,۱,۳}, y_{s,۱,۴}, ..., y_{s,n,۱}, y_{s,n,۲}, y_{s,n,۳}, y_{s,n,۴}, t_{s,۱}, t_{s,۲}, t_{s,۳}, t_{s,۴}) \in \mathbb{R}^{۴(n+۱)}$$

اگر جوابی وجود ندارد، برو به گام ششم.
گام سوم: $(y_{s,j,۱}, y_{s,j,۲}, y_{s,j,۳}, y_{s,j,۴}) \longleftarrow \tilde{y}_{s,j}$. $j = ۱, ..., n$

$$\tilde{t}_s \longleftarrow (t_{s,۱}, t_{s,۲}, t_{s,۳}, t_{s,۴})$$
$$\tilde{L}_s \longleftarrow (\tilde{y}_{s,۱}, ..., \tilde{y}_{s,n}, \tilde{t}_s)$$

گام چهارم: $\left(\frac{y_{s,j,۱}}{t_{s,۱}}, \frac{y_{s,j,۲}}{t_{s,۲}}, \frac{y_{s,j,۳}}{t_{s,۳}}, \frac{y_{s,j,۴}}{t_{s,۴}}\right) \longleftarrow (x_{s,j,۱}, x_{s,j,۲}, x_{s,j,۳}, x_{s,j,۴}) = \tilde{x}_{s,j}$ و $j =$ ۱, ..., n.
اگر $\tilde{t}_s \in ۰$ آن‌گاه جوابی وجود ندارد، پس برو به گام ششم.
گام پنجم: $(\tilde{x}_{s,۱}, ..., \tilde{x}_{s,n}) \longleftarrow \tilde{x}_s$

$$D \longleftarrow D \cup \{\tilde{x}_s\}$$

گام ششم: $s + ۱ \longleftarrow s$
اگر $s \leqslant r$، پس برو به گام دوم.
گام هفتم: پایان

۵ مثال عددی

مثال زیر را به‌عنوان یک مسأله‌ی FFLFP که توسط ابراهیم‌نژاد و همکاران در مرجع [۳] پیشنهاد شده است، در نظر می‌گیریم، اما محدودیت‌های نامساوی این مسأله تحت هیچ یک از توابع رتبه‌بندی تعریف نشده است.

مثال ۱.۵. مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\text{FFLFP1} : max\ \tilde{z} =& \frac{(۳,۵,۸,۱۳)\tilde{x}_۱ + (۲,۳,۵,۷)\tilde{x}_۲}{(۳,۵,۸,۱۳)\tilde{x}_۱ + (۱,۲,۴,۶)\tilde{x}_۲ + (۰,۱,۲,۳)} \in F(\mathbb{R}) \\
\text{subject to} \quad & (۰,۱,۲,۳)\tilde{x}_۱ + (۱,۲,۳,۴)\tilde{x}_۲ \preceq (۳,۵,۸,۱۴) \\
& (۱,۲,۳,۴)\tilde{x}_۱ + (۰,۱,۱,۲)\tilde{x}_۲ \preceq (۳,۴,۵,۸) \\
& \tilde{x}_۱ \succeq \tilde{۰} \ , \ \tilde{x}_۲ \succeq \tilde{۰}
\end{aligned}$$

در ادامه، مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی مرتبط با FFLFP1 را به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\text{FFLP1} : max\ \tilde{z}^* =& (۳,۵,۸,۱۳)\tilde{y}_۱ + (۲,۳,۵,۷)\tilde{y}_۲ \\
\text{subject to} \quad & (۰,۱,۲,۳)\tilde{y}_۱ + (۱,۲,۳,۴)\tilde{y}_۲ \preceq (۳,۵,۸,۱۴)\tilde{t} \\
& (۱,۲,۳,۴)\tilde{y}_۱ + (۰,۱,۱,۲)\tilde{y}_۲ \preceq (۳,۴,۵,۸)\tilde{t} \\
& (۳,۵,۸,۱۳)\tilde{y}_۱ + (۱,۲,۴,۶)\tilde{y}_۲ + (۰,۱,۲,۳)\tilde{t} \preceq \tilde{۱} \\
& \tilde{y}_۱, \tilde{y}_۲ \succeq \tilde{۰} \ , \ \tilde{t} \succ \tilde{۰}
\end{aligned}$$

اکنون مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه مرتبط با FFLP1 را به شکل زیر فرمول‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\text{MOLP1} : max \quad & f(L) = (f_۱(L), f_۲(L), f_۳(L), f_۴(L)) \in \mathbb{R}^۴ \\
\text{subject to} \quad & y_{۲,۱} - ۱۴t_۴ \leqslant ۰ \\
& y_{۱,۲} + ۲y_{۲,۲} - ۸t_۳ \leqslant ۰ \\
& ۲y_{۱,۳} + ۳y_{۲,۳} - ۵t_۲ \leqslant ۰ \\
& ۳y_{۱,۴} + ۴y_{۲,۴} - ۳t_۱ \leqslant ۰ \\
& y_{۱,۱} - ۸t_۴ \leqslant ۰ \\
& ۲y_{۱,۲} + y_{۲,۲} - ۵t_۳ \leqslant ۰ \\
& ۳y_{۱,۳} + y_{۲,۳} - ۴t_۲ \leqslant ۰ \\
& ۴y_{۱,۴} + ۲y_{۲,۴} - ۳t_۱ \leqslant ۰
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&۳y_{۱,۱} + y_{۲,۱} \leqslant ۱\\
&۵y_{۱,۲} + ۲y_{۲,۲} + t_۲ \leqslant ۱\\
&۸y_{۱,۳} + ۴y_{۲,۳} + ۲t_۳ \leqslant ۱\\
&۱۳y_{۱,۴} + ۶y_{۲,۴} + ۳t_۴ \leqslant ۱\\
&y_{۱,۱} - y_{۱,۲} \leqslant ۰\\
&y_{۱,۲} - y_{۱,۳} \leqslant ۰\\
&y_{۱,۳} - y_{۱,۴} \leqslant ۰\\
&y_{۲,۱} - y_{۲,۲} \leqslant ۰\\
&y_{۲,۲} - y_{۲,۳} \leqslant ۰\\
&y_{۲,۳} - y_{۲,۴} \leqslant ۰\\
&t_۱ - t_۲ \leqslant ۰\\
&t_۲ - t_۳ \leqslant ۰\\
&t_۳ - t_۴ \leqslant ۰
\end{aligned}
$$

$$y_{j,۱} \geqslant ۰\ ,\ y_{j,۲} \geqslant ۰\ ,\ y_{j,۳} \geqslant ۰\ ,\ y_{j,۴} \geqslant ۰\ ,\ j = ۱, ۲\ ,\ t_۱ > ۰\ ,\ t_۲ > ۰\ ,\ t_۳ > ۰\ ,\ t_۴ > ۰$$

با تابع برداری $f = (f_۱, f_۲, f_۳, f_۴) : \mathbb{R}^{۱۲} \longrightarrow \mathbb{R}^۴$، جواب کارای ضعیفی به فرم:

$$L = (y_{۱,۱}, y_{۱,۲}, y_{۱,۳}, y_{۱,۴}, y_{۲,۱}, y_{۲,۲}, y_{۲,۳}, y_{۲,۴}, t_۱, t_۲, t_۳, t_۴)$$

و توابع هدف $f_۱(L) = ۳y_{۱,۱} + ۲y_{۲,۱}$ و $f_۲(L) = ۵y_{۱,۲} + ۳y_{۲,۲}$ و $f_۳(L) = ۸y_{۱,۳} + ۵y_{۲,۳}$ و $f_۴(L) = ۱۳y_{۱,۴} + ۷y_{۲,۴}$.

با انجام یکسری محاسبات، الگوریتم ۲.۴ را برای مسأله‌ی FFLFP1 به ازای $r = ۱۰$ اجرا می‌کنیم. بنابراین، ابتدا جواب‌های کارای ضعیفی را برای مسأله‌ی MOLP1 با استفاده از یافتن جواب‌های بهینه برای مسأله‌ی وزنی MOLP1_w تولید می‌کنیم و سپس جواب‌های غیرمغلوب ضعیف مسأله‌ی FFLP1 و در ادامه با انجام برخی محاسبات، جواب‌های غیرمغلوب ضعیف مسأله‌ی FFLFP1 را بدست می‌آوریم.

در ادامه، جدول ۱ ، خروجی را با جواب‌های غیرمغلوب ضعیف مسأله‌ی FFLFP1 و همچنین مقادیر تابع هدف فازی آن‌ها نشان می‌دهد.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، الگوریتمی برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی (FFLFP) و یافتن جواب‌های غیرمغلوب ضعیف آن‌ها ارائه شده است که برگرفته از الگوریتم جیمنز در مرجع [۱۳]

می‌باشد. در این راستا، با استفاده از روش تبدیل چارنز–کوپر، ما مسأله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی را به مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی (FFLP) تبدیل کردیم. پس از آن، یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی به یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی، بدون از دست دادن اطلاعات مسأله، مرتبط شده است، امری که معمولاً هنگامی که این تبدیل از طریق توابع رتبه‌بندی انجام می‌شود، اجتناب‌ناپذیر است. علاوه بر این، نیازی به نامنفی بودن ضرایب در مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی نمی‌باشد، چون در این الگوریتم، هر مسأله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی، در نهایت معادل با یک مسأله‌ی وزنی است که در این‌گونه مسائل تنها نامنفی بودن متغیرها جزء شرایط و محدودیت‌های مسأله هستند و نامنفی بودن ضرایب الزامی نیست. اعتقاد ما بر این است که روش پیشنهادی برای حل مسأله‌ی FFLFP در حل مسائل مربوط به زندگی واقعی، ممکن است مورد توجه ریاضیدانانی باشد که در این زمینه کار می‌کنند.

مراجع

[1] A. Charnes, W. W. Cooper, Programming with linear fractional functionals, Naval Research logistics quarterly, 181-186 (1962).

[2] A. Ebrahimnejad, M. Tavana, A novel method for solving linear programming problems with symmetric trapezoidal fuzzy numbers, Applied mathematical modelling, 4388-4395 (2014).

[3] A. Ebrahimnejad, S. J. Ghomi, S. M. Mirhosseini–Alizamini, A new approach for solving fully fuzzy linear fractional programming problems, 2017 IEEE 4th International Conference on Knowledge-Based Engineering and Innovation (KBEI), (2017).

[4] B. Bhardwaj, A. Kumar, A note on the paper " A simplified novel technique for solving fully fuzzy linear programming problems", Journal of Optimization Theory and Applications 163, 685-696 (2014).

[5] B. Pop, I. Stancu-Minasian, A method of solving fully fuzzified linear fractional programming problems, Journal of applied mathematics and computing 27, 227-242 (2008).

[6] C. Veeramani, M. Sumathi, Fuzzy mathematical programming approach for solving fuzzy linear fractional programming problem, RAIRO-Operations research 48.1, 109-122 (2014).

[7] F. H. Lotfi, T. Allahviranloo, M. A. Jondabeh, L. Alizadeh, Solving a fully fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution, Applied mathematical modelling 33.7, 3151-3156 (2009).

[8] I. U. Khan, T. Ahmad, N. Maan, A reply to a note on the paper "A simplified novel technique for solving fully fuzzy linear programming problems", Journal of Optimization Theory and Applications 173, 353-356 (2017).

[9] I. U. Khan, T. Ahmad, N. Maan, A simplified novel technique for solving fully fuzzy linear programming problems, Journal of Optimization Theory and Applications 159, 536-546 (2013)

[10] J. J. Buckley, T. Feuring, Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: fuzzy linear programming, Fuzzy sets and systems 109.1, 35-53 (2000).

[11] K. Ganesan, P. Veeramani, Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers, Annals of operations research 143, 305-315 (2006).

[12] M. Arana-Jiménez, Nondominated solutions in a fully fuzzy linear programming problem, Mathematical Methods in the Applied Sciences 41.17, 7421-7430 (2018).

[13] M. Sakawa, H. Yano, An interactive fuzzy satisficing method for multiobjective linear fractional programming problems, Fuzzy sets and systems 28.2, 129-144 (1988).

[14] R. E. Bellman, L. A. Zadeh, Decision making in a fuzzy environment, Management science 17.4, B-141 (1970).

[15] R. Ezzati, E. Khorram, R. Enayati, A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem, Applied mathematical modelling 39.12, 3183-3193 (2015).

[16] S. K. Das, T. Mandal, S. A. Edalatpanah, A new approach for solving fully fuzzy linear fractional programming problems using the multiobjective linear programming, RAIRO-Operations research 51.1, 285-297 (2017).

جدول ۱: جواب‌های غیرمغلوب ضعیف مسأله FFLFP1 (مثال(۱.۵))

s	$w_{s,1}$	$w_{s,2}$	$w_{s,3}$	$w_{s,4}$	$\tilde{y}_{s,1}$	$\tilde{y}_{s,2}$	$\tilde{t}_s$	$\tilde{x}_{s,1}$	$\tilde{x}_{s,2}$	$\tilde{z}_s$
۱	۰/۷	۰/۱	۰/۱	۰/۱	(۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸)	(۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴)	(۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۱۹, ۰/۴۸۸, ۱/۳۷, ۴/۷۱۴)
۲	۰/۲	۰/۲	۰/۲	۰/۴	(۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸)	(۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴)	(۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۱۹, ۰/۴۸۸, ۱/۳۷, ۴/۷۱۴)
۳	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱	(۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸)	(۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴)	(۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۱۹, ۰/۴۸۸, ۱/۳۷, ۴/۷۱۴)
۴	۰/۴	۰	۰	۰/۶	(۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸)	(۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴)	(۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۱۹, ۰/۴۸۸, ۱/۳۷, ۴/۷۱۴)
۵	۰/۱	۰/۵	۰/۲	۰/۲	(۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸)	(۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴)	(۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۱۹, ۰/۴۸۸, ۱/۳۷, ۴/۷۱۴)
۶	۰/۹	۰	۰	۰/۱	(۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸)	(۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴)	(۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۱۹, ۰/۴۸۸, ۱/۳۷, ۴/۷۱۴)
۷	۰/۵	۰	۰	۰/۵	(۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸)	(۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴)	(۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۱۹, ۰/۴۸۸, ۱/۳۷, ۴/۷۱۴)
۸	۰/۳	۰/۷	۰	۰	(۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸)	(۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴)	(۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۱۹, ۰/۴۸۸, ۱/۳۷, ۴/۷۱۴)
۹	۰/۸	۰	۰/۲	۰	(۰, ۰, ۰, ۰)	(۰/۱, ۰/۱, ۰/۱, ۰/۱)	(۰/۱۳۳, ۰/۱۳۳, ۰/۱۳۳, ۰/۱۳۳)	(۰, ۰, ۰, ۰)	(۰/۷۵, ۰/۷۵, ۰/۷۵, ۰/۷۵)	(۰/۲, ۰/۴۵, ۱/۵, ۷)
۱۰	۰/۳	۰/۳	۰	۰/۴	(۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸, ۰/۰۴۸)	(۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴, ۰/۰۲۴)	(۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹, ۰/۰۷۹)	(۰/۶, ۰/۶, ۰/۶, ۰/۶)	(۰/۳, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۳)	(۰/۱۹, ۰/۴۸۸, ۱/۳۷, ۴/۷۱۴)

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

تحلیل شبکه‌های آموزشی با نظریه گراف: شناسایی تأثیرگذاران و الگوهای یادگیری با معیارهای مرکزیت

ماندانا مکاری [۱]

[۱] گروه ریاضی، واحد همدان، دانشگاه آزاد اسلامی، همدان، ایران

چکیده

این پژوهش به بررسی کاربردهای نظریه گراف و تحلیل شبکه‌های اجتماعی در حوزه فناوری‌های آموزشی می‌پردازد. با تمرکز بر سه شاخص اصلی مرکزیت—درجه، بینابینی و نزدیکی—روش‌های ریاضی برای شناسایی کاربران کلیدی و تأثیرگذار در شبکه‌های آموزشی ارائه شده است. در ادامه، با بهره‌گیری از مثال‌های عملی، ارتباط این مفاهیم با سامانه‌های یادگیری و راهکارهای بهینه‌سازی فرآیند تدریس تحلیل می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که به‌کارگیری این ابزارهای ریاضی می‌تواند در طراحی سامانه‌های آموزشی، شناسایی الگوهای یادگیری و ارتقای تعاملات علمی نقش مؤثری ایفا کند. این مطالعه بر ظرفیت نظریه گراف در بهبود و توسعه فناوری‌های آموزشی تأکید دارد.

کلمات کلیدی: نظریه گراف، شبکه‌های اجتماعی، آموزش ریاضی، مرکزیت، تحلیل شبکه

۱ مقدمه

نظریه گراف به عنوان یکی از ابزارهای بنیادین ریاضیات گسسته و علوم کامپیوتر، کاربردهای گسترده‌ای در تحلیل و مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده از جمله شبکه‌های اجتماعی و آموزشی دارد. این نظریه که ریشه در حل مسئله پل‌های کونیگسبرگ اویلر دارد، امروزه به یکی از ارکان اصلی تحلیل شبکه‌ها در حوزه‌های محاسباتی تبدیل شده است. در دو دهه اخیر، با گسترش فناوری‌های آموزشی دیجیتال و سیستم‌های مدیریت یادگیری، کاربردهای نظریه گراف در تحلیل و بهینه‌سازی فرآیندهای آموزشی مورد توجه ویژه پژوهشگران قرار گرفته است [۲، ۳].

مدل‌سازی روابط آموزشی با استفاده از گراف‌ها امکان تحلیل‌های کمّی و الگوریتمی از ساختارهای یادگیری را فراهم می‌آورد [۵]. در این مدل‌های محاسباتی می‌توان:

- عناصر آموزشی (معلمان، دانش‌آموزان و منابع) را به عنوان رئوس گراف در نظر گرفت.
- تعاملات آموزشی را به صورت یال‌های گراف (جهت‌دار یا وزن‌دار) نمایش داد.

[1] m_moccari@iau.ac.ir

- از معیارهای شبکه‌ای برای تحلیل الگوهای ارتباطی استفاده نمود.

این مقاله با رویکردی نظام‌مند به بررسی کاربردهای نظریه گراف در فناوری‌های آموزشی می‌پردازد. در بخش‌های بعدی نشان خواهیم داد که چگونه مفاهیم پایه‌ای نظریه گراف می‌توانند در طراحی و ارزیابی سیستم‌های یادگیری دیجیتال مؤثر باشند. برخی از کاربردهای کلیدی این نظریه در آموزش عبارتند از:

۱. **شناسایی الگوهای یادگیری:** تحلیل ساختار گراف ارتباطات برای تشخیص خودکار سبک‌های یادگیری
۲. **بهینه‌سازی گروه‌بندی:** استفاده از الگوریتم‌های خوشه‌بندی گراف برای تشکیل گروه‌های یادگیری بهینه
۳. **ارزیابی تأثیر آموزشی:** محاسبه شاخص‌های مرکزیت به روش‌های محاسباتی
۴. **پیش‌بینی عملکرد:** تحلیل تغییرات ساختاری گراف برای شناسایی ریسک‌های تحصیلی
۵. **طراحی دوره‌ها:** استفاده از روش‌های مسیریابی برای شخصی‌سازی یادگیری

هدف این مقاله نشان دادن ظرفیت‌های نظریه گراف در توسعه فناوری‌های آموزشی نوین است. این پژوهش با ارائه چارچوبی ریاضی‌ـ محاسباتی، امکان پیاده‌سازی عملی این روش‌ها در سامانه‌های یادگیری الکترونیکی را بررسی می‌کند.
نوآوری اصلی این کار در تلفیق مفاهیم نظریه گراف (مانند گراف‌های وزن‌دار و جهت‌دار) با چالش‌های ملموس آموزشی است. این رویکرد می‌تواند مبنایی برای توسعه ابزارهای تحلیلی در پلتفرم‌های آموزشی هوشمند باشد، که امروزه به عنوان یکی از زمینه‌های پژوهشی فعال در حوزه فناوری آموزش مطرح است.

۲ مبانی نظری

۱.۲ گراف و نمایش شبکه

یک گراف $G = (V, E)$ شامل مجموعه رئوس V (نقاط) و مجموعه یال‌های E (ارتباطات) است. در مدل‌سازی آموزشی می‌توانیم:

- رئوس را معلمان و دانش‌آموزان در نظر بگیریم.
- یال‌ها را روابط آموزشی (راهنمایی، همکاری، تبادل اطلاعات) تعریف کنیم.

تعریف ۱.۲. [۱] **گراف آموزشی (Educational Graph)**: یک گراف جهت‌دار و وزن‌دار $G = (V, E, w)$ که در آن:

- $V = V_t \cup V_s$ (مجموعه معلمان و دانش‌آموزان)
- $E \subseteq V \times V$ (روابط آموزشی)
- $w : E \to \mathbb{R}^+$ (وزن ارتباطات بر اساس شدت تعامل)

۲.۲ معیارهای شناسایی تأثیرگذاران

تعریف ۲.۲. [۱] **مرکزیت درجه (Degree Centrality)**: تعداد ارتباطات مستقیم یک گره. در آموزش، معلمی که دانش‌آموزان بیشتری را راهنمایی می‌کند درجه بالاتری دارد.

$$C_D(v) = \frac{\deg(v)}{n - ۱}$$

تعریف ۳.۲. [۱] **مرکزیت بینابینی (Betweenness Centrality)**: معیاری برای سنجش میزان کنترل یک گره بر جریان اطلاعات در شبکه که اهمیت گره‌های واسط را در ارتباطات شبکه مشخص می‌کند. در محیط آموزشی، دانش‌آموزانی که این مقدار برای آنها بالا باشد (مانند رابط‌های گروهی) نقش کلیدی در انتقال اطلاعات بین زیرگروه‌های کلاس دارند.

$$C_B(v) = \sum_{\substack{s \neq v \neq t \\ s,t \in V}} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$$

σ_{st}: تعداد کل کوتاه‌ترین مسیرها بین گره‌های s و t
$\sigma_{st}(v)$: تعداد کوتاه‌ترین مسیرهای بین s و t که از گره v می‌گذرند
V: مجموعه تمام گره‌های گراف

تعریف ۴.۲. [۱] **مرکزیت نزدیکی (Closeness Centrality)**: معکوس مجموع فاصله‌های یک گره تا دیگر گره‌ها. معلمی که سریع‌تر می‌تواند با کل کلاس ارتباط برقرار کند این مقدار بالایی دارد.

$$C_C(v) = \frac{n - ۱}{\sum_{u \neq v} d(v, u)}$$

تعریف ۵.۲. [۱] **خوشه‌بندی آموزشی (Educational Clustering)**: فرآیند تقسیم شبکه ارتباطات آموزشی به زیرگروه‌های همگن (جامعه‌های یادگیری) که در آن اعضای هر خوشه ارتباطات آموزشی قوی‌تری با یکدیگر نسبت به اعضای دیگر خوشه‌ها دارند. در این زمینه:

- **گراف همگن** به زیرگرافی اطلاق می‌شود که:

۱. دارای ارتباطات درونی متراکم (چگالی یال بالا)

۲. دارای ارتباطات برونی کم‌چگالی با دیگر زیرگراف‌ها
۳. اعضای آن از نظر ویژگی‌های آموزشی (مثل سطح یادگیری، الگوی تعامل) شباهت بالایی دارند

- **معیارهای خوشه‌بندی**:
  - **ضریب خوشه‌بندی محلی**: احتمال وجود ارتباط بین همسایه‌های یک گره

$$c_u = \frac{۲T(u)}{deg(u)(deg(u)-۱)}$$

که در آن $T(u)$ تعداد مثلث‌های شامل گره u و $deg(u)$ درجه گره است.

تعریف ۶.۲. [۱] **مسیر یادگیری بهینه (Optimal Learning Path)**: مسیری که با کمترین هزینه شناختی، یک یادگیرنده را از نقطه شروع (مفاهیم پایه) به هدف آموزشی (مفاهیم پیشرفته) می‌رساند. این مسیر در گراف آموزشی به صورت ریاضی بهینه‌سازی می‌شود:

$$P_{opt} = \arg\min_{p \in P_{s,t}} \sum_{e \in p} w(e)$$

اجزای فرمول:

- $P_{s,t}$: مجموعه تمام مسیرهای ممکن از گره منبع (s) به گره هدف (t)
- $w(e)$: وزن یال که نشان‌دهنده **هزینه یادگیری** مفهوم مربوطه است و می‌تواند بر اساس:
  - دشواری مطلب (بر اساس استانداردهای آموزشی)
  - زمان مورد نیاز برای تسلط
  - پیش‌نیازهای شناختی

  تعیین شود
- $\sum_{e \in p} w(e)$: مجموع هزینه‌های یادگیری در طول مسیر p

نکات کلیدی: - این تعریف مبتنی بر نظریه گراف‌های وزندار و الگوریتم‌های یافتن کوتاه‌ترین مسیر است - وزن‌ها می‌توانند بر اساس داده‌های عینی (نتایج ارزیابی‌های آموزشی) یا نظرات خبرگان تعیین شوند - در محیط‌های یادگیری تطبیقی، این مسیر می‌تواند به صورت پویا بر اساس سطح یادگیرنده به‌روزرسانی شود.

تعریف ۷.۲. [۱] **گراف پویای آموزشی (Dynamic Educational Graph)**: گرافی که با تابع زمانی $G(t) = (V(t), E(t))$ تغییر می‌کند و می‌تواند:

- رشد شبکه آموزشی را مدل کند
- تغییرات روابط یادگیری را تحلیل نماید
- الگوهای تکامل دانش را نمایش دهد

۳ مطالعه موردی: شبکه پیشرفته کلاس ریاضی

یک کلاس درس پیشرفته ریاضی با ۱۰ عضو را در نظر می‌گیریم:

- معلم اصلی (M1) و معلم کمک‌آموز (M2)
- دانش‌آموزان (S1 تا S8) با سطوح مختلف یادگیری

روش تعیین وزن‌های ارتباطی در مدل شبکه آموزشی

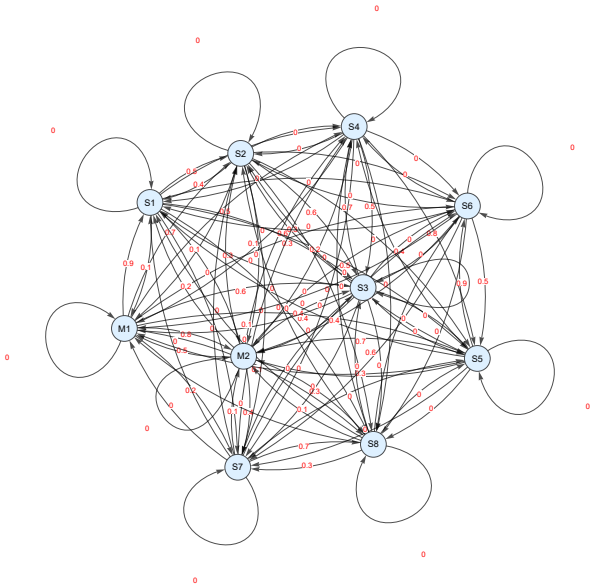
مطالعه حاضر از یک رویکرد ترکیبی برای تعیین وزن‌های ارتباطی در شبکه آموزشی کلاس ریاضی استفاده نموده است [۴]. داده‌های مورد نیاز از طریق مشاهدات سیستماتیک، پرسشنامه‌های استاندارد و تحلیل عملکرد تحصیلی جمع‌آوری شده‌اند. یک تیم پژوهشی متشکل از متخصصان علوم تربیتی و ریاضی به مدت چهار هفته به مشاهده و ثبت تعاملات آموزشی در کلاس پرداختند. در این فرآیند، کلیه تعاملات کلامی و غیرکلامی بین معلمان و دانش‌آموزان با استفاده از چک‌لیست‌های استاندارد رفتارهای آموزشی، مورد سنجش و ارزیابی قرار گرفت.

برای افزایش دقت و اعتبار داده‌ها، از ابزارهای مکمل نیز استفاده شد. پرسشنامه‌های محقق‌ساخته‌ای طراحی گردید که در آن از شرکت‌کنندگان خواسته شد تا میزان تأثیرپذیری خود از هر یک از اعضای کلاس را در مقیاس لیکرت اصلاح‌شده (۰ تا ۱) ارزیابی نمایند. این پرسشنامه‌ها با ضریب آلفای کرونباخ ۰/۸۷ از پایایی مناسبی برخوردار بودند. علاوه بر این، تحلیل‌های کمی از نمرات امتحانات فردی و گروهی و همبستگی بین پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان انجام پذیرفت.

پروتکل وزندهی و اعتبارسنجی

وزن‌های نهایی بر اساس توافق سه‌جانبه بین داده‌های مشاهده‌ای، نتایج پرسشنامه‌ها و تحلیل‌های عملکرد تحصیلی تعیین شدند. برای نمونه، وزن ۰/۹ برای ارتباط $M_1 \rightarrow S_1$ از این واقعیت نشأت می‌گیرد که در مشاهدات میدانی، این دانش‌آموز به طور متوسط در هر جلسه ۵-۷ تعامل آموزشی معنادار با معلم اصلی داشت و در پرسشنامه‌ها نیز بالاترین میزان تأثیرپذیری را گزارش نمود. در مقابل، وزن‌های پایین‌تر (مانند ۰/۲ برای $M_1 \rightarrow S_7$) نشان‌دهنده تعاملات محدودتر و تأثیرپذیری کمتر بود.

کلیه وزن‌های تعیین‌شده در دو مرحله توسط معلمان با تجربه (M1 و M2) و یک ناظر مستقل آموزشی مورد بازبینی و تأیید قرار گرفتند. این فرآیند اعتبارسنجی، اطمینان می‌دهد که وزن‌های



شکل ۱: گراف کلاس ریاضی

اختصاص‌یافته به خوبی بازتاب‌دهنده دینامیک واقعی روابط آموزشی در کلاس هستند. چنین رویکرد جامعی در جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها، مدل ارائه‌شده را به ابزاری قوی برای بررسی ساختارهای ارتباطی در محیط‌های آموزشی تبدیل می‌نماید.

۱.۳ مدل‌سازی گراف آموزشی

گراف کلاس را به صورت $G = (V, E, w)$ با مشخصات زیر تعریف می‌کنیم:

- $V = \{M۱, M۲, S۱, S۲, ...S۸\}$
- یال‌ها با جهت و وزن نشان‌دهنده شدت ارتباط آموزشی هستند
- وزن‌ها بین ۰/۱ (ارتباط ضعیف) تا ۱ (ارتباط قوی) متغیرند

این گراف در شکل ۱ نشان داده شده است.

۲.۳ محاسبات پیشرفته مرکزیت

با استفاده از تعاریف بخش مبانی نظری، مقادیر مرکزیت را محاسبه می‌کنیم:

تخصیص نقش‌های واسطه‌ای بر اساس معیارهای شبکه‌ای:

نقش هر عضو در شبکه آموزشی بر اساس ترکیبی از شاخص‌های مرکزیت و الگوهای ارتباطی تعیین شده است. معلمان (M1 و M2) به دلیل مقادیر بالای مرکزیت بینابینی (به ترتیب ۰/۵۲ و ۰/۴۵) و

جدول ۱: ماتریس مجاورت وزندار گراف کلاس ریاضی

	M1	M2	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
M1	۰	۰/۸	۰/۹	۰/۷	۰/۶	۰/۵	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱
M2	۰/۵	۰	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۶	۰/۷	۰/۵	۰/۴	۰/۳
S1	۰/۱	۰	۰	۰/۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰
S2	۰/۱	۰	۰/۴	۰	۰/۶	۰	۰	۰	۰	۰
S3	۰/۱	۰	۰	۰/۳	۰	۰/۷	۰	۰	۰	۰
S4	۰/۱	۰/۲	۰	۰	۰/۵	۰	۰/۸	۰	۰	۰
S5	۰	۰/۳	۰	۰	۰	۰/۴	۰	۰/۹	۰	۰
S6	۰	۰/۲	۰	۰	۰	۰	۰/۵	۰	۰/۶	۰
S7	۰	۰/۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۴	۰	۰/۷
S8	۰	۰/۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰/۳	۰

جدول ۲: محاسبه معیارهای پیشرفته مرکزیت برای شبکه کلاس

عضو	درجه	بینابینی	نزدیکی	ضریب خوشه‌بندی	نقش واسطه‌ای
M1	۰/۸۹	۰/۵۲	۰/۸۵	۰/۱۸	معلم اصلی
M2	۰/۷۸	۰/۴۵	۰/۷۸	۰/۲۵	معلم کمکی
S1	۰/۴۴	۰/۱۲	۰/۶۲	۰/۰۰	دانش‌آموز مستقل
S2	۰/۵۰	۰/۱۵	۰/۶۵	۰/۶۷	رابط گروهی
S3	۰/۵۰	۰/۱۸	۰/۶۶	۰/۰۰	دانش‌آموز فعال
S4	۰/۵۶	۰/۲۵	۰/۶۹	۰/۳۳	رهبر یادگیری
S5	۰/۵۶	۰/۳۰	۰/۷۱	۰/۰۰	رابط اصلی
S6	۰/۴۴	۰/۲۲	۰/۶۷	۰/۵۰	پل ارتباطی
S7	۰/۳۳	۰/۱۵	۰/۶۱	۰/۰۰	دانش‌آموز پیرو
S8	۰/۲۲	۰/۰۸	۰/۵۵	۰/۰۰	دانش‌آموز منزوی

نزدیکی (۰/۸۵ و ۰/۷۸) به عنوان هسته‌های اصلی شبکه شناسایی شدند که کنترل جریان اطلاعات آموزشی را بر عهده دارند. دانش‌آموزانی مانند 2S (با ضریب خوشه‌بندی ۰/۶۷) و S6 (با مرکزیت بینابینی ۰/۲۲) به دلیل موقعیت استراتژیک در اتصال زیرگروه‌ها، به ترتیب به عنوان «رابط گروهی» و «پل ارتباطی» طبقه‌بندی شدند. نقش «رهبر یادگیری» به S4 (با مرکزیت بینابینی ۰/۲۵ و ضریب خوشه‌بندی ۰/۳۳) نسبت داده شد که نشان‌دهنده نقش فعال وی در هدایت تعاملات درون‌خوشه‌ای است. در مقابل، دانش‌آموزان با مقادیر پایین این شاخص‌ها (مانند S7 و S8) که ارتباطات محدودی داشتند، به ترتیب به عنوان «پیرو» و «منزوی» شناسایی شدند. این طبقه‌بندی مبتنی بر تحلیل‌های کمّی ساختار شبکه و مشاهده مستقیم تعاملات آموزشی صورت گرفته است.

تحلیل پیشرفته شبکه نشان می‌دهد:

- **ساختار قدرت**: معلم اصلی (M1) با مرکزیت درجه ۰/۸۹ بیشترین نفوذ مستقیم را دارد.
- **نقش‌های واسطه‌ای**:
  - دانش‌آموز S5 با بینابینی ۰/۳۰ نقش کلیدی در انتقال اطلاعات بین گروه‌ها دارد
  - دانش‌آموز S6 با ضریب خوشه‌بندی ۰/۵ به عنوان پل ارتباطی عمل می‌کند
- **خوشه‌های یادگیری**:

- خوشه اول: $\{M۱, S۱, S۲, S۳\}$ با تمرکز بر مفاهیم پایه
- خوشه دوم: $\{M۲, S۴, S۵, S۶\}$ با تمرکز بر حل مسئله
- خوشه سوم: $\{S۷, S۸\}$ با نیاز به حمایت ویژه

- **مسیرهای یادگیری بهینه**:
  - مسیر $M_۱ \to S_۲ \to S_۴ \to S_۵ \to S_۶$ برای انتقال مفاهیم جدید
  - مسیر $M_۲ \to S_۵ \to S_۶ \to S_۷$ برای تمرین‌های تکمیلی
- **دانش‌آموزان در معرض خطر**: دانش‌آموز ۸S با نزدیکی ۰/۵۵ و درجه ۰/۲۲ نیاز به توجه ویژه دارد.

۳.۳ تحلیل پویای شبکه

با بررسی گراف در طول زمان مشاهده می‌شود:

- در هفته اول: تمرکز ارتباطات حول معلمان
- در هفته چهارم: تشکیل زیرگراف‌های دانش‌آموزی قوی
- در هفته هشتم: افزایش وزن یال‌های بین دانش‌آموزان قوی

این تحلیل‌ها به معلمان کمک می‌کند تا:

۱. گروه‌بندی‌های بهینه برای پروژه‌ها را طراحی کنند

۲. دانش‌آموزان نیازمند حمایت را شناسایی نمایند

۳. منابع آموزشی را بر اساس مسیرهای یادگیری بهینه توزیع کنند

۴ کاربردها در آموزش ریاضی

۱.۴ بهینه‌سازی گروه‌های یادگیری

با استفاده از معیار نزدیکی می‌توان دانش‌آموزانی را که سریع‌تر مفاهیم را منتقل می‌کنند شناسایی و در گروه‌بندی‌ها از آنها استفاده کرد.

۲.۴ شناسایی مشکلات ارتباطی

دانش‌آموزانی با بینابینی بالا که نمرات پایینی دارند ممکن است نشان‌دهنده مشکلات سیستم ارتباطی باشند.

۳.۴ مدیریت بار کاری معلمان

معلمانی با درجه مرکزیت بالا ممکن است تحت فشار کاری زیاد باشند و نیاز به توزیع مجدد مسئولیت‌ها وجود دارد.

۵ نتیجه‌گیری

این مقاله به‌وضوح نشان داد که کاربرد مفاهیم نظریه گراف، به‌ویژه معیارهای مرکزیت، می‌تواند تحلیلی عمیق و کاربردی از ساختار ارتباطی در محیط‌های آموزشی ارائه دهد. با استفاده از این ابزارها می‌توان الگوهای پنهان تعامل بین معلمان و دانش‌آموزان را شناسایی کرد، نقاط ضعف و قوت سیستم ارتباطی را تشخیص داد و راهکارهایی برای بهینه‌سازی روش‌های تدریس و افزایش کارایی فرآیند یادگیری طراحی نمود. یافته‌های این پژوهش نه‌تنها برای کلاس‌های درس سنتی، بلکه برای سیستم‌های آموزشی پیچیده‌تر و در مقیاس بزرگ‌تر نیز کاربرد دارد و می‌تواند زمینه‌ساز تحقیقات آینده در حوزه‌های میان‌رشته‌ای مانند علوم تربیتی، روان‌شناسی اجتماعی و مهندسی سیستم‌های آموزشی باشد. توسعه این چارچوب تحلیلی با در نظر گرفتن متغیرهای کیفی تأثیرگذار بر یادگیری و طراحی مدل‌های پویا برای شبکه‌های آموزشی، گام بعدی این پژوهش خواهد بود.

مراجع

[1] Everett, Martin G., and Stephen P. Borgatti. ”Networks containing negative ties.” Social networks 38 (2014): .111-120

[2] Haythornthwaite, Caroline. ”Exploring multiplexity: Social network structures in a computer-supported distance learning class.” The information society 17.3 (2001): .211-226

[3] Bereczki, Zoltán, et al. ”Mitigating off-target effects of small RNAs: conventional approaches, network theory and artificial intelligence.” British Journal of Pharmacology 182.2 (2025): .340-379

[4] Singh, Shashank Sheshar, et al. ”Social network analysis: A survey on process, tools, and application.” ACM Computing Surveys 56.8 (2024): .1-39

[5] Heinrich, Carl Vico, et al. ”Local Subgroup Discovery on Attributed Network Graphs.” International Symposium on Intelligent Data Analysis. Cham: Springer Nature Switzerland, 2025.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

تأثیر افزودن یال‌ها به گراف دور بر معیار بی‌نظمی آلبرتسون

راحله خاکباز [۱]

[۱] گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

این مقاله تأثیر افزودن یال‌ها به گراف دور C_n را بر معیار بی‌نظمی آلبرتسون بررسی می‌کند. گراف دور C_n، که یک گراف منظم با درجه ۲ است، دارای معیار بی‌نظمی صفر است. با افزودن یال‌ها، درجات برخی رأس‌ها افزایش می‌یابد و بی‌نظمی گراف افزایش پیدا می‌کند. نتایج نشان می‌دهند که الگوی افزودن یال‌ها (مثلاً افزودن یال‌های مجاور یا غیرمجاور) تأثیر متفاوتی بر بی‌نظمی دارد. به‌طور خاص، افزودن یال‌ها به‌صورت متقارن می‌تواند گراف را به حالت منظم بازگرداند و بی‌نظمی را به صفر برساند. این مطالعه کاربردهایی در طراحی شبکه‌های ارتباطی، تحلیل شبکه‌های اجتماعی، و بهینه‌سازی ساختارهای گرافی دارد.

کلمات کلیدی: گراف دور، معیار بی‌نظمی آلبرتسون، افزودن یال، بی‌نظمی گراف، نظریه گراف

۱ مقدمه

نظریه گراف شاخه‌ای از ریاضیات گسسته است که به مطالعه ساختارهایی متشکل از رأس‌ها و یال‌ها می‌پردازد. گراف‌ها به‌عنوان مدل‌هایی برای نمایش روابط بین اشیاء در زمینه‌های مختلفی مانند علوم کامپیوتر، شیمی محاسباتی، و طراحی شبکه‌های ارتباطی استفاده می‌شوند. گراف دور C_n، که شامل n رأس است که به‌صورت یک زنجیره بسته به هم متصل هستند، یک گراف ۲ـ منظم است، به این معنا که هر رأس دقیقاً به دو رأس دیگر متصل است. این ویژگی باعث می‌شود که معیار بی‌نظمی آلبرتسون برای C_n صفر باشد.

معیار بی‌نظمی آلبرتسون، که توسط مایکل آلبرتسون در سال ۱۹۹۷ معرفی شد [۱]، یکی از معیارهای کلیدی برای سنجش میزان انحراف یک گراف از حالت منظم است. این معیار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$irr(G) = \sum_{uv \in E(G)} |d(u) - d(v)|$$

[1] Khakbaz.rahele2000@email.com

که در آن $d(u)$ درجه رأس u است. این معیار مجموع تفاوت‌های مطلق درجات رأس‌های متصل به هر یال را محاسبه می‌کند و معیاری از میزان غیرمنظم بودن گراف ارائه می‌دهد. برای گراف دور C_n، از آنجا که تمام رأس‌ها درجه یکسانی (۲) دارند، $irr(C_n) = ۰$.

افزودن یال‌ها به گراف دور C_n درجات برخی رأس‌ها را افزایش می‌دهد و می‌تواند گراف را از حالت منظم خارج کند. هدف این مقاله بررسی تأثیر افزودن یال‌ها (در این مقاله افزودن هر یال منظور افزودن یال‌های بین رأس‌های غیرمجاور است.)، بر معیار بی‌نظمی آلبرتسون است. ما به تحلیل الگوهای مختلف افزودن یال‌ها، مانند افزودن یال‌های مجزا یا متقارن، می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که چگونه این الگوها می‌توانند بی‌نظمی را افزایش یا کاهش دهند.

این مطالعه کاربردهایی در زمینه‌هایی مانند طراحی شبکه‌های ارتباطی، تحلیل شبکه‌های اجتماعی، و مدل‌سازی مولکول‌ها در شیمی محاسباتی دارد، جایی که درک تغییرات ساختاری گراف‌ها اهمیت دارد.

۲ پیش‌نیازها

در این بخش، مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز برای ادامه مقاله معرفی می‌شوند:

- **گراف**: یک گراف $G = (V, E)$ شامل مجموعه‌ای از رأس‌ها V و مجموعه‌ای از یال‌ها E است که هر یال دو رأس را به هم متصل می‌کند. درجه یک رأس u، نشان داده شده با $d(u)$، تعداد یال‌های متصل به آن رأس است.
- **گراف دور**: گراف دور C_n دارای n رأس است که به‌صورت یک زنجیره بسته متصل هستند، به‌طوری که هر رأس به دو رأس مجاور خود متصل است. هر رأس در C_n درجه ۲ دارد.
- **معیار بی‌نظمی آلبرتسون**: برای گراف G، این معیار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$irr(G) = \sum_{uv \in E(G)} |d(u) - d(v)|$$

این معیار میزان تفاوت در درجات رأس‌های متصل به هر یال را جمع می‌کند و معیاری از بی‌نظمی گراف ارائه می‌دهد. برای گراف دور C_n، از آنجا که تمام رأس‌ها درجه یکسانی دارند، $irr(C_n) = ۰$.

۳ تحلیل افزودن یال‌ها به گراف دور

در این بخش، تأثیر افزودن یال‌ها به گراف دور C_n بر معیار بی‌نظمی آلبرتسون بررسی می‌شود.

جدول ۱: معیار بی‌نظمی پس از افزودن یک یال

گراف	n	$irr(G')$	محاسبه
$C_۳$	۳	۴	$۲ \times \lvert ۳ - ۲ \rvert + ۲ \times \lvert ۳ - ۲ \rvert = ۴$
$C_۴$	۴	۴	$۲ \times \lvert ۳ - ۲ \rvert + ۲ \times \lvert ۳ - ۲ \rvert = ۴$
$C_۵$	۵	۴	$۲ \times \lvert ۳ - ۲ \rvert + ۲ \times \lvert ۳ - ۲ \rvert = ۴$

۱.۳ گراف اولیه

گراف دور C_n دارای n رأس و n یال است، و هر رأس درجه ۲ دارد. بنابراین:

$$irr(C_n) = \sum_{uv \in E(C_n)} |d(u) - d(v)| = \sum_{uv \in E(C_n)} |۲ - ۲| = ۰$$

۲.۳ افزودن یک یال

فرض کنید یک یال uv بین دو رأس غیرمجاور در C_n اضافه شود، به‌طوری که $d(u)$ و $d(v)$ از ۲ به ۳ افزایش یابد، در حالی که درجات سایر رأس‌ها بدون تغییر باقی می‌ماند. در گراف جدید $G' = C_n + uv$:

- $d(u) = d(v) = ۳$
- درجات سایر رأس‌ها برابر با ۲ است.

برای محاسبه $irr(G')$:

- یال‌های دور که به u متصل هستند (دو یال): این یال‌ها u (درجه ۳) را به دو رأس مجاور با درجه ۲ متصل می‌کنند، بنابراین هر کدام $\lvert ۳ - ۲ \rvert = ۱$ را به بی‌نظمی اضافه می‌کنند.
- یال‌های دور که به v متصل هستند (دو یال): مشابه، هر کدام $\lvert ۳ - ۲ \rvert = ۱$ اضافه می‌کنند.
- یال که دو رأس غیر مجاور را متصل می‌کنند uv: بین دو رأس با درجه ۳، بنابراین $\lvert ۳ - ۳ \rvert = ۰$.
- سایر یال‌های دور: بین رأس‌هایی با درجه ۲، بنابراین $\lvert ۲ - ۲ \rvert = ۰$.

بنابراین:

$$irr(G') = ۲ \times \lvert ۳ - ۲ \rvert + ۲ \times \lvert ۳ - ۲ \rvert = ۲ \times ۱ + ۲ \times ۱ = ۴$$

جدول ۲: معیار بی‌نظمی پس از افزودن دو یال مجزا

گراف	n	$irr(G'')$	محاسبه
$C_۵$	۵	۸	$۸ \times \lvert ۳ - ۲ \rvert = ۸$
$C_۶$	۶	۸	$۸ \times \lvert ۳ - ۲ \rvert = ۸$

۳.۳ افزودن دو یال مجزا

فرض کنید دو یال مجزا (بدون رأس مشترک) اضافه کنیم، مثلاً یال‌های $u_۱v_۱$ و $u_۲v_۲$. در این حالت:

- $d(u_۱) = d(v_۱) = d(u_۲) = d(v_۲) = ۳$
- سایر رأس‌ها درجه ۲ دارند.

برای محاسبه $irr(G'')$:

- یال‌های دور متصل به $u_۱, v_۱, u_۲, v_۲$: هر کدام به یک رأس با درجه ۲ متصل هستند، بنابراین هر کدام $\lvert ۲ - ۳ \rvert = ۱$ اضافه می‌کنند (مجموعاً ۸ یال).
- یال‌هایی که دو رأس غیر مجاور را به هم وصل می‌کنند $u_۱v_۱$ و $u_۲v_۲$: $\lvert ۳ - ۳ \rvert = ۰$.
- سایر یال‌های دور: $\lvert ۲ - ۲ \rvert = ۰$.

بنابراین:

$$irr(G'') = ۸ \times \lvert ۳ - ۲ \rvert = ۸$$

۴.۳ افزودن یال‌ها به‌صورت متقارن

برای n زوج ($n = ۲m$)، فرض کنید m یال به‌صورت متقارن اضافه کنیم، مثلاً در $C_۶$، یال‌های $۱ - ۴$، $۲ - ۵$، و $۳ - ۶$ را اضافه کنیم تا گراف به $K_{۳,۳}$ تبدیل شود، که یک گراف ۳ـ منظم است:

- تمام رأس‌ها درجه ۳ دارند.
- برای هر یال، $\lvert d(u) - d(v) \rvert = \lvert ۳ - ۳ \rvert = ۰$.

بنابراین:

$$irr(G') = ۰$$

جدول ۳: معیار بی‌نظمی پس از افزودن یال‌های متقارن

گراف	n	$irr(G')$	توضیحات
$C_۴$	۴	۰	تبدیل به $K_۴$ با افزودن دو یال
$C_۶$	۶	۰	تبدیل به $K_{۳,۳}$ با افزودن سه یال

۴ لم و قضیه

لم ۱.۴. برای گراف دور C_n، افزودن یک یال بین دو رأس غیرمجاور منجر به $irr(G') = ۴$ می‌شود.

اثبات. با افزودن یک یال uv به C_n، درجات u و v از ۲ به ۳ افزایش می‌یابد. یال‌های دور متصل به u و v (چهار یال) هر کدام $|۳ - ۲| = ۱$ به بی‌نظمی اضافه می‌کنند. یال uv و سایر یال‌های دور هیچ تفاوتی ندارند ($|۳ - ۳| = ۰$ و $|۲ - ۲| = ۰$). بنابراین:

$$irr(G') = ۴ \times ۱ = ۴$$

□

قضیه ۱.۴. برای گراف دور C_n با افزودن k یال مجزا (بدون رأس مشترک)، معیار بی‌نظمی برابر است با:

$$irr(G) = ۴k$$

مشروط بر اینکه $۲k \leq n$.

اثبات. هر یال u_iv_i (برای $i = ۱, \ldots, k$) درجات u_i و v_i را از ۲ به ۳ افزایش می‌دهد. هر یک از این رأس‌ها به دو رأس مجاور در دور متصل است، که هر کدام درجه ۲ دارند. بنابراین، هر یال به چهار یال دور (دو یال برای u_i و دو یال برای v_i) منجر می‌شود که هر کدام $|۳ - ۲| = ۱$ به بی‌نظمی اضافه می‌کنند. یال‌هایی که دو رأس غیر مجاور را وصل می‌کنند و سایر یال‌های دور هیچ تفاوتی ندارند. بنابراین:

$$irr(G) = ۴k \times ۱ = ۴k$$

□

۵ مطالعات موردی

۱.۵ گراف $C_۴$

- **بدون افزودن یال**: $irr(C_۴) = ۰$ (گراف ۲ـ منظم).

جدول ۴: نتایج کلی برای افزودن یال‌ها به گراف دور

گراف	اقدام	$irr(G)$	توضیحات
$C_۴$	بدون افزودن	۰	گراف ۲ـمنظم
$C_۴$	افزودن یال ۱ - ۳	۴	درجات: ۲،۳،۲،۳
$C_۴$	افزودن دو یال (۱ - ۳، ۲ - ۴)	۰	تبدیل به $K_۴$، ۳ـمنظم
$C_۵$	بدون افزودن	۰	گراف ۲ـمنظم
$C_۵$	افزودن یال ۱ - ۳	۴	درجات: ۲،۳،۲،۳،۲
$C_۵$	افزودن دو یال (۱ - ۳، ۲ - ۴)	۸	درجات: ۲،۳،۳،۳،۳
$C_۶$	افزودن سه یال (۱ - ۴، ۲ - ۵، ۳ - ۶)	۰	تبدیل به $K_{۳,۳}$، ۳ـمنظم

- **افزودن یک یال (مثلاً ۱ - ۳)**: $irr(G') = ۴$ (درجات: ۲،۳،۲،۳).
- **افزودن دو یال (۱ - ۳، ۲ - ۴)**: گراف به $K_۴$ تبدیل می‌شود، ۳ـمنظم، $irr = ۰$.

۲.۵ گراف $C_۵$

- **بدون افزودن یال**: $irr(C_۵) = ۰$.
- **افزودن یک یال (مثلاً ۱ - ۳)**: $irr(G') = ۴$ (درجات: ۲،۳،۲،۳،۲).
- **افزودن دو یال مجزا (۱ - ۳، ۲ - ۴)**: $irr(G'') = ۸$ (درجات: ۲،۳،۳،۳،۳).

۳.۵ گراف $C_۶$

- **بدون افزودن یال**: $irr(C_۶) = ۰$.
- **افزودن یک یال**: $irr(G') = ۴$.
- **افزودن سه یال متقارن (۱ - ۴، ۲ - ۵، ۳ - ۶)**: گراف به $K_{۳,۳}$ تبدیل می‌شود، ۳ـمنظم، $irr = ۰$.

۶ دست‌آوردهای پژوهش

نتایج نشان می‌دهند که افزودن یال‌ها به گراف دور معمولاً بی‌نظمی را افزایش می‌دهد، اما افزودن یال‌ها به‌صورت متقارن می‌تواند گراف را به حالت منظم بازگرداند و بی‌نظمی را به صفر برساند.

این مطالعه نشان می‌دهد که الگوی افزودن یال‌ها تأثیر قابل‌توجهی بر معیار بی‌نظمی آلبرتسون دارد. افزودن یال‌های مجزا بی‌نظمی را افزایش می‌دهد، در حالی که افزودن یال‌ها به‌صورت متقارن می‌تواند گراف را به حالت منظم بازگرداند. این نتایج در طراحی شبکه‌هایی که نیاز به تعادل ساختاری دارند، مانند شبکه‌های ارتباطی یا زیستی، کاربرد دارند. تحقیقات آینده می‌تواند به بررسی الگوهای پیچیده‌تر افزودن یال‌ها یا مقایسه با سایر معیارهای بی‌نظمی، مانند شاخص سیگما، بپردازد.

۷ نتیجه‌گیری

افزودن یال‌ها به گراف دور C_n معمولاً معیار بی‌نظمی آلبرتسون را افزایش می‌دهد، اما الگوی افزودن یال‌ها تعیین‌کننده میزان این افزایش است. افزودن یال‌های مجزا بی‌نظمی را به میزان $4k$ افزایش می‌دهد، در حالی که افزودن یال‌ها به‌صورت متقارن می‌تواند گراف را به حالت منظم بازگرداند. این مطالعه پایه‌ای برای تحقیقات بیشتر در نظریه گراف و کاربردهای آن فراهم می‌کند.

مراجع

[1] Albertson, M. O. (1997). The irregularity of a graph. *Ars Combinatoria*, 46, 219–225.

[2] Abdo, H., et al. (2014). The irregularity of graphs under graph operations. *ResearchGate*.

[3] Lin, Z., et al. (2022). The general Albertson irregularity index of graphs. *AIMS Mathematics*, 7(1), 25–38.

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

تأثیر حذف یال‌ها از گراف کامل بر معیار بی‌نظمی آلبرتسون

راحله خاکباز [۱]

[۱] گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در این مقاله، تأثیر حذف یال‌ها از گراف کامل بر معیار بی‌نظمی آلبرتسون بررسی شده است. معیار بی‌نظمی آلبرتسون، که میزان انحراف یک گراف از حالت منظم را بر اساس تفاوت درجات رأس‌های متصل به یال‌ها اندازه‌گیری می‌کند، با حذف یال‌ها افزایش می‌یابد. نتایج نشان می‌دهند که حذف یال‌های مجاور نسبت به حذف یال‌های غیرمجاور بی‌نظمی بیشتری ایجاد می‌کند. همچنین، حذف یک تطبیق با اندازه m منجر به بی‌نظمی $۲m \times (n - ۲m)$ می‌شود، که در آن n تعداد رأس‌های گراف است. این مطالعه کاربردهایی در بهینه‌سازی شبکه‌ها و تحلیل ساختارهای پیچیده دارد.

کلمات کلیدی: گراف کامل، معیار بی‌نظمی آلبرتسون، حذف یال، بی‌نظمی گراف، تطبیق گراف

۱ مقدمه

گراف کامل K_n، که در آن هر رأس به تمام رأس‌های دیگر متصل است، به دلیل ساختار منظم خود، نقطه شروع مناسبی برای بررسی خواص گرافی است.

یکی از مفاهیم کلیدی در نظریه گراف، بی‌نظمی گراف است که میزان انحراف یک گراف از حالت منظم (که در آن تمام رأس‌ها درجه یکسانی دارند) را اندازه‌گیری می‌کند. معیار بی‌نظمی آلبرتسون، که توسط مایکل آلبرتسون در سال ۱۹۹۷ معرفی شد [۱]، یکی از معیارهای مهم برای سنجش بی‌نظمی است. این معیار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$irr(G) = \sum_{uv \in E(G)} |d(u) - d(v)|$$

که در آن $d(u)$ درجه رأس u است. این معیار مجموع تفاوت‌های مطلق درجه‌های رأس‌های متصل به هر یال را محاسبه می‌کند و معیاری از میزان غیرمنظم بودن گراف ارائه می‌دهد.

[1] Khakbaz.rahele2000@email.com

گراف کامل K_n به دلیل داشتن درجه یکسان $(n-1)$ برای تمام رأس‌ها، دارای معیار بی‌نظمی صفر است $(irr(K_n) = 0)$. با حذف یال‌ها از گراف کامل، توزیع درجه‌ها تغییر می‌کند و گراف به سمت غیرمنظم شدن حرکت می‌کند. این مقاله به بررسی تأثیر حذف تدریجی یال‌ها از گراف کامل بر معیار بی‌نظمی آلبرتسون می‌پردازد. هدف ما این است که نشان دهیم چگونه این فرآیند گراف را از حالت منظم به غیرمنظم تبدیل می‌کند و الگوهای مختلف حذف یال چه تأثیری بر این معیار دارند.

این مطالعه می‌تواند در کاربردهایی مانند بهینه‌سازی شبکه‌ها، تحلیل شبکه‌های اجتماعی و مدل‌سازی مولکول‌ها در شیمی محاسباتی مفید باشد، جایی که درک تغییرات ساختاری گراف‌ها اهمیت دارد.

۲ پیش‌نیازها

در این بخش، مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز برای ادامه مقاله معرفی می‌شوند:

- **گراف**: یک گراف $G = (V, E)$ شامل مجموعه‌ای از رأس‌ها V و مجموعه‌ای از یال‌ها E است که هر یال دو رأس را به هم متصل می‌کند. درجه یک رأس u، نشان داده شده با $d(u)$، تعداد یال‌های متصل به آن رأس است.
- **گراف کامل**: گراف کامل K_n دارای n رأس است و هر جفت رأس متمایز با یک یال متصل هستند. تعداد یال‌ها در K_n برابر است با $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ و هر رأس درجه $n-1$ دارد.
- **معیار بی‌نظمی آلبرتسون**: برای گراف G، این معیار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$irr(G) = \sum_{uv \in E(G)} |d(u) - d(v)|$$

این معیار میزان تفاوت در درجه‌های رأس‌ها را برای هر یال جمع می‌کند و معیاری از بی‌نظمی گراف ارائه می‌دهد. برای گراف کامل K_n، از آنجا که تمام رأس‌ها درجه یکسانی دارند، $irr(K_n) = 0$.

۳ حذف یال‌ها در گراف‌های کامل

در این بخش، تأثیر حذف یال‌ها از گراف کامل بر معیار بی‌نظمی آلبرتسون بررسی می‌شود.

۱.۳ حذف یک یال

فرض کنید از گراف کامل K_n یک یال، مثلاً uv، حذف شود. در گراف جدید G':

- درجه رأس‌های u و v از $n-1$ به $n-2$ کاهش می‌یابد.

جدول ۱: معیار بی‌نظمی پس از حذف یک یال

گراف	n	$irr(G')$	محاسبه
$K_۳$	۳	۲	$۲(۳-۲)=۲$
$K_۴$	۴	۴	$۲(۴-۲)=۴$
$K_۵$	۵	۶	$۲(۵-۲)=۶$

- درجه سایر رأس‌ها بدون تغییر $(n-۱)$ باقی می‌ماند.

برای محاسبه $irr(G')$:

- یال‌هایی که هیچ‌کدام از رأس‌هایشان u یا v نیستند، بین رأس‌هایی با درجه $n-۱$ هستند و بنابراین $|d(x)-d(y)|=۰$.
- یال‌های متصل به u (به جز v)، یعنی $n-۲$ یال به رأس‌های دیگر با درجه $n-۱$، تفاوت $|d(u)-d(w)|=|(n-۲)-(n-۱)|=۱$ دارند.
- یال‌های متصل به v (به جز u)، نیز $n-۲$ یال، تفاوت ۱ دارند.
- یال uv حذف شده و در محاسبه شرکت ندارد.

بنابراین:

$$irr(G')=۱\times(n-۲)+۱\times(n-۲)=۲(n-۲)$$

۲.۳ حذف دو یال

۱.۲.۳ حالت اول: حذف دو یال مجاور

فرض کنید یال‌های uv و uw حذف شوند (رأس مشترک u):

- $d(u)=n-۳$
- $d(v)=n-۲$
- $d(w)=n-۲$
- $d(x)=n-۱$ برای سایر رأس‌ها

محاسبه $irr(G'')$:

- یال‌های متصل به u به رأس‌های دیگر $(x\neq v,w)$، تعداد $n-۳$، تفاوت $|d(u)-d(x)|=|(n-۳)-(n-۱)|=۲$.

جدول ۲: معیار بی‌نظمی پس از حذف دو یال مجاور

گراف	n	$irr(G'')$	محاسبه
$K_۴$	۴	۴	$۴(۴-۳)=۴$
$K_۵$	۵	۸	$۴(۵-۳)=۸$

- یال‌های متصل به v به رأس‌های دیگر ($x \neq u, v$)، شامل $x = w$ با تفاوت ۰ و $n-۳$ رأس دیگر با تفاوت ۱.
- یال‌های متصل به w به رأس‌های دیگر ($x \neq u, w$)، شامل $x = v$ با تفاوت ۰ و $n-۳$ رأس دیگر با تفاوت ۱.
- یال vw با تفاوت ۰.
- سایر یال‌ها تفاوت ۰ دارند.

بنابراین:

$$irr(G'') = ۲(n-۳) + ۱(n-۳) + ۱(n-۳) = ۴(n-۳)$$

۲.۲.۳ حالت دوم: حذف دو یال غیرمجاور

فرض کنید یال‌های uv و xy حذف شوند ($\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$):

- $d(u) = d(v) = d(x) = d(y) = n-۲$
- $d(z) = n-۱$ برای سایر رأس‌ها

محاسبه $irr(G'')$:

- یال‌های بین $\{u, v\}$ و $\{x, y\}$ (۴ یال) تفاوت ۰ دارند.
- یال‌های بین $\{u, v\}$ و سایر رأس‌ها ($۲(n-۴)$) تفاوت ۱ دارند.
- یال‌های بین $\{x, y\}$ و سایر رأس‌ها ($۲(n-۴)$) تفاوت ۱ دارند.
- سایر یال‌ها تفاوت ۰ دارند.

بنابراین:

$$irr(G'') = ۲(n-۴) + ۲(n-۴) = ۴(n-۴)$$

این نتایج نشان می‌دهند که حذف یال‌های مجاور در مقایسه با یال‌های غیرمجاور معمولاً بی‌نظمی بیشتری ایجاد می‌کند.

جدول ۳: معیار بی‌نظمی پس از حذف دو یال غیرمجاور

گراف	n	$irr(G'')$	محاسبه
$K_۴$	۴	۰	$۴(۴-۴)=۰$
$K_۵$	۵	۴	$۴(۵-۴)=۴$

۴ مطالعات موردی

۱.۴ گراف $K_۴$

- **حذف یک یال**: $irr(G') = ۲(۴-۲) = ۴$
- **حذف دو یال مجاور**: $irr(G'') = ۴(۴-۳) = ۴$
- **حذف دو یال غیرمجاور**: $irr(G'') = ۴(۴-۴) = ۰$ (گراف $K_{۲,۲}$ منظم است)

۲.۴ گراف $K_۵$

- **حذف یک یال**: $irr(G') = ۲(۵-۲) = ۶$
- **حذف دو یال مجاور**: $irr(G'') = ۴(۵-۳) = ۸$
- **حذف دو یال غیرمجاور**: $irr(G'') = ۴(۵-۴) = ۴$

۵ حذف یک تطبیق

یکی از الگوهای خاص حذف یال، حذف یک تطبیق (مجموعه‌ای از یال‌های بدون رأس مشترک) است. فرض کنید از K_n یک تطبیق با اندازه m حذف شود، به طوری که $m \leq \lfloor n/۲ \rfloor$. در این حالت:

- $۲m$ رأس با درجه $n-۲$ (رأس‌های متصل به یال‌های حذف‌شده).
- $n-۲m$ رأس با درجه $n-۱$ (رأس‌های بدون تغییر).

برای محاسبه $irr(G)$:

- یال‌های بین رأس‌های با درجه یکسان ($n-۲$ یا $n-۱$) تفاوت ۰ دارند.
- یال‌های بین رأس‌های با درجه‌های متفاوت ($n-۲$ و $n-۱$) تفاوت ۱ دارند.

تعداد یال‌های بین مجموعه S (رأس‌های با درجه $n-۲$) و $V \setminus S$ (رأس‌های با درجه $n-۱$) برابر است با $|S| \times |V \setminus S| = ۲m \times (n-۲m)$. بنابراین:

جدول ۴: معیار بی‌نظمی پس از حذف یک تطبیق

گراف	n	m	$irr(G)$	محاسبه
$K_۴$	۴	۱	۴	$۲ \times ۱ \times (۴-۲) = ۴$
$K_۴$	۴	۲	۰	$۲ \times ۲ \times (۴-۴) = ۰$
$K_۵$	۵	۱	۶	$۲ \times ۱ \times (۵-۲) = ۶$
$K_۵$	۵	۲	۴	$۲ \times ۲ \times (۵-۴) = ۴$

$$irr(G) = ۲m \times (n - ۲m)$$

برای $m = \lfloor n/۲ \rfloor$:

- اگر n زوج باشد، $m = n/۲$، و $|S| = n$، $|V \setminus S| = ۰$، بنابراین $irr(G) = ۰$ (گراف منظم است).
- اگر n فرد باشد، $m = \lfloor n/۲ \rfloor$، و $irr(G) = ۲m \times (n - ۲m)$.

۶ دست‌آوردها

برای حذف k یال، باید الگوهای مختلف حذف را بررسی کنیم. نتایج اولیه نشان می‌دهد که حذف یال‌های مجاور معمولاً بی‌نظمی بیشتری نسبت به حذف یال‌های غیرمجاور ایجاد می‌کند. برای حذف یک تطبیق با اندازه m، معیار بی‌نظمی به صورت$irr(G) = ۲m \times (n - ۲m)$ محاسبه می‌شود، که برای n زوج و $m = n/۲$ صفر است. این مطالعه پایه‌ای برای تحقیقات بیشتر در این زمینه فراهم می‌کند و می‌تواند در کاربردهای عملی مانند بهینه‌سازی شبکه‌ها و تحلیل ساختارهای پیچیده مفید باشد.

مراجع

[1] Albertson, M. O. (1997), *The irregularity of a graph*, Ars Combinatoria **46**, 219–225.

[2] Abdo, H., Dimitrov, D. (2014), *The irregularity of graphs under graph operations*, ResearchGate.

[3] Lin, Z., et al. (2022), *The general Albertson irregularity index of graphs*, AIMS Mathematics **7**(1), 25–38.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

ویژگی فضاهای موضعاً QHC

فاطمه حیدری [۱]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه کاشان

چکیده

هدف از این مقاله بیان مشخصات فضای QHCو معرفی فضای موضعاً QHC است. در انتها به بررسی نگاشت هایی می پردازیم که تحت آنها تصویر فضای موضعاً QHC، موضعاً QHC خواهد بود.

کلمات کلیدی: فضای QHC، فضای موضعاً QHC، αـباز و پیش‌ـباز

۱ مقدمه

فرض کنیم (X,τ) فضای توپولوژیک باشد ، $A\subset X$ را زیرمجموعه QHC فضای (X,τ) گوییم، هرگاه به ازای هر پوشش باز $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ برای مجموعه A از عناصر τ، زیرمجموعه‌ی متناهی $I.$ از I موجود باشد به‌طوری‌که $A\subseteq \bigcup_{\alpha\in I.} cl_\tau(U_\alpha)$. در حالتی خاص که$A=X$ گوییم، (X,τ) فضای QHCاست.اگر (A,τ_A) فضایی QHC باشد، گوییم A زیرفضای QHC در (X,τ) است. به‌راحتی دیده می‌شود که هر زیرفضای QHC از فضای توپولوژیک، زیرمجموعه QHC است. اما عکس این مطلب برقرار نیست [۴]. همچنین از تعریف برمی‌آید که هرفضای فشرده، QHC است، اما در [۶](ص.۱۲۷) و [۱](ص.۱۱۹-۱۲۰) با ذکر مثالی بیان شده است که عکس مطلب برقرار نیست.

تعریف ۱.۱. ۱. زیرمجموعه‌ی A از فضای (X,τ) را نیم - باز (متناظراً α- باز ، پیش - باز) هرگاه $A\subseteq cl_\tau(int_\tau(A))$ (متناظراً $A\subseteq int_\tau\big(cl_\tau(int_\tau(A))\big)$، $A\subseteq cl_\tau(int_\tau(cl_\tau(A)))$)

۲. زیرمجموعه‌ی Aاز فضای (X,τ) را باز منظم(متناظراً بسته منظم) نامیم، هرگاه $A=int_\tau(cl_\tau(A))$ (متناظراً $A=cl_\tau(int_\tau(A))$). از آنجاکه خانواده‌ی بازهای منظم فضا، نسبت به اشتراک

[1] zahraheidari50@gmail.com

متناهی بسته است، لذا تشکیل یک پایه برای توپولوژی درشت‌تر τ_s بر X می‌دهد. فضای (X, τ_s) را نیم منظم سازی فضای (X, τ) می‌نامیم. خاصیت توپولوژیک P را نیم منظم گوییم، اگر فضای (X, τ) خاصیت P را داشته باشد اگر و تنها اگر (X, τ_s) نیز این خاصیت را دارا باشد. توپولوژی τ را نیم‌منظم نامیم، هرگاه $\tau = \tau_s$.

۲ ویژگی های فضای QHC و موضعاً QHC

قضیه ۱.۲. در هر فضای توپولوژیک (X, τ) حکم‌های زیر برقرارند:

۱. فضای توپولوژیک (X, τ)، QHC است اگروتنها اگر هرزیرمجموعه سره بسته منظم آن زیرفضای QHC باشد.

۲. اجتماع تعداد متناهی زیرفضای QHC از یک فضا، زیرفضای QHC است.

۳. هر فضای منظم QHC، فشرده است.

۴. خاصیت QHC مسری است.(خاصیت توپولوژیکی P، مسری است، اگر زیرمجموعه‌ی چگال فضا خاصیت P را داشته باشد، آن‌گاه کل فضا خاصیت P را داشته باشد.)

قضیه ۲.۲. ۱. فضای (X, τ) هاسدورف فشرده است اگر و تنها اگر QHC و منظم باشد.

۲. هر زیرمجموعه‌ی QHC از فضای هاسدورف، بسته است.

اثبات. ۱. می دانیم هر فضای فشرده هاسدورف، منظم و هرفضای فشرده، QHC است.
برعکس، فرض کنیم $\{V_i \mid i \in I\} \in \tau$ پوششی برای X باشد، بنابه فرض و اینکه X فضایی منظم است و به ازای هر $i \in I$، باز U_i وجود خواهد داشت که $cl_\tau(U_i) \subset V_i$، نتیجه می‌شود X فضایی فشرده است.

۲. فرض کنیم (X, τ) هاسدورف و $A \subset X$، زیرمجموعه‌یQHC باشد به‌طوری که $x \notin A$.
بنا به هاسدورف بودن فضا، برای هر $a \in A$، $V_a \in \tau$ چنان موجود است که $a \in V_a$ و $x \in cl_\tau(V_a)$. بنابراین $A \subset \bigcup_{a \in A} V_a$ و بنابه فرض، زیرمجموعه‌ی متناهی $A. \subset A$وجود دارد که $A \subset \bigcup_{a \in A.} cl_\tau(V_a)$. لذا برای

$$G = \bigcap_{a \in A.} (X \setminus cl_\tau(V_a)) \subset X \setminus A$$

می‌توان گفت $x \in G \in \tau$ و $G \cap A = \oslash$، در نتیجه A بسته است.

□

تعریف ۱.۲. فضای (X,τ)را موضعاً QHC گوییم، هرگاه هر نقطه X، همسایگی باز از τ دارد که زیرفضای QHC از(X,τ) است. واضح است که هر فضای QHC، موضعاً QHC است، اما بنابر [۵]، (مثال۱.۴) عکس مطلب برقرار نیست.

قضیه ۳.۲. فرض کنیم فضای توپولوژیک باشد. گزاره‌های زیر معادلند:

۱. فضای (X,τ)، موضعاً QHC است.

۲. هر نقطه X، همسایگی باز از τ دارد که زیرمجموعه‌یQHCاست.

۳. هر نقطه $x\in X$، همسایگی باز U_x از τ دارد به طوری‌که $(int_\tau cl_\tau(U_x))$ زیرفضای QHC (زیرمجموعه)است.

۴. برای هر نقطه $x\in X$، مجموعه‌ی $P_x\in PO(X,\tau)$ وجود دارد که $x\in P_x$ و P_x زیرفضای (زیرمجموعه ی) QHC است.

۵. برای هر نقطه $x\in X$، مجموعه‌ی $P_x\in PO(X,\tau)$ وجود دارد که $x\in P_x$ و $int_\tau(cl_\tau(P_x))$ زیرفضای (زیرمجموعه‌ی) QHC است.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم (X,τ) فضای موضعاً QHC وA زیرمجموعه بسته و باز در فضای X باشد. در این صورت (A,τ_A) موضعاً QHC است.

اثبات. فضای (X,τ) موضعاً QHC است، پس برای هر $x\in X$، همسایگی باز U_x از τ وجود دارد که زیرمجموعه‌ی QHC است. ازآنجاکه هم باز و هم بسته است ، بنابه۴.۲، می‌توان نوشت $U_x\cap A$ زیرفضای QHC از (A,τ_A) است. حال $x\in U_x\cap A\in\tau_A$ و با استفاده از ۳.۲ (۲)، نتیجه می‌گیریم که $(A,\tau_A$ موضعاً QHC است. □

گزاره ۸. فرض کنیم $A,B\in PO(X,\tau)$ به‌طوری که $B\subset A$. در این صورت B، زیرفضای QHC از (A,τ_A) است اگر وتنها اگر B، زیرفضای QHC از(X,τ) باشد.

قضیه ۵.۲. فضای (X,τ)، موضعاً QHC است اگر وتنها اگر برای هر$x\in X$، $U_x\in PO(X,\tau)$ به‌گونه‌ای موجود باشد که $x\in U_x$ و (U_x,τ_{U_x}) موضعاً QHC باشد.

اثبات. اگر(X,τ)، فضای موضعاً QHC باشد، آنگاه بنابه،۳.۲(۴)نتیجه حاصل می‌شود. برعکس، فرض کنیم $x\in X$، $x\in U_x\in PO(X,\tau)$ و (U_x,τ_{U_x}) موضعاً QHC باشد. بنابراین همسایگی باز $x\in V_x$ از τ_{U_x} موجود است به‌طوری که زیرفضای QHC از (V_x,τ_{V_x}) باشد. واضح است که $V_x\in PO(X,\tau)$، لذا بنابه۸،(V_x,τ_{V_x}) زیرفضای QHC از (X,τ) است و بنابراین با استفاده از ۳.۲(۴)،(X,τ)،موضعاً QHC است. □

۳ دست‌آوردهای پژوهش

تعریف ۱.۳. فرض کنیم $f : X \to Y$ نگاشتی از فضای توپولوژیک X به فضای Y باشد.

۱. نگاشت f را نگاشت پیش باز می‌نامیم،هرگاه تصویر هر زیرمجموعه‌ی پیش باز A از فضای X، در فضای Y پیش باز باشد.

۲. نگاشت f را α ـ پیوسته گوییم،هرگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی باز V از فضای Y، $f^{-1}(V)$ در فضای X، α ـ باز باشد.

۳. نگاشت f را α ـ ناپابرجا گوییم، هرگاه تصویر وارون هر زیرمجموعه‌ی α ـ باز از فضای Y، زیرمجموعه‌ای α ـ باز در فضای X باشد.

۴. نگاشت f را تقریباً پیوسته نامیم، هرگاه تصویر وارون هر باز منظم (بسته منظم) در فضای Y، زیرمجموعه‌ی باز (بسته) در فضای X باشد.

گزاره ۹. فرض کنیم f نگاشتی پوشا از فضای موضعاً QHC، (X,τ) به هرفضای (Y,σ) باشد. اگر (Y,σ) موضعاً QHC نباشد، آنگاه هیچکدام از شرایط زیر اتفاق نمی‌افتد:

۱. f باز و پیوسته باشد.

۲. f پیش باز و پیوسته باشد.

۳. f پیش باز وαـ ناپابرجا باشد.

گزاره ۱۰. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک و $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$.

۱. اگر f نگاشت αـ پیوسته (یا پیوسته و یا αـ ناپابرجا) و $A \subseteq X$ زیرمجموعه‌ی QHC از (X,τ) باشد، آنگاه $f(A)$ زیرمجموعه‌ی QHC از است.

۲. اگرf نگاشتی پوشا، پیوسته (یاα ـ ناپابرجا) و (X,τ) فضایی QHC باشد، آنگاه (Y,σ) زیرفضای QHC است.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم (X,τ) فضای موضعاً QHC و $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ نگاشت پوشا، پیش باز و α ـ پیوسته باشد، آنگاه فضای (Y,σ)، موضعاً QHC است.

اثبات. فرض کنیم $y \in Y$ و برای $x \in X$ خاصی، داشته باشیم $f(x) = y$. بنابه فرض و قضیه۳.۲(۲)،همسایگی باز U_x از τ وجود دارد که $x \in U_x$ و زیرمجموعه‌ی QHC از(X,τ) است. ازآنجا که f پیش باز و αـ پیوسته است، پس باتوجه به ۱۰، $f(U_x) \in PO(Y,\sigma)$، زیرمجموعه‌ی QHC از (Y,σ) است. در نتیجه با استفاده از۳.۲(۳) فضای (Y,σ)، موضعاً QHC است. □

قضیه ۲.۳. فرض کنیم (Y,σ) فضای نیم منظم و نگاشت $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ تقریباً پیوسته باشد. اگر S زیرمجموعه QHC از (X,τ) باشد، آنگاه $f(S)$ زیرمجموعه QHC در (Y,σ) است.

گزاره ۱۱. فرض کنیم (Y,σ) فضایی نیم منظم و $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ نگاشتی تقریباً پیوسته و باز و یک به یک باشد. اگر (X,τ) موضعاً QHC باشد، آنگاه (Y,σ) نیز موضعاً QHC است.

اثبات. فرض کنیم $y\in Y$ و برای $x\in X$، قرار می‌دهیم $f(x)=y$. طبق قضیه۳.۲،همسایگی باز V_x از x در τ وجود دارد که زیرمجموعه QHC است. باتوجه به فرض و قضیه۲.۳،$f(V_x)$ زیرمجموعه باز و QHC از است، بنابراین (Y,σ) موضعاً QHC است. □

نتیجه ۱.۳. فرض کنیم $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ نگاشتی α- ناپابرجا و باز باشد. اگر(X,τ) موضعاً QHC باشد، آنگاه (Y,σ) نیز موضعاً QHC است.

اثبات. با استفاده از گزاره۱۰،و روش اثبات گزاره ۱۱ نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۳.۳. فرض کنیم $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد.اگر حاصلضرب $\prod_{i\in I}X_i$، موضعاً QHC باشد، آنگاه به ازای هر $i\in I$، (X_i,τ_i) فضایی موضعاً QHCاست.

مراجع

[1] Arhur Seen, L., Arthur Seebach, J., (1995), *counterexample in Topology*, Dover Publications.

[2] Duszynski, Z., (2010), *On quasi H-closed subspaces*, Institute of Mathematics. 59, 187–197.

[3] Ghahramani, F., Loy, R. J. and Zhang, Y., (2008), *Generalized notions of amenability II*, J. Funct. Anal., 254, 1776–1810.

[4] Porter, J. R., Thomas, J.,(1969) *On H-closed and minimal Hausdorff spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 138., 159–170.

[5] Noiri, T., (1978) *On S-closed subspaces*, Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 64., 157–162.

[6] S. Willard, (1968), *General Topology*, Addison Wesley.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

مدل سازی داده‌های چند متغیره آمیخته طولی پیوسته_گسسته با استفاده از توابع مفصل جفتی واین

کوثر پولادگر [۱] محمدرضا آخوند [۲] محمدرضا زادکرمی [۳]

[۱,۲,۳] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

با ظهور داده‌های چند متغیره با ابعاد زیاد، نیاز به توسعه کلاس‌های توزیع چند متغیره انعطاف‌پذیر بیش از پیش احساس می‌شود. رویکرد مفصل این امکان را فراهم می‌کند که مدل‌های حاشیه‌ای برای هر متغیر به‌طور جداگانه ساخته شوند و سپس با یک ساختار وابستگی که توسط تابع مفصل مشخص می‌شود، ترکیب گردند. برای مدت طولانی، کلاس مفصل‌های چند متغیره به خانواده‌های بیضوی و خانواده‌های ارشمیدسی محدود بود که هرکدام محدودیت‌هایی از نظر تقارن و وابستگی در دنباله‌ها دارند. کلاس مفصل‌های واین این محدودیت‌ها را از طریق ساخت یک مدل چند متغیره با استفاده از بلوک‌های دو متغیره برطرف می‌کند. در این پژوهش، مدلی مبتنی بر تابع مفصل جفتی واین برای تحلیل داده‌های طولی چند متغیره با پاسخ‌های آمیخته (پیوسته و گسسته) ارائه شده است. این مدل به‌طور همزمان همبستگی میان پاسخ‌های مختلف و وابستگی‌های زمانی میان اندازه‌گیری‌های تکراری را مدل‌سازی می‌کند. در ادامه، این مدل بر روی داده‌های رشد طولی نوزادان مورد مطالعه قرار گرفت. در این تحقیق، ابعاد مختلف رشد نوزادان شامل قد، دورسر و وزن بررسی شدند و تأثیر عوامل مختلفی بر این ابعاد ارزیابی گردید. به‌منظور تحلیل دقیق‌تر، ابتدا مدل به‌صورت تک‌متغیره برای هر یک از متغیرهای مستقل اجرا شد تا تأثیر هر متغیر به‌طور جداگانه بررسی شود. سپس، متغیرهایی که در تحلیل تک متغیره معنی‌دار بودند، به‌صورت هم‌زمان در مدل چند متغیره وارد شدند. مدل چند متغیره تصویری دقیق‌تر و جامع‌تر از روابط میان این متغیرها ارائه می‌دهد. این مدل می‌تواند به‌عنوان ابزاری کاربردی در برنامه‌ریزی و مداخلات بهداشتی برای بهبود سلامت نوزادان به‌کار رود.

کلمات کلیدی: داده‌های چند متغیره، داده‌های آمیخته طولی، توابع مفصل جفتی واین، رشد نوزاد.

۱ مقدمه

تجزیه و تحلیل داده‌های طولی چند متغیره آمیخته یکی از مهم‌ترین چالش‌ها در علوم مختلف است. این نوع داده‌ها به محققان این امکان را می‌دهد که روند تکاملی توام چندین پیشامد را در طول زمان مورد بررسی قرار دهند و ارتباطات میان پاسخ‌های مختلف را درک کنند، استوبر [۱] و همکاران (۲۰۱۵). در این مقاله مدل خطی تعمیم‌یافته‌ی آمیخته مبتنی بر مفصل‌های واین برای تحلیل وابستگی میان پاسخ‌ها به‌کار گرفته که وابستگی‌های پیچیده میان پاسخ‌های مختلف را به‌طور مؤثر در نظر می‌گیرد. به‌عنوان کاربرد، تحلیل داده‌های رشد نوزاد شامل قد، دور سر و وزن ارائه شده است.

[1] kosarpooladgar96@gmail.com
[2] mr.akhoond@scu.ac.ir
[3] zadkarami_m@scu.ac.ir
[1] Stober

۲ مدل خطی تعمیم یافته آمیخته

فرض کنید در مدل‌های خطی تعمیم یافته آمیخته $Y_{ij} = (Y_{ij۱}, Yi_{j۲}, \ldots, Y_{ijm})'$ برداری از پیشامد برای نمونه در tـامین زمان باشد. فرض کنید مشاهدات از افراد مختلف از یکدیگر مستقل هستند و به شرط اثرات تصادفی b_i از نمونه iـام، Y_{ij}ها مستقل هستند و هر عنصر Y_{ijr} از یک توزیع در خانواده نمایی پیروی می‌کند.

$$f(y_{ijr}|b_i) = \exp\left(\frac{\vartheta_{iijr}y_{ijr} - a_r(\vartheta_{ijr}) + c_r(y_{ijr}, \varphi_r)}{\varphi_r}\right).$$

که در آن ϑijr پارامتر داری مقدار واقعی و φ_r پارامتر پراکندگی است و $a_r(.)$ تابع مولد کومولات [۲] است. به راحتی می‌توان نشان داد:

$$E(Y_{ijr}|b_i) = \mu_{ijr} = a_r^{'}(\vartheta_{ijr}),$$
$$\text{var}(Y_{ijr}|b_i) = \varphi_r\vartheta(\mu_{ijr}).$$

فرض کنید حاشیه‌ها با مدل خطی تعمیم یافته به صورت $g_r(\mu_{ijr}) = x_{ijr}^{'}\beta_r + z_{ijr}^{'}b_i$ مدل‌سازی می‌شوند که β_r بردار ضرایب رگرسیون است و b_i اثرات تصادفی مستقل می‌باشد. g_r نیز یک تابع پیوند می‌باشد. تابع چگالی حاشیه‌ای $Y_i = (Y_{i۱}, \ldots, Y_{in_i})$ به صورت

$$f(y_i) = \int_{\mathcal{B}} f(y_i|b_i)d\mathcal{G}(b_i) = \int_{\mathcal{B}} \prod_{j=۱}^{n_i} f(y_i|b_i)d\mathcal{G}(b_i)$$

تعریف می‌شود که $\mathcal{B}$ تکیه‌گاه تابع $\mathcal{G}(.)$ است و $f(y_{ij}|b_i)$ یک تابع چگالی شرطی mـبعدی است که دارای حاشیه‌های شرطی $f(y_{ij}|b_i)$ می‌باشد.

۳ ساختار مفصل جفتی واین برای متغیرهای آمیخته

فرض کنید بردار تصادفی از نوع آمیخته باشد. فرض کنید اولین متغیر $m_۱$ پیوسته باشد و بقیه متغیرها گسسته باشند. تابع چگالی توام آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} f(y_۱, y_۲, \ldots, y_m) =& f(y_۱, y_۲, \ldots, y_m)P(Y_{m+۱} = y_{m+۱}, \ldots, Y_m = y_m|y_۱, \ldots, y_m) \\ =& \prod_{r=۲}^{m} f(y_r|y_{r-۱}, \ldots, y_۱)f_۱(y_۱). \end{aligned}$$

[2] Cumulant Generating Function

تجزیه مفصل دی‌واین در حالت آمیخته به صورت زیر است، ژانگ [۳] و همکاران (۲۰۲۰):

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \prod_{r_1=2}^{m_1} \prod_{s=1}^{r_1-1} c_{r,s}(u_{r,s+1} u_{s,r-1} \prod_{t=1}^{m_1} f_t(y_t) \prod_{r_2=m_1+1}^{m} (u_{r_2,1} - u^{-}_{r_2,1}).$$

که در آن u^- حد سمت چپ u می‌باشد. قسمت اول تجزیه با متغیرهای پیوسته از Y تطابق دارد و قسمت دوم تجزیه مربوط به متغیرهای گسسته Y است.

۴ برآورد ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید $\psi = (\beta', \varphi', \theta', \eta')$ نشان دهنده‌ی پارامترهای مجهول باشد که $\beta = (\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_m)$ پارامترهای رگرسیونی می‌باشند؛ و $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)'$ نشان دهنده پارامترهای پراکندگی باشد و $\theta = \{\theta_{r,s} | 1 \leq s < r \leq m\}$ پارامترهای تابع مفصل و η پارامترهای موجود در $\mathcal{G}(.)$ می‌باشد لگاریتم تابع درستنمایی به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} l(\psi; y) &= \sum_{i=1}^{n} \log \int_{\mathcal{B}} \prod_{j=1}^{n_i} f(y_{ij}; \beta, \varphi, \theta | b_i) d\mathcal{G}(b_i; \eta) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \log \int_{\mathcal{B}} \prod_{j=1}^{n_i} \Bigg\{ \prod_{r_1=2}^{m_1} \prod_{s=1}^{r_1-1} c_{r_1,s}(u_{ij|r_1,s+1}, u_{ij|s,r_1-1}) \prod_{l=1}^{m_1} f(y_{ijl}|b_i) \\ &\times \prod_{r_2=m_1+1}^{m} (u_{ij|r_2,1} - \overline{u}_{ij|r_2,1}) \Bigg\} d\mathcal{G}(b_i; \eta) \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} u_{ij|r,s} &= F(y_{ijr} | y_{ij(r-1)}, \ldots, y_{ijs}, b), \\ u_{ij|s,r} &= F(y_{ijs} | y_{ijr}, \ldots, y_{ij(s+1)}, b_i), \\ u_{ij|r,r} &= F(y_{ijr} | b_i)(s < r). \end{aligned}$$

$\overline{u}$ حد سمت چپ u می‌باشد.

از آن‌جا که در مدل دی‌واین با داده‌های آمیخته و فرض نرمال بودن اثرات تصادفی، تابع درستنمایی به‌صورت تحلیلی قابل محاسبه نیست، از تقریب‌های عددی استفاده می‌شود. با این حال، فرض توزیع پارامتری برای اثرات تصادفی می‌تواند محدودکننده باشد و برآوردهای اُریبی به دنبال داشته باشد.

[3] Zhang

جدول ۱: اثر متغیرهای مستقل بر متغیر وابسته قد

وابسته متغیر	مستقل متغیر	درستنمایی ماکسیمم برآورد	استاندارد خطای	تی آماره مطلق قدر
قد	پدر سن	۰/۰۸۴	۰/۰۱۷	۴/۷۹۳*
	مادر بدنی توده شاخص	۰/۰۴۳	۰/۰۲۱	۲/۰۱۹*
	پدر بدنی توده شاخص	۰/۰۱۴	۰/۰۱	۱/۳۷۴
	زایمان وضعیت	۰/۱۹۵	۰/۱۸۷	۱/۰۴۶
	روز شبانه در شیردهی دفعات تعداد	۰/۰۳۸	۰/۰۲۷	۱/۳۶۱
	مادر توسط وغلات نان گروه مصرف	۰/۵۹۵	۰/۱۲۱	۴/۸۸۶*
	مادر توسط لبنیات و شیر گروه مصرف	۰/۰۱۴-	۰/۰۱۶	۰/۹۰۶
	مادر توسط پروتئن و گوشت گروه مصرف	۰/۰۴۹-	۰/۰۲۹	۱/۷۱۹*
	مادر توسط میوه‌ها گروه مصرف	۰/۰۲۸	۰/۰۱۷	۱/۲۳۵
	مادر توسط سبزیجات گروه مصرف	۰/۰۵۶-	۰/۰۲۷	۲/۰۷۲*
	مادر توسط قندها و چربی‌ها گروه مصرف	۰/۰۱۴-	۰/۰۰۷	۱/۸۴۳*
	بارداری زمان مدت	۰/۰۰۲-	۰/۰۲۵	۰/۰۸۴
	تولد رتبه	۰/۵۹۵	۰/۱۱۲	۴/۸۸۶*
	جنسیت	۱/۴۰۶	۰/۱۹۰	۷/۳۶۸*
	مادر سن	۰/۰۲۱	۰/۰۱۷	۱/۲۰۴

۵ مثال کاربردی

رشد نوزاد یکی از مهم‌ترین شاخص‌های سلامت در مراحل اولیه زندگی است و نقش اساسی در پیش‌بینی وضعیت سلامت در مراحل بعدی زندگی ایفا می‌کند. در این مطالعه، داده‌ها از یک تحقیق طولی با هدف بررسی رشد نوزادان در مناطق روستایی بوشهر جمع‌آوری شد. ۱۲۰ کودک متولد شده در سال ۱۳۹۴ از بدو تولد تا ۹ ماهگی تحت نظارت قرار گرفتند تا عوامل مؤثر بر شاخص‌های رشد آن‌ها ارزیابی شود، لولو و همکاران (۲۰۱۶). متغیر پاسخ قد و دورسر هر دو از نوع پیوسته هستند و متغیر پاسخ وزن به دلیل تطبیق بهتر با روش مدل‌سازی مفصل به صورت گسسته دودویی دسته‌بندی شده است.

در این مطالعه، به‌منظور بررسی تأثیر متغیرهای مستقل بر متغیرهای وابسته، از مدل خطی تعمیم یافته آمیخته بر اساس مفصل استفاده شد، گدازی و همکاران (۲۰۱۶). برآورد پارامترها در دو مرحله انجام گرفت. در مرحله اول، تمام متغیرهای مستقل به‌صورت جداگانه وارد مدل شدند. در این مرحله، مقادیر برآورد شده شامل برآورد ماکسیمم درستنمایی، خطای استاندارد و مقدار آماره تی محاسبه گردید. برای تعیین معنی‌داری ضرایب، مقادیر تی با مقدار بحرانی ۹۶/۱± در سطح معنی داری ۰۵/۰ مقایسه شدند. متغیرهایی که اثر معنی‌داری داشتند، شناسایی و در مرحله دوم به‌صورت همزمان وارد مدل نهایی شدند.

بر اساس نتایج جدول ۴، برخی متغیرهای مستقل تأثیر معنی داری بر رشد قد نوزدان دارند. از جمله این متغیرها می‌توان به سن پدر، شاخص توده بدنی مادر، و مصرف گروه‌های غذایی نظیر نان و غلات و مصرف گروه گوشت و پروتئین جنسیت و رتبه تولد اشاره کرد

مطابق جدول ۴، متغیرهای مستقل رتبه تولد، مصرف گروه نان و غلات و سبزیجات توسط مادر، تعداد دفعات شیردهی در شبانه روز، شاخص توده بدنی پدر، شاخص توده بدنی مادر جنسیت و سن پدر تاثیر معنی‌دار بر متغیر وابسته دورسر دارند. و سایر متغیرهای مستقل بر دورسر تاثیر معنی‌داری ندارند.

براساس نتایج جدول ۵، متغیرهای مستقل مصرف گروه میوه‌ها توسط مادر، تعداد دفعات شیردهی

جدول ۲: اثر متغیرهای مستقل بر متغیر وابسته دور سر

تی آماره مطلق قدر	استاندارد خطای	درستنمایی برآورد	مستقل متغیر	وابسته متغیر
*۲/۹۰۱	۰/۰۰۹	۰/۰۲۸	پدر سن	سر دور
*۳/۱۱۵	۰/۰۱۲	۰/۰۳۷-	مادر بدنی توده شاخص	
*۲/۲۸۶	۰/۰۰۵	۰/۰۱۳-	پدر بدنی توده شاخص	
۰/۰۶۴	۰/۱۰۵	۰/۰۰۶-	زایمان وضعیت	
*۴/۷۸۵	۰/۰۱۵	۰/۰۷۳	روز شبانه در شیردهی دفعات تعداد	
*۲/۸۰۴	۰/۰۶۸	۰/۱۹۲	مادر توسط وغلات نان گروه مصرف	
۰/۲۵۸	۰/۰۰۸	۰/۰۰۲-	مادر توسط لبنیات و شیر گروه مصرف	
۱/۱۵۸	۰/۰۱۵	۰/۰۱۸	مادر توسط پروتئن و گوشت گروه مصرف	
*۲/۹۴۳	۰/۰۰۹	۰/۰۲۸	مادر توسط میوه‌ها گروه مصرف	
۰/۷۲۳	۰/۰۱۴	۰/۰۱۰-	مادر توسط سبزیجات گروه مصرف	
۱/۲۸۱	۰/۰۰۴	۰/۰۰۵	مادر توسط قندها و چربی‌ها گروه مصرف	
۰/۵۶۴	۰/۰۱۴	۰/۰۰۸-	بارداری زمان مدت	
*۲/۸۰۴	۰/۰۵۸	۰/۱۹۲	تولد رتبه	
*۱۰/۷۲۴	۰/۱۰۲	۱/۱۰۱	جنسیت	
۰/۹۶۰	۰/۰۰۹	۰/۰۰۹	مادر سن	

جدول ۳: اثر متغیرهای مستقل بر متغیر وابسته وزن

تی آماره مطلق قدر	استاندارد خطای	ماکسیمم برآورد	مستقل متغیر	وابسته متغیر
*۲/۰۵۳	۰/۰۲۴	۰/۰۵۰	پدر سن	وزن
*۲/۴۱۸	۰/۰۲۶	۰/۰۶۴-	مادر بدنی توده شاخص	
۰/۲۳۶	۰/۰۱۱	۰/۰۰۳-	پدر بدنی توده شاخص	
۰/۴۳۹	۰/۲۴۷	۰/۱۰۸	زایمان وضعیت	
*۲/۱۶۰	۰/۰۳۱	۰/۰۶۸	روز شبانه در شیردهی دفعات تعداد	
۱/۵۷۱	۰/۱۵۷	۰/۲۴۷	مادر توسط وغلات نان گروه مصرف	
۱/۶۰۶	۰/۰۱۷	۰/۰۲۸	مادر توسط لبنیات و شیر گروه مصرف	
۰/۲۷۵	۰/۰۳۲	۰/۰۰۸	مادر توسط پروتئن و گوشت گروه مصرف	
*۳/۴۶۳	۰/۰۱	۰/۰۶۸	مادر توسط میوه‌ها گروه مصرف	
۰/۴۶۴	۰/۰۲۹	۰/۰۱۳	مادر توسط سبزیجات گروه مصرف	
۰/۲۸۳	۰/۰۰۹	۰/۰۰۲	مادر توسط قندها و چربی‌ها گروه مصرف	
۰/۰۲۰	۰/۰۳۴	۰/۰۰۰۷	بارداری زمان مدت	
۱/۵۷۱	۰/۱۵۷	۰/۲۴۷	تولد رتبه	
*۳/۱۳۳	۰/۲۵۷	۰/۸۰۶	جنسیت	
۰/۶۶۸	۰/۰۲۲	۰/۰۱۴	مادر سن	

در شبانه روز، شاخص توده بدنی مادر جنسیت و سن پدر تاثیر معنی دار بر متغیر وابسته وزن داشته‌اند و سایر متغیرهای مستقل معنی‌دار نبودند. به‌علاوه، جدول ۴ مدل چند متغیره را نشان می‌دهد.

براساس نتایج جدول های ۴ تا ۵ متغیرهای مستقلی که در هر سه متغیر وابسته اثر معنی دار داشتند در مدل باقی ماندند و متغیرهای مستقلی که معنی دار نبودند از مدل حذف شدند در نهایت، مدل چند متغیره شامل متغیرهای مستقل جنسیت (دختر و پسر)، شاخص توده بدنی مادر، سن پدر و زمان اندازه‌گیری که تأثیر آن‌ها از نظر آماری معنی دار بوده و سهم قابل‌توجهی در توضیح تغییرات متغیرهای پاسخ داشتند در مدل وارد شدند.

φ_1 و φ_2 مقادیر انحراف معیار خطای باقی مانده در متغیرهای پیوسته وابسته قد و دورسر را نشان می‌دهند. پارامترهای مقیاس $\lambda_{2|1}$ و $\lambda_{3|1}$ میزان اثر تصادفی متغیر وابسته دور سر و وزن نسبت به متغیر وابسته قد ارائه می‌دهند. و مقادیر θ نشان‌دهنده همبستگی بین جفت متغیرهای پاسخ در چارچوب

جدول ۴: برآورد پارامترهای مدل در حالت چند متغیره

وابسته متغیر	مستقل متغیر	درستنمایی ماکسیمم برآورد	استاندارد خطای	تی آماره مطلق قدر
قد	مبدأ از عرض	۴۴/۹۵۴	۰/۸۶۴	۵۱/۹۹۴
	مادر بدنی توده شاخص	-۰/۰۱۹	۰/۰۲۲	۰/۸۸۶
	جنسیت	۱/۳۹۰	۰/۱۹۸	*۷/۰۰۳
	پدر سن	۰/۰۹۲	۰/۰۱۷	*۵/۳۳۸
	اندازه‌گیری زمان	۴/۱۶۵	۰/۱۱۲	۳۷/۱۵۹
سر دور	مبدأ از عرض	۳۲/۶۱۵	۰/۴۶۷	۶۹/۷۹۶
	مادر بدنی تودهٔ شاخص	-۰/۰۰۷	۰/۰۱۲	۰/۶۴۱
	جنسیت	۱/۰۲	۰/۱۰۸	*۱۰/۱۰۰
	پدر سن	۰/۰۳۵	۰/۰۰۹	*۳/۷۰۸
	اندازه‌گیری زمان	۱/۹۱۹	۰/۰۵۸	۳۲/۹۷۲
وزن	مبدأ از عرض	۲/۹۱۴	۱/۱۰۹	۲/۶۲۷
	مادر بدنی توده شاخص	-۰/۰۵۸	۰/۰۲۸	*۲/۰۵۹
	جنسیت	۰/۶۵۶	۰/۲۷۶	*۲/۳۷۵
	پدر سن	۰/۰۶۳	۰/۰۲۵	*۲/۴۹۸
	اندازه‌گیری زمان	-۰/۳۱۰	۰/۵۱۱	۴/۰۳۹
$\lambda_{۲\|۱}$	-	۰/۵۱۱	۰/۰۳۱	-
$\lambda_{۳\|۱}$	-	۰/۳۵۸	۰/۰۸۳	-
$\varphi_{۱}$	-	۰/۸۴۰	۰/۰۶۷	-
$\varphi_{۲}$	-	۰/۲۴۲	۰/۰۳۷	-
$\theta_{۲,۱}$	-	۰/۸۲۶	۰/۰۳۳	-
$\theta_{۳,۲}$	-	۱/۱۹۴	۰/۰۵۵	-
$\theta_{۳,۱\|۲}$	-	۱/۱۲۹	۰/۰۶۳	-

مفصل دی‌واین هستند. $\theta_{۱,۲}$ نشان‌دهنده همبستگی مثبت بین قد و دورسر است.
$\theta_{۳,۲}$ نشان‌دهنده همبستگی مستقیم بین دورسر و وزن است.
$\theta_{۳,۱|۲}$ نشان‌دهنده همبستگی مشروط بین قد و وزن با در نظر گرفتن تأثیر دورسر است

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با بهره‌گیری از مفصل‌های جفتی دی‌ـ‌واین، مدلی برای تحلیل داده‌های آمیخته طولی مربوط به رشد نوزادان ارائه شد. متغیرهای پاسخ شامل قد، دورسر و وزن بودند و تأثیر عوامل زمینه‌ای مانند ویژگی‌های والدین و گروه‌های غذایی بر روند رشد مورد بررسی قرار گرفت. تحلیل‌ها با استفاده از مدل‌های تک‌متغیره و چند متغیره انجام شد نتایج نشان داد مدل‌های چند متغیره با وجود پیچیدگی محاسباتی، درک دقیق‌تری از ساختار وابستگی بین متغیرها فراهم می‌آورند و می‌توانند ابزار مفیدی در تحلیل داده‌های رشد باشند. با این حال، مطالعه حاضر با محدودیت‌هایی همراه بود. در مدل تک‌متغیره، اثر هر عامل به‌صورت جداگانه بررسی می‌شود و سایر متغیرهای مرتبط نادیده گرفته می‌شوند مدل‌های چند متغیره با وجود دقت بالا، به دلیل درگیر بودن هم‌زمان چندین متغیر، دارای پیچیدگی محاسباتی و نیازمند منابع پردازشی قوی هستند. هم‌خطی بین متغیرها نیز می‌تواند باعث کاهش پایداری نتایج شود. از محدودیت‌های این تحقیق می‌توان به حجم نمونه نسبتاً کوچک (۱۲۰ نوزاد) و بروز برخی نتایج غیرمنتظره مانند کاهش وزن در زمان‌هایی خاص اشاره کرد، که احتمالاً ناشی از نادیده‌گیری

برخی عوامل تأثیرگذار در طول زمان بوده است. در مطالعات آتی، می‌توان تحلیل داده‌های چند متغیره آمیخته طولی را با استفاده از مفصل‌های واین در حضور داده‌های گمشده انجام داد تا دقت مدل افزایش یابد. هم‌چنین، مدل‌سازی هم‌زمان داده‌های طولی و بقا با استفاده از مفصل‌ها می‌تواند وابستگی‌های پیچیده بین این متغیرها را بهتر نشان دهد.

مراجع

[1] Ahmadi Angali, K., Loeloe, M S., Akhoond, M R., Daneshkhah, A., Borazjani, F. (2018). *Early feeding and growth pattern in infants: Using a three-variate longitudinal model derived from Gaussian copula function*, Epidemiology, Biostatistics and Public. 15 (4), e12908, pp. e12908-1-e12908-9.

[2] Godazi, M., Akhoond, M., Rasekh, A. R. (2016). *Modelling Mixed Survival and Discrete Data Using Copula Function*, Journal of Statistical Sciences, 10(1), 113-128.

[3] Stöber, J., Hong, H. G., Czado, C., Ghosh, P. (2015). *Comorbidity of chronic diseases in the elderly: Patterns identified by a copula design for mixed responses*, Computational Statistics and Data Analysis, 88, 28-39.

[4] Zhang, W., Zhang, M., Chen, Y. (2020). *A copula-based GLMM model for multivariate longitudinal data with mixed-types of responses*, Sankhya B, 82, 353-379.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

نقش پراکندگی امواج درهندسه فراکتال

وحید رفیعی [۱] علی لیلتن [۲] فاطمه شریفی [۳]

[۱] گروه ریاضی، مجتمع علوم کاربردی، دانشگاه صنعتی مالک اشتر اصفهان
[۲] گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران
[۳] گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور شیراز

چکیده

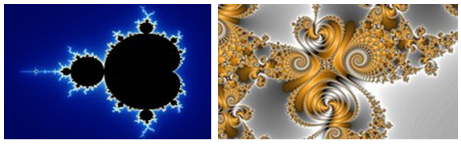
تحلیل نقش پراکندگی امواج در هندسه فراکتال یک زمینه چند رشته‌ای است که بررسی می‌کند هندسه‌های پیچیده و خودمشابه چگونه بر هَم‌کُنش موج تأثیر می‌گذارند. اکتشاف پراکندگی امواج از سطوح فراکتال نه تنها در پیشرفت فیزیک نظری، بلکه در کاربردهای عملی در صنایع مختلف، از جمله مخابرات، فناوری رادار و آکوستیک بسیار مهم است. هدف اصلی این مقاله، بررسی نقش پراکندگی امواج در هندسه فراکتال است. به این منظور، مسأله به‌صورت یک معادله انتگرالی نوع اول که پراکندگی از هندسه فراکتال را توصیف می‌کند، تعیین می‌شود.

کلمات کلیدی: پراکندگی امواج، معادله انتگرال، هندسه فراکتال.

۱ مقدمه

در سال ۱۹۷۵ بنوا ماندلبروت مفهوم فراکتال‌ها را معرفی کرد. او به‌عنوان یکی از اولین پژوهشگران در این زمینه، الگوریتم‌هایی را توسعه داد که به‌وسیله آنها می‌توانست ساختارهای فراکتالی را مدل و تحلیل کند [۴]. یکی از مزایای مهم فراکتال‌ها توانایی آنها در مدل‌سازی اشیا ساختارهای پیچیده است. این به‌دلیل ویژگی مهم فراکتال‌ها است که ساختار آنها با تعداد کمی از پارامترها مشخص می‌شود. یکی از این پارامترها بُعد کسری است که نشان می‌دهد فراکتال چگونه فضای اقلیدسی را که در آن قرار دارد پُر می‌کند. از آنجایی‌که یک محیط متشکل از چنین اجسام فراکتالی را می‌توان به‌عنوان محیط فراکتالی با ابعاد غیرصحیح در نظر گرفت، حساب معمولی یا معادلات دیفرانسیل برای توصیف فیزیک زیربنایی آنها کافی نیست. بنابراین، مدل‌های کسری در معادلات دیفرانسیل شروع به ظهور کردند [۳].

[1] Rafiee.vahid1401@gmail.com
[2] A.irkh11@gmail.com
[3] miss.sharifi4@gmail.com



شکل ۱: راست) مجموعه مندلبروت، چپ) مندلبروت که در مرز چپ کاردیوئید قرار گرفته است [۴].

۲ نظریه فراکتال

فراکتال نوعی شکل ریاضی است که بی‌نهایت پیچیده است. اصطلاح فراکتال، مشتق شده از کلمه لاتین fractus («تکه‌تکه شده» یا «شکسته») توسط ریاضی‌دان لهستانی بنوا ماندلبروت ابداع شد. هندسه فراکتال توسط بنوا ماندلبروت (شکل ۱) به‌عنوان بسط هندسه اقلیدسی معرفی شده است. مجموعه‌های در نظر گرفته شده در هندسه فراکتال نامنظم‌تر از مجموعه‌های مورد مطالعه در هندسه اقلیدسی هستند. الگوهای فراکتال بسیار آشنا هستند زیرا طبیعت پر از فراکتال است. به‌عنوان مثال: شاخه‌های درختان، دانه‌های برف، سیستم گردش خون حیوانات، گیاهان و برگ‌ها، رعد و برق، ابرها، کریستال‌ها، رودخانه‌ها، خطوط ساحلی، کوه‌ها، صدف‌ها، طوفان‌ها همگی نمونه‌هایی از الگوهای فراکتال هستند [۴].

۱.۲ بُعد فراکتالی

فراکتال، در ریاضیات، هر کلاس از اشکال هندسی پیچیده است که معمولاً دارای «بعد کسری» است، مفهومی که اولین بار توسط ریاضیدان فلیکس هاسدورف در سال ۱۹۱۸ معرفی شد. فراکتال‌ها از اشکال ساده هندسه کلاسیک یا اقلیدسی، مربع، دایره، کره و غیره متمایز هستند. آنها قادر به توصیف بسیاری از اشیا با شکل نامنظم یا پدیده‌های فضایی غیریکنواخت در طبیعت مانند خطوط ساحلی و رشته‌کوه‌ها هستند. برای مجموعه‌هایی که اشکال هندسی معمولی را توصیف می‌کنند، بعد فراکتال نظری با بعد اقلیدسی یا توپولوژیکی مجموعه برابر است. بنابراین، برای مجموعه‌هایی که نقاط را توصیف می‌کنند (مجموعه‌های ۰ـبعدی) ۰ است. ۱ برای مجموعه‌هایی که خطوط را توصیف می‌کنند (مجموعه‌های یک بُعدی فقط دارای طول هستند). ۲ برای مجموعه‌هایی که سطوح را توصیف می‌کنند (مجموعه‌های دو بُعدی دارای طول و عرض) و ۳ برای مجموعه‌هایی که حجم‌ها را توصیف می‌کنند (مجموعه‌های سه بُعدی دارای طول، عرض و ارتفاع). اما این برای مجموعه‌های فراکتال تغییر می‌کند. اگر بعد فراکتال نظری یک مجموعه از بعد توپولوژیکی آن بیشتر شود، مجموعه دارای هندسه فراکتالی در نظر گرفته می‌شود [۴]. بعد فراکتالی یک شکل خودمتشابه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \frac{\log\ (\text{number of self similar pieces})}{\log\ (\text{magnification factor})}.$$



شکل ۲: ترسیم مرحله به مرحله مثلث سیرپینسکی.

از آنجایی‌که مثلث سیرپینسکی از ۳ قطعه خودمشابه تشکیل شده است که هر کدام دارای ضریب بزرگنمایی ۲ هستند (شکل ۲)، بنابراین بعد فراکتال برابر است با [۵]

$$D = \frac{\log ۳}{\log ۲} \approx ۱/۵۸.$$

۲.۲ مسأله پراکندگی از سطوح فراکتالی

فرض کنید $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ و $n = ۲, ۳$ باشد و نیز فرض کنید $k > ۰$. پراکندگی صوتی هارمونیک زمانی یک موج فرودی را که توسط γ به‌عنوان یک مانع نرم صوت پراکنده می‌شود، مورد بررسی قرار می‌دهیم. موج ورودی u^i عنصری از فضای $W^{۱,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) = H^{۱,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ در نظر گرفته می‌شود و موج پراکنده شده u در معادله هلمهولتز زیر صدق می‌کند:

$$\Delta u + k^۲ u = ۰. \qquad (۱)$$

معادله موج تخت فرودی u^i به‌صورت زیر است:

$$u^i(x) = e^{ik\ dx} \qquad (۲)$$

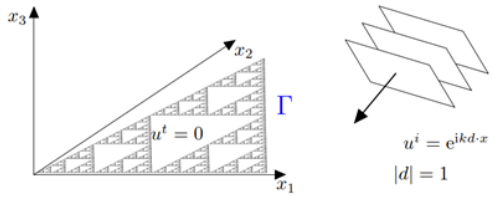
$u \in W^{۱,\mathrm{loc}}(\Omega)$ و $|d| = ۱$. با تعریف $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$، هدف یافتن یک میدان پراکنده $d \in \mathbb{R}^n$ است که در یک مفهوم توزیعی، شرط (۱) را در Ω برقرار کند و همچنین شرایط تابشی زامرفیلد را برآورده کند:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial r} - iku(x) = o\left(r^{-\frac{n-۱}{۲}}\right),\ r := |x| \to \infty,\ \hat{x} := \frac{x}{|x|}. \qquad (۳)$$

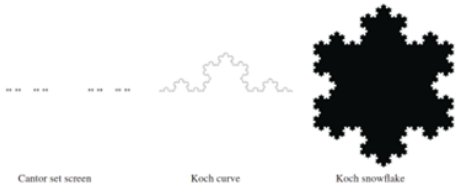
و شرط مرزی $u = -u^i$ در $\partial\Omega = \partial\Gamma$ که با الزام اینکه میدان کل

$$u^t := u + u^i \in W^{۱,\mathrm{loc}}_{۰}(\Omega). \qquad (۴)$$

برآورده شود، اجرا می‌شود. توجه داشته باشید که $\partial\Omega = \Gamma$ اگر و تنها اگر Γ درون تهی داشته باشد [۱]. این مسأله، که از این پس به آن مسأله پراکندگی گفته می‌شود، در صورتی که Ω متصل باشد، به‌صورت یکتا حل‌پذیر است. شکل ۷ نمونه‌هایی از چنین مواردی هستند. با این حال، برای درک کامل خوش‌وضعی فرمول‌بندی معادله انتگرالی پیشنهادی، همچنین علاقه‌مندیم مواردی را نیز بررسی کنیم



شکل ۳: تصویری شماتیک از مسأله پراکندگی از صفحه فراکتال.



شکل ۴: نمونه‌ای از فراکتال‌های مجزا.

که در آن Ω متصل نیست. در این حالت، Ω به‌صورت ترکیب Ω_+ و Ω_- تعریف می‌شود، به‌طوری که $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ در این فرمول‌بندی، $\Omega_\pm$ مجموعه‌های باز و غیرمجزا هستند، به‌گونه‌ای که Ω_+ مولفه بیکران Ω و Ω_- مجموعه‌ای باز و کران‌دار است. در چنین مواردی، مسأله فوق به یک مسأله پراکنده به‌طور یکتا حل‌پذیر برای $u^t\big|_{\Omega_-} \in W^{1,\mathrm{loc}}(\Omega_-)$ و مسأله دیریکله همگن که $u\big|_{\Omega_+} \in W^{1,\mathrm{loc}}(\Omega_+)$ در رابطه (۱۳) در Ω_- صدق می‌کند. بنابراین، اگر Ω متصل نباشد، مسأله پراکندگی به‌طور منحصربه‌فرد قابل حل است (با $u^t = 0$ و $u = -u^i$ در Ω_- اگر و تنها اگر k^2 یک مقدارویژه دیریکله برای $-\Delta$ در Ω_- نباشد).

۱.۲.۲ فرمول‌بندی مسأله پراکندگی به‌عنوان معادله انتگرالی نوع اول

مسأله پراکندگی بالا را می‌توان به‌صورت یک معادله انتگرالی نوع اول روی Γ به‌صورت زیر بازنویسی کرد [۲]:

$$A\phi = g \qquad (۵)$$

به‌طوریکه ϕ مجهول مسأله است و $\phi \in H_\Gamma^{-1} := \{\psi \in H^{-1}(\mathbb{R}^n) : \mathrm{supp}(\psi) \subset \Gamma\}$. وقتی Γ یک Dـ مجموعه باشد، به این معنی که Γ به‌طور یکنواخت از اندازه هاسدورف dـ بعدی $\mathcal{H}^d$ است، که نشان می‌دهد A را می‌توان به‌عنوان یک عملگر انتگرال $\mathbb{A}$ با توجه به $\mathcal{H}^d$ به‌طور دقیق به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbb{A}\psi(x) = \int_\Gamma \Phi(x,y)\psi(y)d\mathcal{H}^d(y), \qquad x \in \Gamma. \qquad (۶)$$

که $(n = ۲)$ $\Phi(x,y) := \frac{i}{۴}H_0^{(1)}(k|x-y|)$ و $(n = ۳)$ $\Phi(x,y) := \frac{e^{ik|x-y|}}{۴\pi|x-y|}$ جواب اساسی معادله هلمهولتز به‌ترتیب در ۲ و ۳ بعدی هستند. فرض کنید $n - ۲ < d \leqslant n$، tr_Γ :

$H^{1}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{L}_2(\Gamma)$ و $\mathrm{tr}_\Gamma^* : \mathbb{L}_2(\Gamma) \to H_\Gamma^{-1}$ پیوسته باشد و فرض کنید $f \in \mathbb{L}_2(\Gamma)$ باشد به‌طوری‌که $\mathrm{tr}_\Gamma^* f \in H_\Gamma^{-1}$. آنگاه برای هر $\sigma \in C_{\cdot,\Gamma}^{\infty}$،

$$\mathcal{A}\mathrm{tr}_\Gamma^* f(x) = \langle \mathrm{tr}_\Gamma^* f \cdot \overline{\sigma\Phi(x,\cdot)} \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)\times H^{1}(\mathbb{R}^n)}, \qquad x \in \Omega. \tag{۷}$$

که $x \notin \mathrm{supp}(\sigma)$. علاوه‌بر آن:

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{tr}_\Gamma^* f \cdot \overline{\sigma\Phi(x,\cdot)} \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)\times H^{1}(\mathbb{R}^n)} &= \langle \mathrm{tr}_\Gamma^* f \cdot \overline{\sigma\Phi(x,\cdot)} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)\times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \Big(f \cdot \mathrm{tr}_\Gamma \overline{\sigma\Phi(x,\cdot)} \Big)_{\mathbb{L}_2(\Gamma)} \\ &= \int_\Gamma \Phi(x,y) f(y)\, d\mathcal{H}^d(y). \end{aligned} \tag{۸}$$

بنابراین

$$\underbrace{\mathcal{A}\mathrm{tr}_\Gamma^* f(x)}_{\mathcal{S}} = \int_\Gamma \Phi(x,y) f(y) \quad \underbrace{d\mathcal{H}^d(y)}_{\text{surface measure}}, \qquad x \in \Omega. \tag{۹}$$

اگر مرز دامنه لیپ‌شیتز باشد:

$$\mathcal{A}\mathrm{tr}_\Gamma^* f = \mathcal{S} f = \text{standard single} - \text{layer potential}. \tag{۱۰}$$

اگر $n-2 < d < n$، آنگاه $\mathrm{tr}_\Gamma^* : \mathbb{H}^{-t_d}(\Gamma) \to H_\Gamma^{-1}$ برای $t_d = 1 - \frac{n-d}{2}$ یکانی است. بنابراین اگر $\phi \in H_\Gamma^{-1}$ باشد که $\phi = \mathrm{tr}_\Gamma^* f$ و $f \in \mathbb{H}^{-t_d}(\Gamma)$ آنگاه

$$A\phi = g \Leftrightarrow \mathbb{A} f = -u^i\big|_\Gamma, \tag{۱۱}$$

که $\mathbb{A} := \mathrm{tr}_\Gamma \mathcal{A}\mathrm{tr}_\Gamma^*$ و

$$\mathbb{A} f(x) = \int_\Gamma \Phi(x,y) f(y)\, d\mathcal{H}^d(y) \quad \text{for} \quad \mathcal{H}^d - \text{a.e. } x \in \Gamma, \qquad f \in \mathbb{L}_\infty(\Gamma). \tag{۱۲}$$

بنابراین مسأله تبدیل به یافتن ϕ می‌شود که در شرایط بالا صدق کند.

تذکر ۱.۲. تنها $v \in W_{\cdot}^{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ که در معادله (۱) در $\Omega := \Gamma^c$ و رابطه (۲) صدق می‌کند، $v = 0$ باشد.

قضیه ۱.۲. فرض کنید که $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ فشرده باشد و فرضیه ۱.۲ برقرار باشد. آنگاه، عملگر $A : \tilde{H}^{1}(\Omega)^{\perp} \to H_\Gamma^{-1}$ معکوس‌پذیر است. علاوه‌بر این، برای هر $g \in \tilde{H}^{1}(\Omega)^{\perp}$ مسأله‌ای که توسط

معادلات (۱) در Ω، (۳) و (۸) تعریف شده است، یک جواب منحصربه‌فرد $u \in H^{L,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ دارد که به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$u = \mathcal{A}\phi \qquad (۱۳)$$

که در آن $\phi \in H_\Gamma^{-1}$ جواب منحصربه‌فرد معادله انتگرالی زیر است:

$$\mathcal{A}\phi = g \qquad (۱۴)$$

که می‌تواند به‌طور معادل به‌فرم تغییراتی نوشته شود:

$$a(\phi,\psi) = \langle g,\psi\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)\times H^{-1}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall \psi \in H^{-1}(\Gamma). \qquad (۱۵)$$

اگر فرضیه ۱.۲ برقرار نباشد، آنگاه معادله $\mathcal{A}\phi = 0$ یک جواب غیربدیهی $\phi \in H_\Gamma^{-1}$ دارد [۲].

مراجع

[1] Caetano, A. M., Chandler-Wilde, S. N., Claeys, X., Gibbs, A., Hewett, D. P., and Moiola, A. *Integral Equation Methods for Acoustic Scattering by Fractals*, In Proceedings A (Vol. 481, No. 2306, p. 20230650), The Royal Society, 2025.

[2] Chandler-Wilde, S. N., and Hewett, D. P. *Equation Formulations for Scattering by Fractal Screens*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 50(1), 677-717, 2018.

[3] Herrmann, R. *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*, 2nd ed. 2011.

[4] Mandelbrot, B. B., and Wheeler, J. A. *The Fractal Geometry of Nature*, American Journal of Physics, 51(3), 286-287.

[5] Zubair, M., Mughal, M. J., and Naqvi, Q. A. *Electromagnetic Fields and Waves in Fractional Dimensional Space*, Springer Science & Business Media, 2012.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

معادله هلمهولتز و جواب‌های اساسی آن

وحید رفیعی [۱] فاطمه شریفی [۲]

[۱] گروه ریاضی، مجتمع علوم کاربردی، دانشگاه صنعتی مالک اشتر اصفهان
[۲] گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور شیراز

چکیده

این مقاله به معرفی تحلیل نظری معادله هلمهولتز و جواب‌های اساسی آن، که یکی از معادلات بنیادی در فیزیک و مهندسی است، می‌پردازد. نتایج حاصل از این تحلیل می‌تواند به فهم بهتر رفتار سیستم‌های فیزیکی تحت تاثیر موج‌ها و ارتعاشات کمک کند و به توسعه جدید در مهندسی و علوم پایه منجر شود.

کلمات کلیدی: جواب‌های اساسی، معادله موج، معادله هلمهولتز.

۱ مقدمه

معادله هلمهولتز که در سال ۱۸۶۰ به افتخار هرمان فون هلمهولتز آلمانی که در سال ۱۸۶۰ آن را مطالعه کرد نام‌گذاری شده است یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی است.

معادله هلمهولتز نیز یک مسأله مقدارویژه برای عملگر لاپلاس است. معادله دیفرانسیل هلمهولتز را می‌توان با جدا کردن متغیرهای همه چیز در سیستم‌های مختصات قطبی حل کرد. معادله هلمهولتز که شکل مستقل از زمان معادله موج را نشان می‌دهد، استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها برای کاهش پیچیدگی تحلیل حاصل می‌شود و فرمول ریاضی آن به‌صورت زیر است:

$$\Delta u + k^۲ u = ۰.$$

که در آن Δ عملگر لاپلاس یا لاپلاسین، تابع موج است، $K > ۰$ عدد موج و u تابع موج است (در عمل معادله هلمهولتز برای $n = ۱, ۲, ۳$ اعمال می‌شود).

معادله هلمهولتز در مفاهیمی از حل مسائل فیزیکی و مهندسی مانند زلزله‌شناسی، آکوستیگ و تابش الکترومغناطیس کاربرد دارد [۱].

[1] Rafiee.vahid1401@gmail.com
[2] miss.sharifi4@gmail.com

۲ معادله هلمهولتز

معادله موج، معادله خطی از نوع معادلات دیفرانسیل هذلولوی است. معادله درجه دوم موج به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود [۲]

$$\frac{\partial^۲}{\partial t^۲}u(r,t) = c^۲\nabla^۲u(r,t). \qquad (۱)$$

که $\nabla^۲$ عملگر لاپلاس، t زمان، u دامنه موج و c ضریب ثابت برابر سرعت موج می‌باشد. با فرض اینکه در تابع موج $u(r,t)$ بتوان متغیرهایی r و t را به‌صورت جدا نوشت یا به‌عبارتی تابع موج $u(r,t)$ جداپذیر باشد، داریم:

$$u(r,t) = R(r)T(t). \qquad (۲)$$

با جای‌گذاری (۲) در (۱) داریم:

$$R(r)\frac{\partial^۲}{\partial t^۲}T(t) = c^۲T(t)\nabla^۲R(r), \qquad (۳)$$

با مرتب‌سازی (۳) داریم:

$$c^۲\frac{\nabla^۲R(r)}{R(r)} = \frac{۱}{T(t)}\frac{\partial^۲T(t)}{\partial t^۲}. \qquad (۴)$$

دررابطه (۴) عبارت سمت چپ تنها به r بستگی دارد در حالی که عبارت سمت راست تنها به t وابسته است. در نتیجه رابطه (۴) در حالت کلی برقرار است، اگر و تنها اگر هر دو طرف رابطه برابر با یک مقدارثابت باشند.

بدون از دست دادن کلیت، به‌منظور سادگی نتایج معادلات، عبارت $-\omega^۲$ را به‌عنوان مقدار ثابت در نظر می‌گیریم. بنابراین با در نظر گرفتن

$$c^۲\frac{\nabla^۲R(r)}{R(r)} = -\omega^۲, \quad \frac{۱}{T(t)}\frac{\partial^۲T(t)}{\partial t^۲} = -\omega^۲,$$

معادلات برای $R(r)$ و $T(t)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial^۲T(t)}{\partial t^۲} + \omega^۲T(t) = ۰, \qquad (۵)$$

$$\nabla^۲R(r) + \frac{\omega^۲}{c^۲}R(r) = ۰. \qquad (۶)$$

توجه داشته باشید که $R(r)$ و $T(t)$ توابع حقیقی از متغیرهای حقیقی می‌باشند. معادله (۵) دیفرانسیل هارمونیک با جواب

$$T(t) = c'_\omega \cos(t\omega) + c''_\omega \sin(\omega t), \qquad (۷)$$

می‌باشد که c'_ω و c''_ω ثابت‌های حقیقی هستند. با فرض $c_\omega = c'_\omega + ic''_\omega$ به‌عنوان ثابت مختلط داریم:

$$\begin{aligned} c_\omega e^{(-i\omega t)} &= c_\omega(\cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t)) = (c'_\omega + ic''_\omega)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \\ &= (c'_\omega \cos(\omega t) + c''_\omega \sin(\omega t)) + i(c''_\omega \cos(\omega t) - c'_\omega \sin(\omega t)). \end{aligned} \qquad (۸)$$

با مقایسه (۷) با (۸) داریم:

$$T(t) = \mathrm{Re}\left(c_\omega e^{(-i\omega t)}\right), \qquad (۹)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$u(r,t) = R(r)\mathrm{Re}\left(c_\omega e^{(-i\omega t)}\right) = \mathrm{Re}\left(c_\omega R(r) e^{(-i\omega t)}\right). \qquad (۱۰)$$

با درنظرگرفتن $u(r) = c_\omega R(r)$ به‌عنوان اندازه میدان مختلط رابطه (۱۰) به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$u(r,t) = \mathrm{Re}\left(u(r) e^{(-i\omega t)}\right) = u(r)\cos(\omega t). \qquad (۱۱)$$

توجه کنید که $u(r)$ میدانی مختلط است در حالی که $u(r,t)$ میدانی حقیقی است. با جای‌گذاری معادله (۱۱) در (۱) داریم:

$$\frac{\partial^۲}{\partial t^۲}(u(r)\cos(\omega t)) = c^۲\nabla^۲(u(r)\cos(\omega t)),$$

در نتیجه:

$$u(r)\frac{\partial^۲}{\partial t^۲}\cos(\omega t) = c^۲\cos(\omega t)\nabla^۲ u(r),$$

از طرفی داریم:

$$\frac{\partial^۲}{\partial t^۲}\cos(\omega t) = -\omega^۲\cos(\omega t),$$

بنابراین:

$$-\omega^۲ u(r)\cos(\omega t) = c^۲\cos(\omega t)\nabla^۲ u(r). \qquad (۱۲)$$

با ضرب طرفین (۱۲) در ثابت $\frac{۱}{c^۲}$ داریم:

$$\nabla^۲u(r) + \frac{\omega^۲}{c^۲}u(r) = ۰.$$

با فرض $k = \frac{\omega}{c}$ داریم:

$$\nabla^۲u(r) + k^۲u(r) = ۰, \qquad (۱۳)$$

که معادله هلمهولتز است. اگر در معادله هلمهولتز $k = ۰$ باشد، آنگاه معادله هلمهولتز تبدیل به معادله لاپلاس می‌شود و اگر تابع F در سمت راست معادله (۱۳) ظاهر شود، این معادله به‌عنوان معادله هلمهولتز ناهمگن شناخته می‌شود.

۳ جواب‌های اساسی از معادله هلمهولتز

معادله هلمهولتز به‌طور طبیعی از قوانین بقایای عمومی فیزیک ظاهر می‌شود و می‌تواند به‌عنوان یک معادله موجی برای امواج تک‌رنگ (معادله موج در میدان فرکانس) تفسیر شود معادله هلمهولتز را از معادله رسانش گرما، معادله شرودینگر، تلگراف و دیگر معادلات نوع موج یا تکاملی به‌دست آورد.

مشخص است معادله هلمهولتز در فضاهای مختلف جواب‌های اساسی متفاوتی دارد یک فرایند فیزیکی خاص را توصیف می‌کند معادل جواب‌های اساسی زیر را برای $n = ۱, ۲, ۳$ دارد

$$\begin{aligned}
&\text{برای } n = ۱, && \omega = \frac{ie^{ik|\xi-\eta|}}{۲k},\\
&\text{برای } n = ۲, && \omega = -\frac{i}{۴}H_{۰}^{(۱)}\left(k|\xi-\eta|\right),\\
&\text{برای } n = ۳, && \omega = \frac{e^{ik|\xi-\eta|}}{۴\pi|\xi-\eta|}.
\end{aligned}$$

نهایتاً برای n تعمیم یافته:

$$\omega = c_d k^p \frac{H_{۰}^{(۱)}\left(k|\xi-\eta|\right)}{۲k},$$

که

$$c_d = \frac{۱}{۲i(۲\pi)^p}, \quad p = \frac{n-۲}{۲}.$$

مراجع

[1] Juraev, D. A., Agarwal, P., Elsayed, E. E., and Targyn, N. *Applications of the Helmholtz Equation*, Advanced Engineering Days (ADE), 8, 28-30, 2023.

[2] Morse, B.J., Moss, M.S., Jones, R.W. *An Analytic Study of Mesh Refinement Applied to the Wave Equation*, (Vol. 5). US Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration,Environmental Research Laboratories, Weather Modification Program Office, 1973.

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

هماهنگ‌سازی تعمیم یافته از سیستم‌های دیفرانسیل‌پذیر آشوبناک

وحید رفیعی [۱] فاطمه شریفی [۲]

[۱] گروه ریاضی، مجتمع علوم کاربردی، دانشگاه صنعتی مالک اشتر اصفهان
[۲] گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور شیراز

چکیده

هماهنگ‌سازی تعمیم یافته یکی از مهمترین مسائل هماهنگ‌سازی در سیستم‌های دینامیکی است و روش‌های مختلفی برای بررسی آن ارائه شده است. در این مقاله، هماهنگ‌سازی تعمیم یافته دیفرانسیل‌پذیر را برای دستگاه‌های آشوبناک بررسی می‌کنیم. براساس روش کراسوفسکی تابع کاندید مناسب لیاپانوف را برای پایداری دستگاه‌های غیرخطی در نظر می‌گیریم. ماتریس ژاکوبین را جهت خطی‌سازی دستگاه‌های غیرخطی به‌کار می‌بریم. در آخر دو قضیه جهت هماهنگ‌سازی تعمیم یافته ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: تابع لیاپانوف، هماهنگ‌سازی تعمیم یافته، هماهنگ‌سازی تعمیم یافته دیفرانسیل‌پذیر.

۱ مقدمه

هماهنگ‌سازی آشوبناک از سال ۱۹۹۰ توسط پکورا و کارول به‌طور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفته است [۲]. هماهنگ‌سازی به‌طور کلی، فرایندی است که در آن دو یا چند سیستم با یکدیگر تعامل دارند که منجر به تکامل مشترک برخی ویژگی‌های دینامیکی آنها می‌شود. موضوع هماهنگ‌سازی در سیستم‌های آشوبناک توجه زیادی را به خود جلب کرده است. با کشف تئوری پایداری لیاپانوف، ساختن تابع کاندید مناسب لیاپانوف، یک شرط کافی برای تعیین هماهنگ‌سازی تعمیم یافته از جفت سیستم‌های آشوبناک نشأت گرفته می‌شود. قابل ذکر است که این جفت سیستم‌ها ممکن است ابعاد متفاوتی داشته باشند [۱].

[1] Rafiee.vahid1401@gmail.com
[2] miss.sharifi4@gmail.com

۲ هماهنگ‌سازی تعمیم یافته

در این بخش، هماهنگ‌سازی تعمیم یافته بین دو سیستم آشوبناک جفت شده ارائه می‌شود. مفهوم هماهنگ‌سازی تعمیم یافته ابتدا برای سیستم‌های جفت شده یک طرفه پیشنهاد شد.

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x), \tag{۱}$$

که در آن $X = [x_۱, \ldots, x_m]^T \in \mathbb{R}^m$ بردار حالت و $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ یک تابع پیوسته است.

معادله (۱) به‌عنوان سیستم گرداننده در نظر گرفته می‌شود. بنابراین سیستم پاسخ کنترل شده

$$\dot{y} = Ay + g(y) + u, \tag{۲}$$

که $y = [y_v, \ldots, y_n]^T \in \mathbb{R}^n$، $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یک تابع پیوسته غیرخطی و $u \in \mathbb{R}^n$ بردار کنترل کننده است.

تعریف ۱.۲. دو سیستم (۱) و (۲) به همراه یک تابع برداری دیفرانسیل‌پذیر $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ را هماهنگ‌سازی تعمیم یافته گویند اگر شرط زیر را ایجاب کنند:

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t, x_\cdot, y_\cdot) - \phi(x(t, x_\cdot))\| = \cdot. \tag{۳}$$

بنابراین سیستم (۱) به هماهنگ‌سازی تعمیم یافته سیستم (۲) تبدیل می‌شود. $e = y - \phi(x)$ را خطای هماهنگ‌سازی تعریف می‌کنیم که ϕ به‌طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر است. در واقع هماهنگ‌سازی به معنای یکسان کردن فاز دو سیستم است. بنابراین خطای سیستم دینامیکی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{y} - \dot{\phi}(x) &= Ay + g(y) - D\dot{\phi}(x)f(x) + u \\ &= A\left(e + \dot{\phi}(x)\right) + g\left(e + \dot{\phi}(x)\right) - D\dot{\phi}(x)\ f(x) + u \\ &= Ae + g\left(e + \dot{\phi}(x)\right) + A\dot{\phi}(x) - D\dot{\phi}(x)f(x) + u. \end{aligned} \tag{۴}$$

که $D\phi(x)$ ماتریس ژاکوبین تابع برداری دیفرانسیل‌پذیر $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ است و به‌صورت زیر تعریف

می‌شود:

$$D\phi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}.$$

قضیه ۱.۲. هماهنگ‌سازی تعمیم یافته بین جفت سیستم معادلات (۱) و (۲) رخ می‌دهد اگر شرایط زیر را ایجاب کند:

الف) $u = -A^{-1}Q_2$،

ب) ماتریس $(B - C_2)^T + (B - C_2)$ معین منفی است که A^{-1} معکوس A و $Q_2 = (C_2 - B)e(t) + ABy(t) + Ag(y) - D\phi(x)f(x)$ است.

اثبات. با به‌کار بردن شرط (الف) سیستم خطا $\dot{e} = (B - C_2)e + Au + \phi_2$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (B - C_2)e + A(-A^{-1}Q_2) + Q_2 \\ &= (B - C_2)e - A^{-1}AQ_2 + Q_2 \\ &= (B - C_2)e - Q_2 + Q_2 = (B - C_2)e. \end{aligned}$$

حال فرض کنید $V(t) = V(e(t))$ که برای هر $e(t) \neq 0$، $V(e(t)) > 0$ و $V(0) = 0$ باشد. چون سیستم‌های (۱) و (۲) غیرخطی هستند با استفاده از روش کراسوفسکی تابع کاندید مناسب لیاپانوف را به فرم $V(e(t)) = e^T(t)e(t)$ در نظر می‌گیریم. سپس از تابع کاندید لیاپانوف مشتق می‌گیریم تا وضعیت پایداری مشخص شود. بنابراین:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \dot{e}^T(t)e(t) + e^T(t)\dot{e}(t) \\ &= e^T(t)(B - C_2)^T e(t) + e^T(t)(B - C_2)e(t) \\ &= e^T(t)(B - C_2)^T + (B - C_2)e(t). \end{aligned}$$

□

۳ هماهنگ‌سازی دیفرانسیل‌پذیر

بحث خود را در این بخش تنها با یک قضیه و اثباتی از آن به پایان می‌بریم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید g تابعی باشد که در شرط لیپ‌شیتز با ثابت L صدق کرده و $k > ۰$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که به‌ازای هر x در $\Omega_۱$ در شرط

$$\|g(\phi(x)) - D\phi(x)f(x)\| \leqslant k,$$

صدق کند. به‌طوری که در آن $\phi : \Omega_۱ \to \Omega_۲$ یک نگاشت به‌طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر باشد. آنگاه با ساختن

$$u = \varepsilon(\phi(x) - y) + \left(۱ - \frac{\|e\|}{\varepsilon}\right)\big(D\phi(x)f(x) - g(\phi(x))\big),$$

و ε مثبت که $\varepsilon > \dfrac{L\sqrt{n} + \sqrt{(L^۲n + ۴k\sqrt{n}}}{۲}$، وجود دارد به‌طوری که سیستم‌های (۱) و (۲) هماهنگ‌سازی تعمیم یافته دیفرانسیل‌پذیر در $\Omega_۱ \times \Omega_۲$ هستند.

اثبات. اثبات در [۲]. □

مراجع

[1] Ouannas, A. and Al-sawalha, M. M. *On Λ-ϕ Generalized Synchronization of Chaotic Dynamical Systems in Continuous–Time*, The European Physical Journal Special Topics, 225(1), 187-196, 2016.

[2] Zhang, G. Liu, Z. R. and Ma, Z. J. *Generalized Synchronization of Continuous Dynamical System*, Applied Mathematics and Mechanics, 28(2), 157-162, 2007.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC
Islamic World Science Citation Center
۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

معرفی یک شاخص نابرابری درآمد جدید

میرزایی، شهریار [۱]

[۱] گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده

در این پژوهش، یک شاخص جدید برای سنجش نابرابری درآمدی معرفی می‌شود که با تمرکز بر شکاف بین گروه‌های پردرآمد و کم‌درآمد در توزیع درآمد طراحی شده است. ویژگی‌های کلیدی که یک شاخص نابرابری مطلوب باید دارا باشد، در این مطالعه مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. مطالعه حاضر به مقایسه تطبیقی منحنی نابرابری پیشنهادی با منحنی استاندارد لورنتس می‌پردازد. همچنین، یک روش ترتیب تصادفی مبتنی بر منحنی نابرابری ارائه شده جدید، توسعه داده شده است. بخش دیگری از پژوهش به معرفی یک برآوردگر نمونه‌ای بهینه اختصاص یافته است. در بخش پایانی، عملکرد شاخص پیشنهادی در مقایسه با سایر شاخص‌های سنجش نابرابری درآمد، با استفاده از داده‌های واقعی درآمد خانوارهای ایرانی مورد ارزیابی قرار گرفته است. این مقایسه امکان بررسی کارایی شاخص جدید در شرایط واقعی را فراهم می‌آورد.

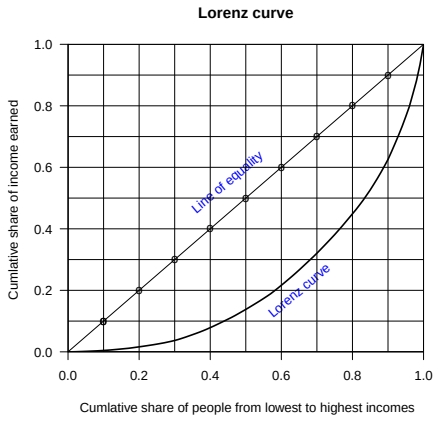
کلمات کلیدی: منحنی لورنتس، شاخص نابرابری درآمد، درآمدهای بالا و پایین

۱ مقدمه

منحنی لورنتس نموداری است که نشان می دهد ثروت یا درآمد چگونه بین افراد یک گروه توزیع می شود. این نمودار توسط ماکس لورنتس در سال ۱۹۰۵ تعریف شد. این منحنی نابرابری درآمدی جامعه را با مقایسه‌ی توزیع واقعی درآمد با حالت برابری کامل درآمدها نشان می‌دهد. منحنی لورنتس اغلب با یک تابع $L(p)$ نشان داده می شود، که در آن p، توزیع تجمعی جمعیت، در محور افقی، و $L(p)$، توزیع تجمعی از کل ثروت یا درآمد، در محور عمودی نشان داده شده است. الگوئی از منحنی لورنتس در شکل ۱ نمایش داده شده است. خط نیمساز ۴۵ درجه نشان‌دهنده‌ی توزیع یکسان درآمدها است. هر گونه انحراف منحنی لورنتس از خط برابری کامل بیانگر میزان نابرابری در جامعه است. هرچه انحراف بیشتر باشد، نابرابری درآمد در جامعه شدیدتراست.

تابع لورنتس $(L(p))$ ، سهم درآمد متعلق به p درصد از افراد که در جامعه درآمد پائینی را دارند، ارائه می دهد. این ابزار به‌ویژه در مطالعات اقتصادی و سیاست‌گذاری اجتماعی برای سنجش نابرابری و ارزیابی تأثیر سیاست‌های توزیع درآمد کاربرد دارد. در ادامه، ما همچنین در این پژوهش از تابع

[1] sh_mirzaee@pnu.ac.ir



شکل ۱: الگوئی از منحنی لورنتس

$M(p) = ۱ - L(۱ - p)$ استفاده خواهیم نمود که سهم درآمد متعلق به p درصد افراد که در جمعیت، درآمد بالایی را دارند فراهم می کند.

۲ دست‌آوردهای پژوهش

در اینجا ما به تعریف شاخص نابرابری درآمد جدید بر اساس نسبت میانگین درآمد p درصد افراد با درآمد کم جامعه که فقیر هستند به میانگین p درصد افراد با درآمد بالای جامعه که ثروتمند هستند اشاره میکنیم. در اینصورت منحنی نابرابری بصورت ذیل تعریف می شود.

$$H(p) = ۱ - \frac{\frac{L(p)}{p}}{\frac{M(p)}{p}} = ۱ - \frac{L(p)}{M(p)},$$

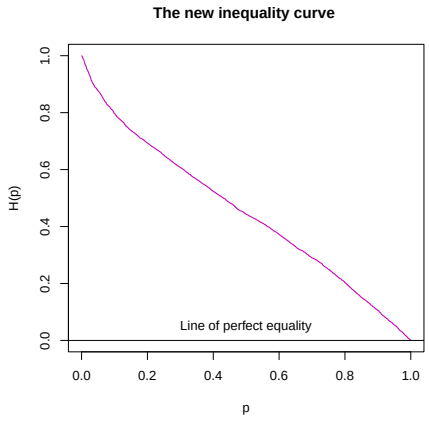
الگوئی از منحنی جدید نابرابری در شکل ۲ نمایش داده شده است. همچنین شاخص نابرابری نیز بر اساس برآیند نقطه ای از نقاط منحنی

$$H = \int_{۰}^{۱} H(p)dp.$$

تعریف می شود.

در اینجا به بررسی چند اصل مهم در مورد شاخص های نابرابری درآمدی می پردازیم. از جمله این ویژگی ها می توان به ویژگی بهنجاری، خاصیت پایایی مقیاس و خاصیت عدم پایائی مکان یا حساسیت به انتقال درآمد اشاره کرد که در گزاره های زیر به آن اشاره می کنیم.

ویژگی بهنجاری بیان می کند که محدوده شاخص نابرابری جدید باید بین صفر و یک باشد.



شکل ۲: الگوئی از منحنی نابرابری جدید

گزاره ۱۲. شاخص نابرابری جدید H دارای خاصیت بهنجاری است.

در اینجا، خاصیت پایائی مقیاس را بیان می کنیم. یعنی به ازای مقدار ثابت $a > ۰$ ، شاخص نابرابری مربوط به متغیر تصادفی X با شاخص نابرابری متغیر تصادفی $Y = aX$ یکسان است.

گزاره ۱۳. شاخص نابرابری جدید H دارای خاصیت پایایی مقیاس است.

خاصیت عدم پایائی مکان یا حساسیت به افزودن مقدار ثابت بیان می کند که با افزودن مقدار ثابت $a > ۰$ به متغیر درآمد، شاخص نابرابری کاهش می یابد.

گزاره ۱۴. شاخص نابرابری جدید H دارای حساسیت به انتقال درآمد است.

۳ برآوردگر نمونه ای شاخص نابرابری جدید

فرض کنید $Y_۱, \ldots, Y_n$ نمونه تصادفی به اندازه n از تابع توزیع F و $Y_{(۱)} \leq \ldots \leq Y_{(j)} \leq \ldots \leq$ آماره های ترتیبی متناظر باشند. با جایگزاری تابع توزیع تجربی به جای تابع توزیع نظری میتوان برآوردگر نمونه ای برای شاخص مذکور بصورت

$$\hat{H} = \frac{۱}{n-۱} \sum_{k=۱}^{n-۱} \frac{\sum_{i=n-k+۱}^{n} Y_{(i)} - \sum_{i=۱}^{k} Y_{(i)}}{\sum_{i=n-k+۱}^{n} Y_{(i)}}.$$

ارائه داد.

۴ ترتیب های تصادفی بر اساس شاخص نابرابری جدید

مقایسه دو تابع توزیع یا تابع چگالی از موضوعات مورد توجه و علاقه بسیاری از محققین بوده است. ساده ترین راه برای مقایسه ی دو تابع توزیع، مقایسه میانگین های آنها است. اما این مقایسه بر پایه دو عدد است و نمی تواند حاوی اطلاعات زیادی باشد. به علاوه برای برخی توزیع ها میانگین وجود ندارد. راه دیگری که برای مقایسه دو توزیع با میانگین های برابر می تواند مورد استفاده قرار گیرد، مقایسه معیارهای پراکندگی و چولگی دو توزیع است. اما در عمل به دنبال معیارهایی برای مقایسه دو توزیع هستیم که حاوی اطلاعات بیشتری باشد. بدین منظور ایده ترتیب های تصادفی نخستین بار توسط من و ویتنی مطرح شد و پس از آن به سرعت رشد کرد و ترتیب های تصادفی زیادی بر اساس ویژگی های مختلف تابع توزیع توسط محققان معرفی شد. مقایسه متغیرهای تصادفی براساس منحنی‌های نابرابری درآمد، اولین بار توسط [۱] براساس منحنی لورنتس بیان شد و به سرعت توسعه پیدا کرد به گونه‌ای که به‌عنوان یکی از ویژگی‌های اساسی منحنی‌های نابرابری مطرح شد. از دیگر افراد پیشگام در رواج استفاده از ترتیب‌های لورنتس می‌توان به [۶]، [۸]، [۴] و [۹] اشاره نمود.

تعریف ۱.۴. فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی عضو مجموعه $\mathcal{L}$ باشند. ترتیب لورنتس $\leq_L$ بر $\mathcal{L}$ به صورت : ،

$$X_1 \leq_L X_2 \Leftrightarrow L_{X_1}(p) \geq L_{X_2}(p), \qquad p \in [0, 1].$$

تعریف می شود.

اگر $X_1 \leq_L X_2$, در اینصورت X_1 نابرابری کمتری نسبت به X_2 در مفهوم لورنتس بیان می کند. در این جا برای اولین بار به تشریح مفهوم ترتیب تصادفی بر اساس منحنی نابرابری جدید می پردازیم.

تعریف ۲.۴. فرض کنید X_1, X_2 دو متغیر تصادفی نا منفی با توابع توزیع به ترتیب F_1, F_2 و میانگینهای مثبت و متناهی باشند، در این صورت گوییم X_1 در ترتیب جدید از X_2 کوچکتر است و آن را با $X_1 \leq_H X_2$ دهیم، اگر و تنها اگر $H_{X_1} \leq H_{X_2}$ و یا بعبارتی

$$X_1 \leq_H X_2 \Leftrightarrow H_{X_1} \leq H_{X_2}$$

به بیان ساده تر، اگر X_1 و X_2 متغیرهای درآمد در دو جامعه با ویژگی $H_{X_1} \leq H_{X_2}$ باشند، نابرابری در جامعه اول کمتر از نابرابری در جامعه دوم است.

لم ۱.۴. فرض کنید $X_1, X_2 \in \mathcal{L}$. در اینصورت:

$$X_1 \leq_H X_2 \Leftrightarrow X_1 \leq_L X_2 \Leftrightarrow X_1 \leq_B X_2 \Leftrightarrow X_1 \leq_Z X_2,$$

که در آن $\leq_B$ و $\leq_Z$ به ترتیب، ترتیب های تصادفی بر اساس منحنی بون فرونی و زنگا هستند.

جدول ۱: مقادیر شاخص جدید با مقادیر سایر شاخص‌های نابرابری درسال ۱۳۹۲ به تفکیک شهری و روستایی

	جدید شاخص	پیترا	تایل	بون‌فرونی	زنگا	جینی
شهری	۰/۷۱۶۵۵	۰/۲۰۷۵۷	۰/۱۵۷۷۲	۰/۴۱۲۰۰	۰/۶۳۳۴۳	۰/۲۹۷۳۹
روستایی	۰/۷۳۱۷۰	۰/۲۱۶۳۴	۰/۱۷۰۷۹	۰/۴۳۷۲۶	۰/۶۵۶۷۲	۰/۳۱۱۶۷

۵ تحلیل داده

هرساله در کشور نزدیک به ۴۰ هزار خانوار از جامعه شهری و روستایی به صورت نمونه‌گیری خوشه‌ای انتخاب شده و داده‌های هزینه و درآمد آن‌ها توسط مأموران مرکز آمار ایران جمع آوری می‌شود. اطلاعات خام در قالب فرمت اکسل در درگاه مرکز آمار ایران[1]، در بخش داده‌های هزینه و درآمد قابل دریافت هستند. برای تحلیل بر اساس شاخص‌های نابرابری، داده‌های هزینه و درآمد خانوارهای شهری و روستایی را در سال ۱۳۹۲ مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای مطالعه دقیق‌تر، اطلاعات حاصل از داده‌ها شامل مقادیر شاخص جدید با مقادیر سایر شاخص‌های نابرابری درسال ۱۳۹۲ به تفکیک جامعه شهری و روستایی در جدول ۱ ثبت شده‌اند.

یافته‌ها نشان می‌دهند که میزان نابرابری در جامعه روستایی بیشتر از جامعه شهری در سال ۱۳۹۲ است. ملاحظه می‌شود که این تفاوت نابرابری با استفاده از شاخص جدید مانند سایر شاخص‌های نابرابری درآمد به روشنی تبیین شده است. چون این معیار با سایر شاخصها همسو و یک هدف را دنبال می‌کنند، بنابراین این شاخص و شاخص‌های مستخرج از آن فاصله جدید، می‌توانند به‌عنوان معیارهای معتبر جهت مطالعه نابرابری در جامعه به‌کار روند.

مراجع

[1] Atkinson, A. B. (1970). On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory*, **2**, 244–263.

[2] Bonferroni, C. E. (1930). *Elementi di statistica generale*. Libreria Seber, Firenze.

[3] Gini, C. (1912). Variabilità e mutabilità. Reprinted in Memorie di metodologica statistica (Ed. Pizetti E, Salvemini, T). *Rome: ibreria Eredi Virgilio Veschi*, **1**.

[4] Kleiber, C. and Kotz, S. (2003). *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Ssciences*, John Wiley & Sons.

[5] Lorenz, M. O. (1905), Methods of measuring the concentration of wealth, *Journal of the American Statistical Association*, **9,** 209–219.

[1] www.sci.org

[6] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1979). *Theory of Majorization and its Applications*. Academic, New York, 16, 4-93.

[7] Pietra, G. (1915). Delle relazioni fra indici di variabilità note I e II. *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, **74**, 775-–804.

[8] Sarabia, J. M., Castillo, E. and Slottje, D. (1999). An orderd family of Lorenz curves. *Journal of Econometrics*, **91**, 43–60.

[9] Shaked, M. and Shanthikumar, G. (2007). Stochastic Orders and Their Applications. San Diego, CA: Academic Press.

[10] Zenga, M. (2007). Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means, *Research in Economic Inequality*, **5**, 3–28.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

توسعه الگوریتم دایکسترا برای شبکه با وزن‌های فازی شهودی بازه‌ای مقدار

سارا احمدی [۱] مدینه فرنام [۲]

[۱] پردیس شهید چمران، مرکز شهید بهشتی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

[۲] گروه مهندسی برق، دانشگاه شهید چمران اهواز- پردیس صنعتی شهدای هویزه، دشت آزادگان، خوزستان، ایران

چکیده

پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر در یک شبکه از جمله مفاهیم اساسی در نظریه گراف و شبکه است. تخصیص عددی قطعی به‌عنوان هزینه متناظر با هر یال همواره امکان‌پذیر نیست. اعداد فازی شهودی بازه‌ای مقدار به دلیل در نظر گرفتن میزان تعلق، عدم‌تعلق، تردید و به همراه کران‌های بالا و پایین پوشش مناسبی برای مدل‌سازی مسائل تحت‌عدم قطعیت را فراهم می‌آورند. در این تحقیق، الگوریتم دایکسترا را برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر فازی شهودی بازه‌ای مقدار در یک شبکه جهت‌دار توسعه می‌دهیم که در آن هزینه متناظر با هر یال با عدد فازی شهودی مثلثی (پیوسته) بازه‌ای مقدار نشان داده می‌شود. برای این منظور روش رتبه‌بندی پارامتری مناسبی مبتنی‌بر مقادیر ارزش و ابهام جهت توسعه الگوریتم دایکسترا استفاده شده است. در ادامه ضمن گسترش الگوریتم دایکسترا، یک مثال عددی تحت ضرایب وزنی برابر برای توضیح الگوریتم تحت‌داده‌های فازی شهودی مثلثی بازه‌ای طراحی می‌شود. ارائه الگوریتم دایکسترا مبتنی‌بر یک روش رتبه‌بندی جدید به همراه طراحی و حل مثال مرتبط با آن تحت‌داده‌های فازی شهودی بازه‌ای مقدار از جمله نوآوری‌های این تحقیق است. در انتها نیز نتایج و برخی پیشنهادها برای پژوهش‌های آتی ذکر شده است.

کلمات کلیدی: عدد فازی شهودی بازه‌ای مقدار، عدد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار، الگوریتم دایکسترا، شبکه

۱ مقدمه

یافتن کوتاه‌ترین مسیر از جمله مسائل اساسی مورد مطالعه در هندسه محاسباتی و سایر زمینه‌ها از جمله الگوریتم‌های گراف، سیستم‌های اطلاعات جغرافیایی، بهینه‌سازی شبکه و غیره است. مسئله کوتاه‌ترین مسیر در محیط نامشخص برای اولین بار توسط دوبویس و پراد [۱] تحلیل شد. رشد روزافزون نظریه گراف، به ویژه گراف فازی و کاربردهای آن در چندین مسئله علمی در دهه‌های گذشته به وضوح نشان‌دهنده اهمیت این حوزه است.

روش‌های مختلفی در ادبیات پژوهش برای مدیریت مسئله کوتاه‌ترین مسیر با در نظر گرفتن اعداد فازی شهودی به‌عنوان طول قوس توسط نویسندگان مختلف، آشکار شده است. در سال ۲۰۰۷،

[1] sara.ahmadi1389@yahoo.com
[2] m.farnam@scu.ac.ir

کارونامبیگای و همکاران روشی اصلاح شده که در برنامه نویسی پویا برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با استفاده از نمودارهای فازی شهودی یافت می‌شود، را بیان کردند [۲]. در سال ۲۰۱۰، گانی تکنیکی را برای شناسایی کوتاه‌ترین مسیر فازی شهودی برای یک شبکه معین ایجاد کرد [۳]. موخرجه یک الگوریتم ترکیبی مبتنی‌بر الگوریتم دایکسترا و عملگر هندسی ترکیبی فازی شهودی مطرح کردند [۴]. در سال ۲۰۱۳، بیسواس یک روش فازی شهودی را برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر در یک مولتی گراف واقعی بهبود داد [۵].

رانگاسامی و همکاران روشی مبتنی‌بر امتیاز برای یافتن کوتاه‌ترین مسیرهای ابری برای یک شبکه معین که در آن وزن یال‌ها با اعداد فازی شهودی بدون توصیف اندازه‌گیری شباهت و فاصله اقلیدسی مشخص می‌شوند، را پیشنهاد کردند [۶]. ببکوریو با استفاده از نرم افزار میپل الگوریتمی نوین برای یافتن حداقل قوس در یک ابر مسیر فازی شهودی ابداع کرد [۷]. جیاگوری و چیتارامانی کوتاه‌ترین مسیر را در شبکه‌ای با هزینه‌های فازی شهودی ذوزنقه‌ای به‌دست آورند [۸]. در سال ۲۰۱۴، پورچلوی و سودا الگوریتم برچسب‌گذاری کوتاه‌ترین مسیر را برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با استفاده از عدد فازی شهودی مثلثی (TIFN) توصیه کردند [۹]. علاوه‌بر این، آن‌ها یک روش جدید و متفاوت را برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با اعداد فازی شهودی مثلثی پیشنهاد کردند، که در آن نویسندگان با تخصیص اعداد فازی شهودی مثلثی به هر یال و با به‌کارگیری یکپارچگی میانگین درجه‌بندی شده پیدا کردند و کوتاه‌ترین مسیر را از یک راس خاص به همه موارد دیگر در یک شبکه بررسی کردند [۱۰]. در سال ۲۰۱۵، کومار و همکاران رویکردی پیشنهادی برای شناسایی کوتاه‌ترین مسیر و کوتاه‌ترین فاصله در یک گراف فازی شهودی بازه‌ای مقدار که در آن گره‌ها به‌عنوان اعداد قطعی در نظر گرفته می‌شوند و وزن یال‌ها توسط اعداد ذوزنقه‌ای فازی شهودی با مقادیر بازه‌ای تخصیص داده می‌شوند را به‌عنوان وزن در یک شبکه پیشنهاد کردند [۱۱]. کاربرد در شبکه‌های حسگر بی‌سیم [۱۲]، انتقال آب [۱۳] و ناهنجاری‌های مربوط به ترافیک راه‌ها [۱۴] از جمله گسترش‌های کاربردی نوین برای شبکه‌های با اعداد فازی شهودی هستند. تحقیقات انجام شده برای حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر با وزن یال‌های فازی شهودی بازه‌ای مقدار به مراتب کمتر از سایر عدم قطعیت‌ها است. از این‌رو با ارائه شبکه‌ای با یال‌های فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار به دنبال یافتن کوتاه‌ترین مسیر و فاصله متناظر با آن در شبکه‌ای جهت‌دار با این نوع از داده‌ها هستیم. در این تحقیق از یک تابع رتبه وزن‌دار برمبنای مقادیر ارزش و ابهام [۱۵] به منظور تعین میزان اولویت و اهمیت اعداد استفاده می‌شود. به‌عنوان توسعه‌ای کاربردی از روش رتبه‌بندی وزن‌دار ارائه شده برای ترکیب با الگوریتم دایکسترا در یک شبکه با وزن داده‌های فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار بهره برده‌ایم. برای این منظور سایر بخش‌های این نوشته به‌صورتی که در ادامه می‌آید سازماندهی شده است. در بخش ۴، اغلب تعاریف، مفاهیم و عملگرهای اساسی مرتبط با اعداد فازی شهودی بازه‌ای مقدار مرور می‌شود. در بخش ۴، یک روش رتبه‌بندی وزن‌دار کارآمد برای اعداد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار مطرح شده است. در بخش ۶، ترکیب الگوریتم دایکسترا با روش رتبه‌بندی وزن‌دار ارائه شده است. الگوریتم ترکیبی برای مثالی عددی از شبکه‌ای جهت‌دار با ۸ گره و ۱۳ یال فازی شهودی بازه‌ای مقدار به‌ازای وزن‌های برابر در

بخش ۵، حل شده است. در انتها نیز به برخی نتایج و پیشنهادها در موضوعات مرتبط پژوهشی اشاره شده است.

۲ مفاهیم مقدماتی

در این بخش، مفاهیم و محاسبات ضروری و پایه‌ای مربوط به اعداد فازی شهودی بازه‌ای مقدار به ویژه، از نوع پیوسته که در سایر قسمتهای این نوشته مورد نیاز هستند آورده می‌شود. برای نوشتن مطالب این بخش از مرجع‌های شماره [۱۵] و [۱۶] استفاده شده است.

تعریف ۱.۲. یک مجموعه فازی شهودی از نوع بازه‌ای مقدار همچون

$$\tilde{\mathcal{I}} = \{(b_1^l, b_1^u, a_2, b_3^l, b_3^u), ((a_1^l, a_1^u, a_2, a_3^l, a_3^u))\}$$

بر روی مجموعه تمام اعداد حقیقی می‌تواند نشان دهنده یک عدد فازی شهودی بازه‌ای مقدار باشد. اگر توابع مربوط به درجه عضویت و درجه‌عدم عضویت برای هر عنصر آن در کران‌های پایین و بالا به‌صورت‌های زیر معرفی گردند.

الف) توابع عضویت در کران‌های پایین و بالا عبارتند از:

$$\mu_{\tilde{\mathcal{I}}}^l(x) = \begin{cases} \underline{w}, & x = a_2 \\ f_{\tilde{\mathcal{I}}}(x), & a_1^l < x < a_2 \\ f'_{\tilde{\mathcal{I}}}(x), & a_2 < x < a_3^l \\ 0, & x > a_3^l, x < a_1^l \end{cases} \quad (1)$$

$$\mu_{\tilde{\mathcal{I}}}^u(x) = \begin{cases} 0, & x > a_3^u, x < a_1^u \\ g_{\tilde{\mathcal{I}}}(x), & a_1^u < x < a_2 \\ g'_{\tilde{\mathcal{I}}}(x), & a_2 < x < a_1^u \\ \bar{w}, & x = a_2 \end{cases} \quad (2)$$

ب) توابع عدم عضویت در کران‌های پایین و بالا عبارتند از:

$$v^l_{\tilde{\mathcal{I}}}(x) = \begin{cases} \underline{u}, & x = a_۲ \\ h_{\tilde{\mathcal{I}}}(x), & b^l_۱ < x < a_۲ \\ h'_{\tilde{\mathcal{I}}}(x), & b^l_۳ > x > a_۲ \\ ۱, & x \le b^l_۱, x \ge b^l_۳ \end{cases} \quad (۳)$$

$$v^u_{\tilde{\mathcal{I}}}(x) = \begin{cases} ۱, & x > b^u_۳, x < b^u_۱ \\ m_{\tilde{\mathcal{I}}}(x), & a_۲ > x > b^u_۱ \\ m'_{\tilde{\mathcal{I}}}(x), & a_۲ < x < b^l_۳ \\ \bar{u}, & x = a_۲ \end{cases} \quad (۴)$$

به‌طوری که $۰ \le \underline{u} \le \bar{u} \le \underline{w} \le \bar{w} \le ۱$.

تعریف ۲.۲. یک عدد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار به‌صورتی که در ادامه می‌آید تعریف می‌شود:

$$\tilde{\mathcal{I}} = \{(b^l_۱, b^u_۱, a_۲, b^l_۳, b^u_۳; [\underline{u}, \bar{u}]), (a^l_۱, a^u_۱, a_۲, a^l_۳, a^u_۳; [\underline{w}, \bar{w}])\}$$

در این صورت توابع عضویت مربوط به کران‌های پایین و بالا عبارتند از:

$$\mu^l_{\tilde{\mathcal{I}}}(x) = \begin{cases} \underline{w}, & x = a_۲ \\ \frac{\underline{w}(x-a^l_۱)}{a_۲-a^l_۱}, & a^l_۱ < x < a_۲ \\ \underline{w} - \frac{\underline{w}(x-a_۲)}{a^l_۳-a_۲}, & a_۲ < x < a^l_۳ \\ ۰, & x > a^l_۳, x < a^l_۱ \end{cases} \quad (۵)$$

$$\mu^u_{\tilde{\mathcal{I}}}(x) = \begin{cases} ۰, & x > a^u_۳, x < a^u_۱ \\ \frac{\bar{w}(x-a^u_۱)}{a_۲-a^u_۱}, & a^u_۱ < x < a_۲ \\ \bar{w} - \frac{\bar{w}(x-a_۲)}{b^u_۳-a_۲}, & a_۲ < x < a^u_۳ \\ \bar{w}, & x = a_۲ \end{cases} \quad (۶)$$

به‌صورت مشابه، توابع عضویت در کران‌های پایین و بالا عبارتند از:

$$v^l_{\tilde{\mathcal{I}}}(x)=\begin{cases}\underline{u}, & x=a_2\\ 1-\frac{(1-\underline{u})(x-b^l_1)}{a_2-b^l_1}, & b^l_1<x<a_2\\ \underline{u}+\frac{(1-\underline{u})(x-a_2)}{b^l_3-a_2}, & a_2<x<b^l_3\\ 0, & x>b^l_3, x<b^l_1\end{cases} \tag{۷}$$

$$v^u_{\tilde{\mathcal{I}}}(x)=\begin{cases}0, & x>b^u_3, x<b^u_1\\ 1-\frac{(1-\bar{u})(x-a^u_1)}{a_2-a^u_1}, & b^u_1<x<a_2\\ \bar{u}+\frac{(1-\bar{u})(x-a_2)}{a^u_3-a_2}, & a_2<x<b^u_3\\ \bar{u}, & x=a_2\end{cases} \tag{۸}$$

تعریف ۳.۲. اگر γ عددی حقیقی و دو عدد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار به‌صورت زیر موجود باشند:

$$\tilde{\mathcal{I}}=\{(b^l_1,b^u_1,a_2,b^l_3,b^u_3;[\underline{u}_{\tilde{\mathcal{I}}},\bar{u}_{\tilde{\mathcal{I}}}]),(a^l_1,a^u_1,a_2,a^l_3,a^u_3;[\underline{w}_{\tilde{\mathcal{I}}},\bar{w}_{\tilde{\mathcal{I}}}])\}$$
$$\tilde{\mathcal{J}}=\{(d^l_1,d^u_1,c_2,d^l_3,d^u_3;[\underline{u}_{\tilde{\mathcal{J}}},\bar{u}_{\tilde{\mathcal{J}}}]),(c^l_1,c^u_1,c_2,c^l_3,c^u_3;[\underline{w}_{J},\bar{w}_{\tilde{\mathcal{J}}}])\}$$

آنگاه

$$\tilde{\mathcal{I}}+\tilde{\mathcal{J}}=\left\{\begin{array}{c}(b^l_1+d^l_1,b^u_1+d^u_1,a_2+c_2,b^l_3+d^l_3,b^u_3+d^u_3;[\min\{\underline{u}_{\tilde{\mathcal{I}}},\underline{u}_{\tilde{\mathcal{J}}}\},\min\{\bar{u}_{\tilde{\mathcal{I}}},\bar{u}_{\tilde{\mathcal{J}}}\}]),\\ (a^l_1+c^l_1,a^u_1+c^u_1,a_2+c_2,a^l_3+c^l_3,a^u_3+c^u_3;[\max\{\underline{w}_{\tilde{\mathcal{I}}},\underline{w}_{\tilde{\mathcal{J}}}\},\max\{\bar{w}_{\tilde{\mathcal{I}}},\bar{w}_{\tilde{\mathcal{J}}}\}])\end{array}\right\}$$

$$\gamma\tilde{\mathcal{I}}=\begin{cases}\{(\gamma b^l_1,\gamma b^u_1,\gamma a_2,\gamma b^l_3,\gamma b^u_3;[\underline{u}_{\tilde{\mathcal{I}}},\bar{u}_{\tilde{\mathcal{I}}}]),(\gamma a^l_1,\gamma a^u_1,\gamma a_2,\gamma a^l_3,\gamma a^u_3;[\underline{w}_{\tilde{\mathcal{I}}},\bar{w}_{\tilde{\mathcal{I}}}])\}, & \gamma>0\\ \{(\gamma b^u_3,\gamma b^l_3,\gamma a_2,\gamma b^u_1,\gamma b^l_1;[\underline{u}_{\tilde{\mathcal{I}}},\bar{u}_{\tilde{\mathcal{I}}}]),(\gamma a^u_3,\gamma a^l_3,\gamma a_2,\gamma a^u_1,\gamma a^1_1;[\underline{w}_{\tilde{\mathcal{I}}},\bar{w}_{\tilde{\mathcal{I}}}])\}, & \gamma<0\end{cases}$$

تعریف ۴.۲. اگر یک عدد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار به شکل زیر داشته باشیم:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{I}}=&\{(b^l_1,b^u_1,a_2,b^l_3,b^u_3;[\underline{u}_{\tilde{\mathcal{I}}},\bar{u}_{\tilde{\mathcal{I}}}]),(a^l_1,a^u_1,a_2,a^l_3,a^u_3;[\underline{w}_{\tilde{\mathcal{I}}},\bar{w}_{\tilde{\mathcal{I}}}])\},\\ &0\le\underline{u}_{\tilde{\mathcal{I}}}\le\bar{u}_{\tilde{\mathcal{I}}}\le\underline{w}_{\tilde{\mathcal{I}}}\le\bar{w}_{\tilde{\mathcal{I}}}\le 1\end{aligned}$$

آنگاه معادله‌های پارامتری زیر را برای کران‌های پایین و بالای مرتبط با تعلق و عدم تعلق به‌ازای

$۰ \leq \alpha, \beta \leq ۱$ داریم:

$$u^l(\alpha) = [u^l_۱(\alpha), u^l_۲(\alpha)] = \Big[a^l_۱ + \frac{\alpha(a_۲ - a^l_۱)}{\underline{w}_{\tilde{\mathcal{I}}}}, a_۲ + \frac{(\underline{w}_{\tilde{\mathcal{I}}} - \alpha)(a^l_۳ - a_۲)}{\underline{w}_{\tilde{\mathcal{I}}}}\Big],$$
$$u^u(\alpha) = [u^u_۱(\alpha), u^u_۲(\alpha)] = \Big[a^u_۱ + \frac{\alpha(a_۲ - a^u_۱)}{\bar{w}_{\tilde{\mathcal{I}}}}, a_۲ + \frac{(\bar{w}_{\tilde{\mathcal{I}}} - \alpha)(a^u_۳ - a_۲)}{\bar{w}_{\tilde{\mathcal{I}}}}\Big],$$
$$u^l(\beta) = [u^l_۱(\beta), u^l_۲(\beta)] = \Big[b^l_۱ + \frac{(۱ - \beta)(a_۲ - b^l_۱)}{۱ - \underline{u}_{\tilde{\mathcal{I}}}}, a_۲ + \frac{(\beta - \underline{u}_{\tilde{\mathcal{I}}})(a^l_۳ - a_۲)}{۱ - \underline{u}_{\tilde{\mathcal{I}}}}\Big],$$
$$u^u(\beta) = [u^u_۱(\beta), u^u_۲(\beta)] = \Big[b^u_۱ + \frac{(۱ - \beta)(a_۲ - b^u_۱)}{۱ - \bar{u}_{\tilde{\mathcal{I}}}}, a_۲ + \frac{(\beta - \bar{u}_{\tilde{\mathcal{I}}})(b^u_۳ - a_۲)}{۱ - \bar{u}_{\tilde{\mathcal{I}}}}\Big].$$

۳ رتبه‌بندی اعداد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار

روش‌های رتبه‌بندی در کنار عملگرهای تجمعی از ابزارهای کارآمد در حل مسائل مدل‌سازی شده تحت‌داده‌های فازی شهودی بازه‌ای مقدار هستند. آن دسته از روش‌های رتبه‌بندی که دقت و انعطاف‌پذیری بالاتری دارند می‌توانند سطوح مختلف و متنوعی از دسترسی به پاسخ‌های مطلوب را در اختیار تحلیلگران قرار دهند. با توجه به مطالعات انجام شده از روش رتبه‌بندی پارامتری براساس مرجع‌های [۱۵] و [۱۷] در اینجا استفاده شده است. برای یک عدد فازی شهودی بازه‌ای مقدار همچون $\tilde{\mathcal{I}}$ براساس شکل پارامتری مقادیر ارزش در کران‌های پایین و بالای توابع عضویت و عدم‌عضویت از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mathcal{S}^l_\mu(\tilde{\mathcal{I}}) = \int_۰^{\underline{w}} \Big(\frac{u^l_۱(\alpha) + u^l_۲(\alpha)}{۲}\Big) y_۱(\alpha) d\alpha, \qquad y_۱(\alpha) = \frac{۲\alpha}{\underline{w}},\ \alpha \in [۰, \underline{w}]$$
$$\mathcal{S}^u_\mu(\tilde{\mathcal{I}}) = \int_۰^{\bar{w}} \Big(\frac{u^u_۱(\alpha) + u^u_۲(\alpha)}{۲}\Big) y_۲(\alpha) d\alpha, \qquad y_۲(\alpha) = \frac{۲\alpha}{\bar{w}},\ \alpha \in [۰, \bar{w}]$$
$$\mathcal{S}^l_v(\tilde{\mathcal{I}}) = \int_{\underline{u}}^۱ \Big(\frac{u^l_۱(\beta) + u^l_۲(\beta)}{۲}\Big) y_۳(\beta) d\beta, \qquad y_۳(\beta) = \frac{۲(۱ - \beta)}{(۱ - \underline{u})}, \beta \in [\underline{u}, ۱]$$
$$\mathcal{S}^u_v(\tilde{\mathcal{I}}) = \int_{\bar{u}}^۱ \Big(\frac{u^u_۱(\beta) + u^u_۲(\beta)}{۲}\Big) y_۴(\beta) d\beta, \qquad y_۴(\beta) = \frac{۲(۱ - \beta)}{(۱ - \bar{u})}, \beta \in [\bar{u}, ۱]$$

که در آن‌ها توابع $y_۲$ و $y_۱$ صعودی و $y_۴$ و $y_۳$ نزولی هستند. پس از انتگرال‌گیری روابط زیر برای مقادیر متناظر با ارزش حاصل می‌شوند:

$$\mathcal{S}_{\mu}^{l}(\tilde{\mathcal{I}}) = \Big(\frac{(a_{۱}^{l} + ۴a_{۲} + a_{۳}^{l})}{۶}\Big)\underline{w} \quad , \quad \mathcal{S}_{\mu}^{u}(\tilde{\mathcal{I}}) = \Big(\frac{(a_{۱}^{u} + ۴a_{۲} + a_{۳}^{u})}{۶}\Big)\bar{w}$$
$$\mathcal{S}_{v}^{l}(\tilde{\mathcal{I}}) = \Big(\frac{(b_{۱}^{l} + ۴a_{۲} + b_{۳}^{l})}{۶}\Big)(۱ - \underline{u}) \quad , \quad \mathcal{S}_{v}^{u}(\tilde{\mathcal{I}}) = \Big(\frac{(b_{۱}^{u} + ۴a_{۲} + b_{۳}^{u})}{۶}\Big)(۱ - \bar{u})$$

از این‌رو، ترکیب‌های خطی زیر برای مقادیر ارزش در کران‌های پایین و بالا به‌دست می‌آیند:

$$\mathcal{S}^{l}(\tilde{\mathcal{I}}, \delta) = \delta_{۱}(\mathcal{S}_{\mu}^{l}(\tilde{\mathcal{I}})) + \delta_{۲}(\mathcal{S}_{v}^{l}(\tilde{\mathcal{I}})) \qquad (۹)$$
$$\mathcal{S}^{u}(\tilde{\mathcal{I}}, \delta) = \delta_{۱}(\mathcal{S}_{\mu}^{u}(\tilde{\mathcal{I}})) + \delta_{۲}(\mathcal{S}_{v}^{u}(\tilde{\mathcal{I}})) \qquad (۱۰)$$

به‌گونه‌ای که $۰ \leq \delta_{۱} + \delta_{۲} \leq ۱$ به طریق مشابه مقادیر متناظر با ابهام به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\mathcal{A}_{\mu}^{l}(\tilde{\mathcal{I}}) = \Big(\frac{(a_{۳}^{l} - a_{۱}^{l})}{۳}\Big)\underline{w} \quad , \quad \mathcal{A}_{\mu}^{u}(\tilde{\mathcal{I}}) = \Big(\frac{(a_{۳}^{u} - a_{۱}^{u})}{۳}\Big)\bar{w}$$
$$\mathcal{A}_{v}^{l}(\tilde{\mathcal{I}}) = \Big(\frac{(b_{۳}^{l} - b_{۱}^{l})}{۳}\Big)(۱ - \underline{u}) \quad , \quad \mathcal{A}_{v}^{u}(\tilde{\mathcal{I}}) = \Big(\frac{(b_{۳}^{u} - b_{۱}^{u})}{۳}\Big)(۱ - \bar{u})$$

از این‌رو، ترکیب‌های خطی زیر برای مقادیر ابهام در کران‌های پایین و بالا به‌دست می‌آیند:

$$\mathcal{A}^{l}(\tilde{\mathcal{I}}, \delta) = \delta_{۱}(\mathcal{A}_{\mu}^{l}(\tilde{\mathcal{I}})) + \delta_{۲}(\mathcal{A}_{v}^{l}(\tilde{\mathcal{I}})) \qquad (۱۱)$$
$$\mathcal{A}^{u}(\tilde{\mathcal{I}}, \delta) = \delta_{۱}(\mathcal{A}_{\mu}^{u}(\tilde{\mathcal{I}})) + \delta_{۲}(\mathcal{A}_{v}^{u}(\tilde{\mathcal{I}})) \qquad (۱۲)$$

به‌گونه‌ای که $۰ \leq \delta_{۱} + \delta_{۲} \leq ۱$ اکنون رابطه مطلوب برای رتبه‌بندی اعداد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار را می‌توان براساس ترکیبی خطی از روابط (۹)-(۱۲) به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$Q(\tilde{\mathcal{I}}, \xi) = \xi_{۱}(\mathcal{S}^{l}(\tilde{\mathcal{I}}, \delta) - \mathcal{A}^{l}(\tilde{\mathcal{I}}, \delta)) + \xi_{۲}(\mathcal{S}^{u}(\tilde{\mathcal{I}}, \delta) - \mathcal{A}^{u}(\tilde{\mathcal{I}}, \delta)) \qquad (۱۳)$$

به‌گونه‌ای که $۰ \leq \xi_{۱} + \xi_{۲} \leq ۱$ ازاین‌رو، برای مقایسه دو عدد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار دلخواه $\tilde{\mathcal{J}}$ و $\tilde{\mathcal{I}}$ با بکارگیری رابطه (۱۳) نتیجه می‌شود که:

- اگر $Q(\tilde{\mathcal{I}}, \xi) > Q(\tilde{\mathcal{J}}, \xi)$ آنگاه $\tilde{\mathcal{I}} > \tilde{\mathcal{J}}$.
- اگر $Q(\tilde{\mathcal{I}}, \xi) < Q(\tilde{\mathcal{J}}, \xi)$ آنگاه $\tilde{\mathcal{I}} < \tilde{\mathcal{J}}$.
- اگر $Q(\tilde{\mathcal{I}}, \xi) = Q(\tilde{\mathcal{J}}, \xi)$ آنگاه $\tilde{\mathcal{I}} = \tilde{\mathcal{J}}$.

به‌طور کلی، روش‌های رتبه‌بندی ابزار مناسبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی‌خطی، غیرخطی و یافتن جواب بهینه در سایر مسائل تحقیق در عملیات تحت‌شرایط عدم‌قطعیت شمرده می‌شوند.

۴ توسعه الگوریتم دایکسترا برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر در شبکه با وزن‌های فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار

در این بخش می‌خواهیم الگوریتم دایکسترا را برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر در شبکه با وزن‌های فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار بازنویسی کنیم. برای گام‌های مسئله تحت‌این نوع از عدم قطعیت داریم:

اطلاعات ورودی: شبکه‌ای به نام NW با مجموعه‌ای از گره‌ها مانند $N = a_1, a_2, \ldots, a_n$ و مجموعه‌ای از یال‌ها همچون $\tilde{\mathcal{I}}$ که در آن هزینه متناظر با هریال یک عدد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار مانند $\tilde{\mathcal{I}}_{ij}$ است را دریافت می‌کنیم.

گام ۱ الف) برای مقدار متناظر هر یال یعنی $\tilde{\mathcal{I}}_{ij}$ ، $Q(\tilde{\mathcal{I}}_{ij}) = Q(\tilde{\mathcal{I}}_{ij}, \xi, \delta_1, \delta_2)$ را براساس رابطه (۱۳) محاسبه کنید.
ب) برای شروع فرض کنید: $\Theta_N = \{a_1\}$ و $\Delta_i = 0$ که در آن Θ_N زیر مجموعه‌ای از راس‌ها و Δ_i فاصله از اولین راس را نشان می‌دهد.

گام ۲: برای تمامی یال‌های موجود دوتایی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$(\Theta_N, \bar{\Theta}_N) = \{(i,j) i \in \Theta_N, j \in \bar{\Theta}_N\}, \qquad \bar{\Theta}_N = N - \Theta$$

گام ۳: الف) با توجه به قوس‌های موجود در $(\Theta_N, \bar{\Theta}_N)$، از گام قبل اندازه فاصله را برای راس‌های موجود در Θ_N با کمک رابطه $\Delta_i + Q(\tilde{\mathcal{I}}_{ij})$ به‌روزرسانی کنید.
ب) اندیس متناظر با می‌نیمم مقدار حاصل از گام ۳ الف را با

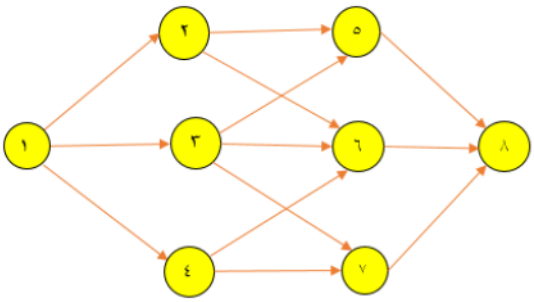
$$\Delta_f + Q(\tilde{\mathcal{I}}_f g) = \min_{(i,j)\in(\Theta_N,\bar{\Theta}_N)} \{\Delta_i + Q(\tilde{\mathcal{I}}_{ij})\}$$

محاسبه کنید.
ج) راس g را به زیر مجموعه راس‌ها اضافه کنید. علاوه‌بر این فاصله را براساس گام ۳ به‌روزرسانی کنید.
د) به گام ۱ برگردید و مراحل را تا پیمایش تمامی راس‌ها یعنی $(n-1)$ مرحله تکرار کنید.

اطلاعات خروجی: درخت کوتاه‌ترین مسیر در شبکه با داده‌های فازی شهودی بازه‌ای مقدار به‌دست می‌آید.

۵ مثال عددی

مطابق آنچه در شکل ۱ مشاهداه می‌شود شبکه‌ای شامل ۸ گره و ۱۳ یال را در نظر بگیرید.



شکل ۱: شبکه فازی شهودی بازه‌ای مقدار شامل ۸ راس و ۱۳ قوس.

هزینه متناظر با هر یال به‌صورت عدد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار است که در جدول ۱ اطلاعات مربوط به هزینه یال‌ها آورده شده است. برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر در شبکه مثال ابتدا با بکارگیری روش رتبه‌بندی ارائه شده عدد قطعی متناظر با هر یال را با استفاده از رابطه (۱۳) پیدا می‌کنیم. یافته‌ها به‌ازای وزنهای برابر در ستون امتیاز از جدول ۱ خلاصه شده است.

جدول ۱: هزینه‌های فازی شهودی بازه‌ای مقدار متناظر با هر یال به‌همراه خلاصه نتایج حاصل از رتبه‌بندی برای یال‌ها به‌ازای وزن‌های برابر.

یال‌ها	هزینه فازی شهودی بازه‌ای مقدار متناظر با هر یال	امتیاز
$\tilde{\mathcal{I}}_{۱۲}$	$\{(۲, ۰/۵, ۱۳, ۲/۵, ۱۴/۵; [۰/۲, ۰/۳]), (۳/۵, ۱۲/۵, ۱۳, ۳, ۱۴; [۰/۵, ۰/۶])\}$	۴/۱۱
$\tilde{\mathcal{I}}_{۱۳}$	$\{(۰, ۱۲, ۴, ۰/۵, ۱۱/۵; [۰/۰۱, ۰/۰۲]), (۱/۵, ۸, ۴, ۱, ۹; [۰/۸, ۰/۹])\}$	۷/۳۸
$\tilde{\mathcal{I}}_{۱۴}$	$\{(۱, ۳۳, ۶, ۱/۶, ۳۴; [۰, ۰/۴]), (۳/۵, ۱۵, ۶, ۴, ۱۶; [۰/۵, ۰/۹])\}$	۵/۹۱
$\tilde{\mathcal{I}}_{۲۵}$	$\{(۱, ۹, ۵, ۱/۷, ۸/۳; [۰/۰۲, ۰/۰۳]), (۳/۳, ۶/۷, ۵, ۴, ۷; [۰/۸, ۰/۹])\}$	۴/۵۴
$\tilde{\mathcal{I}}_{۲۶}$	$\{(۰, ۱۹, ۱۰, ۰/۱, ۱۸/۹; [۰/۰۴, ۰/۱]), (۴/۵, ۱۴/۵, ۱۰, ۴, ۱۵; [۰/۵, ۰/۷])\}$	۷/۵۵
$\tilde{\mathcal{I}}_{۳۵}$	$\{(۰, ۴۱, ۱۶, ۰/۸, ۳۸; [۰/۰۹, ۰/۱۲]), (۶/۵, ۲۳/۵, ۱۶, ۷, ۲۴; [۰/۶, ۰/۷۵])\}$	۱۳/۲۳
$\tilde{\mathcal{I}}_{۳۶}$	$\{(۵, ۳۵, ۱۳, ۵, ۳۴/۶; [۰/۰۹, ۰/۱]), (۵, ۲۰, ۱۳, ۵, ۲۱; [۰/۴, ۰/۶])\}$	۱۰/۲۵
$\tilde{\mathcal{I}}_{۳۷}$	$\{(۲, ۱۱, ۷, ۲/۲, ۱۰/۸; [۰, ۰/۰۴]), (۶/۵, ۹, ۷, ۶, ۱۰; [۰/۵, ۰/۹])\}$	۵/۸۹
$\tilde{\mathcal{I}}_{۴۶}$	$\{(۶, ۴۸, ۱۸, ۶/۵, ۴۵; [۰/۰۷, ۰/۲]), (۷/۵, ۲۵/۵, ۱۸, ۸, ۲۷; [۰/۷, ۰/۸])\}$	۱۵/۵۱
$\tilde{\mathcal{I}}_{۴۷}$	$\{(۱, ۲۹, ۱۵, ۱/۱, ۲۸/۹; [۰/۰۷, ۰/۰۹]), (۶/۵, ۲۰, ۱۵, ۶, ۲۳; [۰/۷, ۰/۹])\}$	۱۲/۶۶
$\tilde{\mathcal{I}}_{۵۸}$	$\{(۰, ۲۱, ۱۰, ۰/۱, ۲۰; [۰, ۰/۰۱]), (۲/۵, ۱۲, ۱۰, ۲, ۱۶; [۰/۷, ۰/۸])\}$	۸/۴۱
$\tilde{\mathcal{I}}_{۶۸}$	$\{(۰, ۱۹, ۸, ۰/۵, ۱۵; [۰, ۰/۱]), (۳/۵, ۱۵/۵, ۸, ۳, ۱۶; [۰/۶, ۰/۸])\}$	۷/۱۶
$\tilde{\mathcal{I}}_{۷۸}$	$\{(۰, ۱۴, ۶, ۰/۴, ۱۲; [۰, ۰/۱]), (۱/۵, ۶/۵, ۶, ۱, ۷; [۰/۵, ۰/۹])\}$	۴/۹۵

با اجرای گام‌های الگوریتم ارائه شده در بخش قبلی، برروی نتایج جدول ۱ درخت متناظر با کوتاه‌ترین مسیر از راس یک را به سایر راس‌ها می‌یابیم. نتیجه کوتاه‌ترین مسیر بین گره مبدا و مقصد، مسیر ۸-۷-۳-۱ با هزینه ۱۸/۲۳ معادل است.

۶ نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

تمرکز اصلی در این نوشته، مطالعه‌ای بر روشی پارامتری و انعطاف‌پذیر برای اعداد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار است. روش‌های پارامتری به دلیل انتخاب وزن‌ها توسط تحلیلگر انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به روش‌هایی که تنها یک عدد قطعی را به هر عدد فازی شهودی بازه‌ای مقدار تخصیص می‌دهند

دارند. برای این منظور ضمن ارائه تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز، با توجه نقش ارزش و ابهام و مقادیر ابتدا و انتهای بازه در اعداد فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار، روش رتبه‌بندی وزن‌دار برای این نوع از اعداد بیان شد. با توجه گسترش شبکه راه‌ها، پیچیدگی شبکه‌های اجتماعی اهمیت مسأله یافتن کوتاه‌ترین مسیر در حل مدل‌های اقتصادی و اجتماعی با ابعاد بزرگ بر همگان واضح است. از این رو به‌عنوان کاربردی از روش رتبه‌بندی مطرح شده، توسعه‌ای از الگوریتم دایکسترا تحت وزن‌های فازی شهودی مثلثی بازه‌ای مقدار را مطرح کردیم و با ارائه مثالی عددی عملکرد الگوریتم دایکسترای توسعه یافته را تشریح کردیم. در مورد نوآوری‌های این تحقیق می‌توان به ارائه الگوریتم دایکسترا براساس یک روش رتبه‌بندی نوین به همراه طراحی و حل مثالی مناسب و مرتبط با آن تحت‌داده‌های فازی شهودی بازه‌ای مقدار اشاره کرد. اثبات برخی قضایا و ویژگی‌های مرتبط با روش رتبه‌بندی تفسیر شده در این نوشته و استفاده از آن در سایر موضوع‌های کاربردی می‌تواند از پژوهش‌های آتی در این زمینه باشد.

مراجع

[1] Dubois D. and Prade H. (1980), *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*.

[2] Karunambigai MG., Rangasamy P., Atanassov K, Palaniappan N. (2007), An intuitionistic fuzzy graph method for finding the shortest path in networks, *Adv Soft Comput*, 42,3–10.

[3] Gani AN. (2010), On searching intuitionistic fuzzy shortest path in a network, *Appl Math Sci*, 69(4), 3447–3454.

[4] Mukherjee S. (2012), Dijikstra's algorithm for solving the shortest path problem on networks under intuitionistic fuzzy environment, *J Math Model Algorithm* 11, 345–359.

[5] Biswas SS., Alam B., Doja MN. (2013), Real time multigraph for communication network: an intuitionistic fuzzy mathematical Model, *J Comput Sci*, 9(7), 847–855.

[6] Rangasamy P., Akram M., Thilagavathi S. (2013), Intuitionistic fuzzy shortest hyper path in a network, *Inf Process Lett*, 113, 599–603.

[7] Barbacioru IC. (2016), Using maple for determination minimum arc length of an intuitionistic fuzzy hyperpath, *Ann Canstantin-Brzncusi Univ TarguJiu Eng Ser* 4, 81–85.

[8] Jayagowri P., GeethaRamani G. (2014), Using trapezoidal intuitionistic fuzzy number to find optimized path in a network, *Adv Fuzzy Syst.*

[9] Porchelvi S., Sudha G. (2014), A new approach for finding Minimum path in a network using triangular intuitionistic fuzzy number, *Int J Curr Res* 6(8), 8103–8109.

[10] Porchelvi RS., Sudha G. (2014), Modified Approach on shortest path in intuitionistic fuzzy environment, *Indian J Appl Res* 4(9), 341–342.

[11] Kumar G., Balaji RK., Gandotra N. (2015), Algorithm for shortest path problem in a network with interval-valued intuitionistic trapezoidal fuzzy number, *Proc Comput Sci* 70, 123–129.

[12] Alsboui T., Hill R., Al-Aqrabi H., Farid H.M.A., Riaz M., Iram S., Shakeel H.M. and Hussain M. 2022, A dynamic multi-mobile agent itinerary planning approach in wireless sensor networks via intuitionistic fuzzy set, *Sensors* 22(20), 8037.

[13] Dinar J., Hussain Z., Zaman S. and Rehman S. U. (2023), Wiener index for an intuitionistic fuzzy graph and its application in water pipeline network, *Ain Shams Engineering Journal* 14(1), 101826.

[14] Tian H., Guo K., Guan X. and Wu Z. (2023), Anomaly Detection of Network Traffic Based on Intuitionistic Fuzzy Set Ensemble, *IEICE Transactions on Communications*, 2022EBP3147.

[15] Bharati SK., Singh SR. (2018), A new interval-valued intuitionistic fuzzy numbers: ranking methodology and application, *N Math Nat Comput.*

[16] Shu-Ping W. (2012), Multi-attribute decision making method based on inter-valued trapezoidal intuitionistic fuzzy number, *Control and Decision* 27(3), 455-463.

[17] Delgado M., Vila M.A. and Vaxman W. (1998), On a canonical representation of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 93, 125-135.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

تحلیلی مقایسه ای بر دو الگوریتم پرایم و کروسکال در حل مسئله کمترین درخت پوشا تحت عدم قطعیت

مدینه فرنام [۱] سارا احمدی [۲]

[۱] گروه مهندسی برق، دانشگاه شهید چمران اهواز- پردیس صنعتی شهدای هویزه، دشت آزادگان، خوزستان، ایران
[۲] پردیس شهید چمران، مرکز شهید بهشتی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

چکیده

این پژوهش با هدف مقایسه عملکرد دو الگوریتم پرایم و کروسکال در محیط‌های نامطمئن، از اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای برای مدل‌سازی وزن یال‌ها استفاده می‌کند. اعداد نوتروسوفیک با در نظر گرفتن سه مؤلفه درستی، ممتنع و نادرستی، ابزاری قدرتمند برای نمایش اطلاعات ناقص یا ناسازگار فراهم می‌کنند. در این راستا، یک تابع رتبه‌بندی نوین مبتنی بر پارامترهای نوتروسوفیک طراحی شد تا مقایسه یال‌ها در فرآیند انتخاب الگوریتم‌ها را ممکن سازد. نتایج حاصل از پیاده‌سازی روی یک گراف نمونه با ۶ گره و ۹ یال نشان داد که هر دو الگوریتم قادر به یافتن درخت پوشای کمینه با هزینه بهینه یکسان هستند، اما تفاوت‌های معناداری در زمان اجرا و ترتیب انتخاب یال‌ها وجود دارد.

کلمات کلیدی: گراف، عدم قطعیت، الگوریتم پرایم، الگوریتم کروسکال، عدد نوتروسوفیک

۱ مقدمه

مسئله درخت پوشای کمینه (MSTP)، به عنوان یک مسئله بهینه‌سازی محدودیت‌دار شناخته‌شده و پرکاربرد در پژوهش عملیاتی و نظریه گراف گسترش‌های بسیاری دارد. این مسئله در حوزه‌های متعددی از جمله مسائل ارتباطی، حمل‌ونقل، لجستیک، مدیریت زنجیره تأمین، پردازش تصویر، شبکه‌های ارتباطی بیسیم و تحلیل خوشه‌ای استفاده می‌شود.

گراف‌های فازی نوتروسوفیک که ترکیبی از گراف‌های فازی و منطق نوتروسوفیک هستند، ابزاری قدرتمند برای مدل‌سازی و تحلیل موقعیت‌های شامل اطلاعات ناسازگار، نادرست یا ناکافی ارائه می‌دهند. مجموعه‌های نوتروسوفیک که توسط سمارانداچ [۱] به‌عنوان توسعه‌ای از مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های فازی شهودی پیشنهاد شدند، ابزارهای مؤثری برای مواجه با اطلاعات ناقص، مبهم و ناسازگار در دنیای واقعی هستند. بعدها نوعی دیگر از این نوع مجموعه‌ها با نام مجموعه‌های

[1] m.farnam@scu.ac.ir
[2] sara.ahmadi1389@yahoo.com

نوتروسوفیک تک مقداری توسط وانگ و همکاران معرفی شد [۲].
الگوریتم پرایم [۳] و الگوریتم کروسکال [۴] از جمله روش‌های شناخته شده برای حل MST در گراف‌های قطعی است. اما در محیط‌های واقعی که عدمقطعیت وجود دارد، این الگوریتم‌ها نیاز به تغییراتی دارند. در پژوهشی آدهیکاری [۵] و همکاران از مجموعه عددهای ذوزنقه‌ای نوتروسوفیک برای توصیف وزن کمان‌های یک شبکه نوتروسوفیک در مسئله MST استفاده کردند. آنها با اعمال تغییراتی بر روش پرایم آن را برای حل مسئله MST در شبکه‌ای با یال‌های نوتروسوفیک به کار بستند. میناکشی و همکاران [۶] شبکه‌های اجتماعی نوتروسوفیک را با استفاده از شبکه‌های حاصلضرب بیشینه و با برخی عملیات‌ها تحلیل کردند. در مطالعه دیگری میناکشی و میشرا [۷] به بررسی ضرایب همبستگی و رگرسیون بر روی گراف نوتروسوفیک تک مقداری با تمرکز بر درخت پوشای کمینه (MST) و کاربردهای آنها در بهبود راهبردهای مراقبت سلامت پرداختند. یه [۸] گراف نوتروسوفیک تک‌مقداری را با استفاده از درخت پوشای کمینه و روش خوشه‌بندی آن مطالعه کرده است. در این تحقیق، برای اولین بار تحلیلی مقایسه‌ای مربوط نسخه‌ای نوتروسوفیک از الگوریتم پرایم و کروسکال به‌صورت همزمان ارائه می‌شود تا مسئله MST در محیط‌های نامطمئن با استفاده از اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای برای مدل‌سازی وزن یال‌ها، حل شود.

۲ مفاهیم اساسی

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\mathcal{M}$ مجموعه جهانی است. اکنون مجموعه نوتروسوفیک $\tilde{n}$ روی مجموعه $\mathcal{M}$ تعریفی به صورت زیر دارد [۱]:

$$\tilde{n} = \{\langle u, (T_{\tilde{n}}(u), I_{\tilde{n}}(u), F_{\tilde{n}}(u))\rangle |\ u \in \mathcal{M}\}, \qquad (۱)$$

به طوریکه در آن $T_{\tilde{n}}(u)$، $I_{\tilde{n}}(u)$ و $F_{\tilde{n}}(u)$ به‌ترتیب متناظر توابع درستی، ممتنع و نادرستی از $\mathcal{M}$ به $[۰, ۱]$ هستند و برای هر u متعلق به $\mathcal{M}$ در رابطه $۰ \leqslant T_{\tilde{n}}(u) + I_{\tilde{n}}(u) + F_{\tilde{n}}(u) \leqslant ۳$ صدق می‌کنند.

تعریف ۲.۲. فرض کنید $\tilde{n} = \langle (a^{\tilde{n}}_{۱}, a^{\tilde{n}}_{۲}, a^{\tilde{n}}_{۳}, a^{\tilde{n}}_{۴}); x^{\tilde{n}}, y^{\tilde{n}}, z^{\tilde{n}} \rangle$ یک عدد نوتروسوفیک ذوزنقهای باشد. در این صورت تابع درستی، تابع ممتنع و تابع نادرستی برای آن به ترتیب زیر ساختار می یابند [۲]:

$$T_{\tilde{n}}(u) = \begin{cases} \dfrac{(u - a^{\tilde{n}}_{۱})}{a^{\tilde{n}}_{۲} - a^{\tilde{n}}_{۱}}, & a^{\tilde{n}}_{۱} \leqslant u < a^{\tilde{n}}_{۲} \\ x^{\tilde{n}}, & a^{\tilde{n}}_{۲} \leqslant u < a^{\tilde{n}}_{۳} \\ \dfrac{(a^{\tilde{n}}_{۴} - u)}{(a^{\tilde{n}}_{۴} - a^{\tilde{n}}_{۳})}, & a^{\tilde{n}}_{۳} \leqslant u \leqslant a^{\tilde{n}}_{۴} \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases} \qquad (۲)$$

$$I_{\tilde{n}}(u)=\begin{cases}\dfrac{(a_{۲}^{\tilde{n}}-u+y^{\tilde{n}}(u-a_{۲}^{\tilde{n}})}{(a_{۲}^{\tilde{n}}-a_{۱}^{\tilde{n}})}, & a_{۱}^{\tilde{n}}\leqslant u<a_{۲}^{\tilde{n}}\\ y^{\tilde{n}}, & a_{۲}^{\tilde{n}}\leqslant u<a_{۳}^{\tilde{n}}\\ \dfrac{(u-a_{۳}^{\tilde{n}}+y^{\tilde{n}}(a_{۴}^{\tilde{n}}-u))}{(a_{۳}^{\tilde{n}}-a_{۴}^{\tilde{n}})} & a_{۳}^{\tilde{n}}\leqslant u\leqslant a_{۴}^{\tilde{n}}\\ ۱, & \text{سایر نقاط}\end{cases} \quad (۳)$$

$$F_{\tilde{n}}(u)=\begin{cases}\dfrac{(a_{۲}^{\tilde{n}}-u+z^{\tilde{n}}(u-a_{۲}^{\tilde{n}})}{(a_{۲}^{\tilde{n}}-a_{۱}^{\tilde{n}})}, & a_{۱}^{\tilde{n}}\leqslant u<a_{۲}^{\tilde{n}}\\ z^{\tilde{n}}, & a_{۲}^{\tilde{n}}\leqslant u<a_{۳}^{\tilde{n}}\\ \dfrac{(u-a_{۳}^{\tilde{n}}+z^{\tilde{n}}(a_{۴}^{\tilde{n}}-u))}{(a_{۳}^{\tilde{n}}-a_{۴}^{\tilde{n}})} & a_{۳}^{\tilde{n}}\leqslant u\leqslant a_{۴}^{\tilde{n}}\\ ۱, & \text{سایر نقاط}\end{cases} \quad (۴)$$

که $T_{\tilde{n}}(u)$، $I_{\tilde{n}}(u)$ و $F_{\tilde{n}}(u)$ در رابطه $۰\leqslant T_{\tilde{n}}(u)+I_{\tilde{n}}(u)+F_{\tilde{n}}(u)\leqslant ۳$ صدق میکنند.

۳ مسئله کمترین درخت پوشای نوتروسوفیک

فرض کنید G نشان دهنده یک گراف نوتروسوفیک باشد. این گراف از p راس $v=\{۱,۲,...,p\}$ و مجموعه‌ای از q یال مانند A تشکیل شده است. از این رو، متغیرها به صورت دودویی هستند. فرمولبندی کلی مدل ریاضی برای مسئله درخت پوشای کمینه به‌صورت زیر است:

$$\min opt\approx\sum_{r\in A}\tilde{n}_r\tau_r$$
$$s.t\begin{cases}\sum_{r\in A}\tau_r=p-۱\\ \sum_{r\in d(s)}\tau_r\geqslant ۱, \quad \forall\, S\subset V,\ V\neq S\neq\varnothing\\ \tau_r\in\{۰,۱\},\ \forall\, r\in A\end{cases} \quad (۵)$$

که در آن $d(s)=\{(n,m):n\in S,\ m\notin S\}$ چالش اصلی در حل این مدل نحوه مدیریت داده های نوتروسوفیک در تابع هدف یعنی مقادیر $\tilde{n}_r$ است.

جدول ۱: اطلاعات یال‌ها

$T-H$	نوتروسوفیک هزینه
۱ − ۲	$\langle((۴/۶, ۵/۵, ۷/۶, ۸/۹); ۰/۴, ۰/۷, ۰/۲\rangle$
۱ − ۵	$\langle((۴/۲, ۶/۹, ۷/۵, ۸/۷); ۰/۷, ۰/۲, ۰/۶\rangle$
۱ − ۳	$\langle((۶/۰, ۷/۶, ۸/۲, ۸/۴); ۰/۴, ۰/۱, ۰/۳\rangle$
۲ − ۵	$\langle((۶/۱, ۶/۷, ۸/۳, ۸/۷); ۰/۵, ۰/۲, ۰/۴\rangle$
۴ − ۵	$\langle((۴/۷, ۵/۹, ۷/۲, ۷/۴); ۰/۷, ۰/۲, ۰/۳\rangle$
۲ − ۶	$\langle((۶/۶, ۸/۸, ۱۰, ۱۲); ۰/۶, ۰/۲, ۰/۲\rangle$
۴ − ۶	$\langle((۶/۳, ۶/۵, ۸/۹, ۸/۹۹); ۰/۷, ۰/۴, ۰/۶\rangle$
۵ − ۶	$\langle((۴/۲, ۶/۹, ۷/۵, ۸/۷); ۰/۷, ۰/۲, ۰/۶\rangle$
۳ − ۴	$\langle((۵/۲, ۷/۹, ۹/۱, ۹/۴); ۰/۶, ۰/۳, ۰/۵\rangle$

۴ روش حل پیشنهادی

در اینجا دو الگوریتم تغییریافته برای حل MSTP در محیط نوتروسوفیک معرفی می‌شود. در دو طرح پیشنهادی، عدم قطعیت‌های الگوریتم پرایم و کروسکال را برای MSTP را با استفاده از مجموعه ذوزنقه‌ای نوتروسوفیک به‌عنوان هزینه یال‌ها توصیف می‌شود. از این رو نیاز به یک روش رتبه‌بندی موثر داریم که توانایی تنظیم داده‌ها براساس این نوع عدم قطعیت را داشته باشد. فرنام و همکاران [۹] یک روش رتبه‌بندی نوین را برای مواجه با عدم قطعیت داده‌های نوتروسوفیک معرفی کردند. در اینجا با اعمال تغییراتی تابع رتبه زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_a(\tilde{n}) = ((a_۱^{\tilde{n}} + a_۴^{\tilde{n}})(x^{\tilde{n}} - \alpha) + (a_۲^{\tilde{n}} + a_۳^{\tilde{n}} - a_۱^{\tilde{n}} - a_۴^{\tilde{n}})\Big(\frac{x^{\tilde{n}^۲} - \alpha^۲}{۲x^{\tilde{n}}}\Big)\\ + (a_۱^{\tilde{n}} + a_۴^{\tilde{n}})(۱ - y^{\tilde{n}} - \alpha) + (a_۲^{\tilde{n}} + a_۳^{\tilde{n}} - a_۱^{\tilde{n}} - a_۴^{\tilde{n}})\Big(\frac{(۱ - y^{\tilde{n}})^۲ - \alpha^۲}{۲(۱ - y^{\tilde{n}})}\Big)\\ + (a_۱^{\tilde{n}} + a_۴^{\tilde{n}})(۱ - z^{\tilde{n}} - \alpha) + (a_۲^{\tilde{n}} + a_۳^{\tilde{n}} - a_۱^{\tilde{n}} - a_۴^{\tilde{n}})\Big(\frac{(۱ - z^{\tilde{n}})^۲ - \alpha^۲}{۲(۱ - z^{\tilde{n}})}\Big)\end{aligned} \quad (۶)$$

با استفاده از این تابع رتبه اکنون الگوریتم پرایم و کروسکال تغییر یافته را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم.
ورودی: یک گراف نوتروسوفیک بدون جهت، همبند و وزندار $G = (X, Y)$ با وزن یال‌های نوتروسوفیک.
خروجی :درخت پوشای کمینه نوتروسوفیک $\tilde{M} = (X, Y)$ و هزینه آن $\widetilde{CM}$
الگوریتم پرایم نوتروسوفیک

۱- $X_n \leftarrow \{t\}$ (گره مبدا انتخاب می‌شود.)

۲- $Y_n \leftarrow \{\}$ (مجموعه یال‌ها در ابتدا تهی فرض می‌شود.)

۳- $\widetilde{CM} \leftarrow ۰$ (هزینه آغازین صفر است.)

۴- مقدار امتیاز برای هر یال براساس تابع رتبه ۶ محاسبه می‌شود.

۵- تا زمانی‌که $X - X_n = \{\}$ (تمام گره‌ها باید بازدید شوند.)

الف) یال (p, r) با کمترین امتیاز به گونه ای انتخاب می شود که $p \in X_n$ و $r \notin X_n$
این یال، کوتاهترین مسیر (از نظر امتیاز نوتروسوفیک) برای گسترش درخت پوشا است.

ب) $\widetilde{CM} \leftarrow \widetilde{CM} + \Re(p, r)$ هزینه کل با استفاده از جمع نوتروسوفیک بهروزرسانی میشود.

ج) $Y_n \leftarrow Y_n \cup (p, r)$

د) $X_n \leftarrow X_n \cup \{(p, r) - X_n\}$

۶- تمامی گره‌ها بازدید شدند و پایان حلقه است.

الگوریتم کروسکال نوتروسوفیک

۱- مقدار امتیاز برای هر یال براساس تابع رتبه ۶ محاسبه می‌شود.

۲- یال‌ها براساس امتیاز از کوچک به بزرگ مرتب می‌شوند.

۳- $Y_n \leftarrow \{\}$ یعنی مجموعه یال‌های درخت پوشای کمینه است که در ابتدا خالی است.

۴- برای هر یال (p, r) در گام ۲، بررسی کنید:

الف) آیا این یال در مجموعه Y_n است یا نه؟ اگر هست که کار با این یال تمام است و سراغ یال بعدی برو.

ب) اگر نیست بررسی کن آیا اضافه کردن این یال تشکیل حلقه با یال‌های موجود در Y_n می دهد. اگر تشکیل حلقه می‌دهد، آن را رها کن و سراغ یال بعدی برو در غیراین‌صورت آن را به مجموعه اضافه کن. یعنی:

$$Y_n \leftarrow \{\} + (p, r)$$

۵- گام ۴ تا $n - ۱$ دفعه برای به دست آوردن کمترین درخت پوشا تکرار می‌شود. منظور از n تعداد گرهها است.

اگر چه رویکرد هر یک از الگوریتم ها خاص و مجزا است اما خروجی هر دو درخت پوشای کمینه را به دست می‌دهد.

۵ مثال کاربردی

یک گراف بدون جهت، وزندار و نوتروسوفیک با ساختار $G = (X, Y)$ را در نظر بگیرید که وزن یال‌های آن به‌صورت اعداد ذوزنقه‌ای نوتروسوفیک بیان شده است. (اطلاعات در جدول ۱ آورده شده است.)

جدول ۲: اطلاعات یال‌ها

جواب	روش پیشنهادی	
	الگوریتم پرایم	الگوریتم کروسکال
مجموعه یال‌های انتخابی در درخت پوشای کمینه	(۱, ۲)	(۱, ۲)
	(۱, ۵)	(۴, ۵)
	(۴, ۵)	(۱, ۵)
	(۵, ۶)	(۵, ۶)
	(۲, ۳)	(۲, ۳)
مقدار بهینه	۱/۴۶	۱/۴۶
زمان اجرا	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۳۰

کدنویسی هر دو روش در نرم افزار MATLAB انجام و نتایج به صورت خلاصه در جدول ۲ آورده شده است. اگر چه هر دو الگوریتم در نهایت مجموعه یکسانی از یال‌ها را به‌عنوان خروجی نمایش می‌دهند با این حال، در ترتیب انتخاب یال‌ها تفاوت‌هایی دارند. هر دو الگوریتم به مقدار بهینه یکسانی رسیده‌اند که نشان‌دهنده صحت روش پیشنهادی در مدیریت عدم قطعیت با اعداد نوتروسوفیک است. زمان اجرای الگوریتم کروسکال در اینجا کمتر از الگوریتم پرایم است و این به دلیل تفاوت در ساختار کلی هر دو روش است.

۶ نتیجه‌گیری

در این پژوهش، دو الگوریتم پرایم و کروسکال در حل مسئله کمترین درخت پوشا (MST) تحت شرایط عدم قطعیت با استفاده از اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای مورد بررسی و مقایسه قرار گرفتند. نتایج نشان داد که هر دو الگوریتم قادر به یافتن درخت پوشای کمینه با هزینه بهینه یکسان در محیط نوتروسوفیک هستند، که صحت روش پیشنهادی در مدیریت عدم قطعیت را تأیید می‌کند. تفاوت اصلی بین این دو الگوریتم در ترتیب انتخاب یال‌ها و زمان اجرا بود. الگوریتم کروسکال به‌دلیل ماهیت مرتب‌سازی یال‌ها و عدم نیاز به پیگیری گره‌های فعال، در مثال ارائه‌شده زمان اجرای کمتری نسبت به پرایم داشت، در حالی که الگوریتم پرایم برای گراف‌های متراکم کارایی بهتری نشان می‌دهد. استفاده از تابع رتبه‌بندی نوین مبتنی بر اعداد نوتروسوفیک ذوزنقه‌ای، امکان مقایسه و انتخاب یال‌ها در شرایط نامعین را فراهم کرد و تعمیم‌پذیری روش‌های کلاسیک را به حوزه‌های پیچیده‌تر اثبات نمود.

مراجع

[1] F. Smarandache, “Invisible paradox,” Neutrosophy/Neutrosophic Probability, Set, and Logic”, Am. Res. Press, Rehoboth, pp. 22–23, 1998.

[2] H. Wang, F. Smarandache, Y. Zhang, and R. Sunderraman, “Single valued neutrosophic sets,” Review of the Air Force Academy, no. 1, p. 10, 2010.

[3] R. C. Prim, “Shortest connection networks and some generalizations,” Bell system technical journal, vol. 36, no. 6, pp. 1389–1401, 1957.

[4] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. Introduction to Algorithms, Second Edition. MIT Press and McGraw-Hill, 2001. ISBN 0-262-03293-7. Section 23.2: The algorithms of Kruskal and Prim, pp. 567–574.

[5] Adhikary, K., Pal, P., & Poray, J. (2024). The minimum spanning tree problem on networks with neutrosophic numbers. Neutrosophic Sets and Systems, 63 (1), 258-270.

[6] Meenakshi, A. and Mythreyi, O., Applications of Neutrosophic Social Network Using Max Product Networks. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, (2023), 45 (1), pp.407–420.

[7] Meenakshi, A., & Mishra J, S. (2025). Correlation and Regression Coefficients of Neutrosophic Graph Products using Minimum Spanning Tree for Enhancing Healthcare Strategies. Neutrosophic Sets and Systems, 78 (1), 7.

[8] Ye, J., Single valued neutrosophic minimum spanning tree and its clustering method. Journal of Intelligent Systems, (2014a), 23 (3), pp.311–324.

[9] Farnam, Madineh, Majid Darehmiraki, and Zahra Behdani. ”Neutrosophic data envelopment analysis based on parametric ranking method.” Applied Soft Computing 153 (2024): 111297.

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

تحلیلی مقایسه‌ای بر مدیریت ریسک پیش از بحران در شبکه‌های بزرگراهی با استفاده از مدل کوله‌پشتی بازه‌ای

مدینه فرنام [1]

[1] گروه مهندسی برق، دانشگاه شهید چمران اهواز- پردیس صنعتی شهدای هویزه، دشت آزادگان، خوزستان، ایران

چکیده

مسئله برنامه‌ریزی پیش از وقوع بحران برای بهینه‌سازی شبکه‌های بزرگراهی، با در نظر گرفتن احتمال خرابی تصادفی لینک‌ها پس از حوادث طبیعی، در زمره مسائل ترکیبی مشابه مسئله کوله‌پشتی طبقه‌بندی می‌شود. در واقع هدف اصلی، تضمین اتصال کارآمد بین جفت‌های مبدأ-مقصد حیاتی برای تیم‌های امدادی، با تمرکز بر شرایط جاده‌ای بدون محدودیت ظرفیت و حداقل‌سازی هزینه‌های پیمایش است. تصمیم‌گیرنده با محدودیت بودجه مواجه است و باید زیرمجموعه‌ای از لینک‌ها را انتخاب کند که حداکثر اطمینان‌پذیری شبکه و حداقل هزینه عملیاتی را در شرایط عدم قطعیت تضمین نماید. به دلیل طبیعت نادقیق پارامترهای واقعی، ضرایب مؤثر در تابع هدف به‌صورت بازه‌ای مدل‌سازی شده‌اند، که مقایسه سیستماتیک آن‌ها را به چالشی کلیدی مواجه می‌سازد. در این پژوهش، با تلفیق یک روش کارآمد رتبه‌بندی بازه‌ها مبتنی بر ماتریس امکان‌پذیری با الگوریتم‌های حریصانه و شاخه و حد، راهکاری ترکیبی ارائه شده است. الگوریتم حریصانه جواب‌های تقریبی سریع تولید می‌کند، درحالی‌که روش شاخه و حد با بررسی جامع فضای حالت، جواب بهینه را تضمین می‌نماید. برای این منظور تحلیل مقایسه‌ای بر روی شبکه‌ای نمونه با ۱۰ لینک و بودجه ۸۶۰ واحدی انجام شده است. نتایج می‌تواند راهبردهای مدیریت ریسک در شرایط عدم قطعیت را روشن سازد.

کلمات کلیدی: گراف، عدم قطعیت، الگوریتم پرایم، الگوریتم کروسکال، عدد نوتروسوفیک

۱ مقدمه

مسئله کوله‌پشتی صفر و یک یکی از شناخته‌شده‌ترین مسائل در حوزه بهینه‌سازی گسسته و ترکیبیاتی محسوب می‌شود که در حل بسیاری از چالش‌های کاربردی دنیای واقعی مانند مدیریت بارگیری، تخصیص منابع با ظرفیت محدود، انتخاب بهینه پروژه‌ها، برنامه‌ریزی مالی و تخصیص بودجه کاربرد گسترده‌ای دارد. هدف اصلی در این مسئله، انتخاب زیرمجموعه‌ای از اشیاء با در نظر گرفتن وزن و ارزش مشخص هر کدام است، به‌گونه‌ای که بیشترین ارزش کلی به‌دست آید، بدون آنکه مجموع وزن اشیاء انتخابی از ظرفیت مجاز کوله‌پشتی تجاوز کند. اگرچه فرمول‌بندی این مسئله ساده به نظر میرسد، حل آن به‌دلیل رشد نمایی ناشی از پیچیدگی محاسباتی، با چالشهای قابل توجهی همراه است و در دسته مسائل NP-سخت طبقه‌بندی می‌شود. این ویژگی موجب شده است پژوهشگران از روشهای متنوعی

[1] m.farnam@scu.ac.ir

شامل الگوریتم‌های قطعی و روشهای اکتشافی برای یافتن جواب‌های بهینه یا نزدیک به بهینه استفاده کنند [۱ ، ۲].

در دنیای واقعی، به دلیل ذات نامطمئن محیط، دو رویکرد احتمالی و فازی برای در نظر گرفتن عدم قطعیت در مسئله کوله‌پشتی استفاده می‌شود. در رویکرد احتمالی، مقادیر پارامترهای مسئله به‌عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. با این حال رویکرد فازی به دلیل پیچیدگی محاسباتی کمتر در سال‌های اخیر توسعه بیشتری یافته است. برای حل مسئله کوله‌پشتی با استفاده از برنامه‌ریزی فازی، عبود و همکاران مسئله کوله‌پشتی چندهدفه را به‌عنوان یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی مدل‌سازی کردند و از الگوریتم‌های ژنتیک برای حل آن استفاده نمودند [۳]. یک روش فراابتکاری فازی که ترکیبی از سیستم استنتاج فازی با فراابتکاری انتخابی است، در منبع [۴] پیشنهاد شده است. مسئله کوله‌پشتی فازی برای توابع تک‌هدفه و دوهدفه، که در آن وزن‌ها و سودها به‌عنوان اعداد فازی مثلثی در نظر گرفته شدند، در [۵] بررسی شده است که در آن نویسندگان از روش برنامه‌ریزی پویا با استفاده از تصمیم‌گیری چندمرحله‌ای بهره گرفته‌اند و آن را برای حل مسئله سرمایه‌گذاری در محیط‌های غیرقطعی به کار بردند. علاوه‌بر این، مسئله کوله‌پشتی چندبُعدی نامطمئن با معیارهای تصمیم‌گیری مختلف در منبع [۶] مطالعه شده است. با این حال تحقیقات بسیار کمتری در حوزه کاربرد مسئله کوله پشتی برای مدیریت بحران با اعداد بازه‌ای می‌توان یافت.

عملکرد سیستم‌های زیرساختی شهری مانند حمل‌ونقل، آب، انرژی و ارتباطات ممکن است تحت تأثیر بلایای طبیعی یا انسانی به‌شدت مختل شود. این سیستم‌ها را می‌توان به‌عنوان شبکه‌هایی توصیف کرد که لینک‌های آن‌ها به‌صورت تصادفی در اثر فاجعه دچار خرابی می‌شوند. در این مدل‌ها، هر لینک با دو حالت فعال و غیرفعال شناخته‌شده توصیف می‌گردد، به‌طوری که سرمایه‌گذاری می‌تواند موجب افزایش بقا لینک‌ها در شبکه شود. برای پاسخ مؤثر به حادثه، ضروری است که این شبکه‌ها، به‌ویژه شبکه‌های حمل‌ونقل جاده‌ای، فعال باقی بمانند. از این رو در این تحقیق مسئله سرمایه‌گذاری پیش از بحران برای شبکه‌های بزرگراهی با اعداد بازه‌ای به‌عنوان یکی از کاربردهای مهم مسئله کوله‌پشتی مورد بررسی قرار گرفته است.

۲ روش شناسی

مدیریت بحران فرایندی چندمرحله‌ای است که با کاهش ریسک پیش از فاجعه و آمادگی برای آن آغاز می‌شود و تا پاسخ، بازیابی و بازسازی پس از فاجعه ادامه می‌یابد. سرمایه‌گذاری در سیستم‌های زیرساختی نقش کلیدی در فعالیت‌های کاهش ریسک دارد، زیرا شامل تقویت لینک‌های شبکه برای افزایش تابآوری آنهاست. تقویت تمام لینک‌ها تا سطوح ایمنی هدف ممکن است هزینه‌های غیرقابل قبولی داشته باشد؛ بنابراین با وجود محدویت بودجه، باید زیرمجموعه‌ای از لینکها انتخاب شوند. تصمیم‌گیرندگان این مسئله را با اولویت‌بندی لینک‌ها بر اساس ترکیبی وزندار از عوامل مختلف حل می‌کنند. هدف، بیشینه‌سازی عملکرد مورد انتظار شبکه متناسب با نیازهای سازمان‌های پاسخگو و با

توجه به محدودیت بودجه است. فرض کنید G شبکه‌ای با m گره و n یال باشد. مدل‌سازی با هدف، انتخاب زیرمجموعه‌ای از یال‌ها برای بیشینه‌سازی مجموع افزایش بقا، با محدودیت بودجه b برای مجموعه یال‌ها Λ به‌صورت زیر است:

$$P : \max \sum_{(i,j)\in\wedge} (\tilde{s}_{i,j} - \tilde{t}_{i,j})x_{i,j} = ([\tilde{s}^l_{i,j} - \tilde{s}^u_{i,j}] - [\tilde{t}^l_{i,j} - \tilde{t}^u_{i,j}])x_{i,j}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(i,j)\in\wedge} (c_{i,j})x_{i,j} \preccurlyeq b$$

$$x_{i,j} \in \{۰, ۱\}, \qquad (i,j) \in \Lambda$$

که در آن $\tilde{t}_{i,j}$ عامل بقای لینک (i,j) است و این مقدار با صرف هزینه $c_{i,j}$ می‌تواند به $\tilde{s}_{i,j}$ ارتقا یابد. علاوه‌بر این متغیر تصمیم سرمایه‌گذاری $x_{i,j}$ به گونه‌ای است که مقدار یک به معنای فعال بودن و مقدار صفر به معنای غیرفعال ماندن لینک متناظر آن است.

کاربرد عملی و همسویی با فرایند مدیریت بحران

انتخاب بهینه لینک‌ها نه تنها تاب‌آوری شبکه را بهبود می‌بخشد، بلکه زمان پاسخگویی به بحران و هزینه‌های بازیابی را کاهش می‌دهد. این مدل باید با مشارکت ذینفعان (مانند سازمان‌های امدادی و دولت) و با در نظر گرفتن معیارهای کیفی مانند اولویت مناطق جغرافیایی یا دسترسی به مراکز حیاتی (بیمارستان‌ها، مراکز امداد) تکمیل شود. برای نمونه، لینک‌های متصل به شریان‌های حیاتی ممکن است ضرایب وزنی بالاتری در تابع هدف دریافت کنند.

روش‌های حل و الگوریتم‌های پیشنهادی

با توجه به NP ـ سخت بودن مسئله، استفاده از روش‌های دقیق (مانند شاخه و حد) تنها برای شبکه‌های کوچک امکان‌پذیر است. در شبکه‌های بزرگ مقیاس، بهره‌گیری از روش‌های فراابتکاری (متاهیوریستیک‌ها) مانند الگوریتم ژنتیک، روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO)، یا الگوریتم‌های مبتنی بر حریصانه (Greedy) ضروری است. برای مثال، یک رویکرد حریصانه ممکن است لینک‌ها را براساس «نسبت سود به هزینه» اولویت‌بندی کرده و تا اشباع بودجه انتخاب کند. چالش اصلی در استفاده از این نوع فرایندهای حل نحوه رتبه‌بندی اعداد بازه‌ای است. مطالعه گسترده در این حوزه روش زیر را به‌عنوان یکی از روش‌های برتر در این حوزه نشان می‌دهد.

روشی کارا برای مرتب‌سازی اعداد بازه‌ای مقدار

دو عدد بازه‌ای مقدار دلخواه $\bar{a}_۱ = [a^l_۱, a^u_۱]$ و $\bar{a}_۲ = [a^l_۲, a^u_۲]$ را در نظر بگیرید. علاوه‌بر این فرض کنید [۷]:

$$len(\bar{a}_۱) = a^u_۱ - a^l_۱, \; len(\bar{a}_۲) = a^u_۲ - a^l_۲$$

درجه امکان برای اینکه $\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲$ باشد، به کمک رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲) = \max\left\{۱ - \max\left\{a^u_۲ - a^l_۱ len(\bar{a}_۱) + len(\bar{a}_۲), ۰\right\}, ۰\right\} \qquad (۱)$$

با استفاده از مفهوم درجه امکان، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲ \Leftrightarrow p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲) \geq ۰/۵$$

با استفاده از رابطه (۱) در تعریف فوق قضیه زیر به درستی برقرار می‌شود [۷].

قضیه ۱.۲. برای سه عدد فازی بازه‌ای مقدار $\bar{a}_۱ = [a_۱^l, a_۱^u]$، $\bar{a}_۲ = [a_۲^l, a_۲^u]$ و $\bar{a}_۳ = [a_۳^l, a_۳^u]$، روابط زیر برقرار هستند:

۱) $۰ \leq p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲) \leq ۱$,

۲) $p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲) + p(\bar{a}_۲ \geq \bar{a}_۱) = ۱, p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۱) = ۰/۵$,

۳) $p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲) = ۱ \Longleftrightarrow a_۱^l \geq a_۲^u$,

۴) $p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲) = ۰ \Longleftrightarrow a_۱^u \leq a_۲^l$,

۵) $p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲) \geq ۰/۵ \Longleftrightarrow a_۱^l + a_۱^u \geq a_۲^l + a_۲^u$,

۶) $(p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۲) \geq ۰/۵, p(\bar{a}_۲ \geq \bar{a}_۳) \geq ۰/۵) \Rightarrow p(\bar{a}_۱ \geq \bar{a}_۳) \geq ۰/۵$.

در ادامه، روشی بر پایه درجه امکان برای رتبه‌بندی یک مجموعه از اعداد بازه‌ای ارائه می‌شود.

فرض کنید می‌خواهیم n بازه‌ی $\bar{a}_۱, \bar{a}_۲, \ldots, \bar{a}_n$ را رتبه‌بندی نماییم. هر $\bar{a}_i$ با تمام $\bar{a}_j$ ها $(j = ۱, ۲, \ldots, n)$ با رابطه (۱) مقایسه می‌شود. ماتریس مقایسه زوجی را به‌صورت $P = (p_{ij})_{n\times n}$ که در آن $p_{ij} = p(\bar{a}_i \geq \bar{a}_j)$ تشکیل می‌دهیم. سپس ماتریس بولین $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ با استفاده از P به‌صورتی حاصل می‌شود که:

$$q_{ij} = \begin{cases} ۱, & p_{ij} \geq ۰/۵ \\ ۰, & p_{ij} \leq ۰/۵ \end{cases} \qquad (۲)$$

ماتریس Q ماتریس رتبه برای n بازه‌ی $\bar{a}_۱, \bar{a}_۲, \ldots, \bar{a}_n$ می‌باشد.

برای هر $\bar{a}_i (i = ۱, ۲, \ldots, n)$، فرض کنید $\lambda_i = \sum_{j=۱}^{n} q_{ij}$ باشد، در این صورت بردار رتبه $\lambda = (\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n)$ $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ را به‌دست می‌آوریم. آنگاه $\bar{a}_i$ها، λ_iها را به ترتیب نزولی مطابق با مقادیر مرتب می‌کنیم.

قضیه ۲.۲. فرض کنید n بازه‌ی $\bar{a}_۱, \bar{a}_۲, \ldots, \bar{a}_n$ داشته باشیم. علاوه‌بر این فرض کنیم $P = (p_{ij})_{n\times n}$ و $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ به ترتیب متناظر با ماتریس‌های درجه امکان و رتبه‌بندی بازه‌های مفروض باشند. در این صورت اگر $\lambda_i = \sum_{j=۱}^{n} q_{ij}$ باشد آنگاه:

$$\lambda_i \geq \lambda_j \Longleftrightarrow p_{ij} \geq ۰/۵$$

قضیه ۲.۲، نشان می‌دهد که شرایط گفته شده برای رتبه‌بندی یک مجموعه از بازه‌ها کافی است. به ویژه برای وقتی که این بازه‌ها عناصر فازی مردد بازه‌ای مقدار باشند [۷].

با توجه به مطالب گفته شده در این بخش الگوریتم زیر را می‌توان برای رتبه‌بندی n عنصر فازی بازه‌ای مقدار $\bar{g}_۱, \bar{g}_۲, \ldots, \bar{g}_n$ به کار برد.

الگوریتم ۱ رتبه‌بندی n عنصر بازه‌ای مقدار .

گام۱: درجه امکان برای هر دو عنصر را طبق رابطه (۱) بیابید و ماتریس درجه امکان $P = (p_{ij})_{n\times n}$ را بنویسید.
گام ۲: ماتریس بولین $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ را با توجه به رابطه (۲) تشکیل دهید.
گام ۳: بردار رتبه $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ را بنویسید.
گام ۴: n عنصر فازی بازه‌ای مقدار $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_n$ را به‌صورت نزولی براساس مقادیر λ_iها $(i = 1, 2, \ldots, n)$ مرتب کنید.

جدول ۱ : اطلاعات اولیه شبکه.

شماره یال	یال‌ها	$\tilde{t}_{i,j}$	$\tilde{s}_{i,j}$	c_{ij}
۱	$e_{۱,۲}$	[۰/۳, ۰/۵]	[۰/۷, ۰/۹]	۸۰
۲	$e_{۱,۳}$	[۰/۲, ۰/۴]	[۰/۶, ۰/۸]	۱۲۰
۳	$e_{۲,۳}$	[۰/۴, ۰/۶]	[۰/۸, ۱/۰]	۱۵۰
۴	$e_{۲,۴}$	[۰/۱, ۰/۳]	[۰/۵, ۰/۷]	۹۰
۵	$e_{۳,۴}$	[۰/۵, ۰/۷]	[۰/۹, ۱/۰]	۲۰۰
۶	$e_{۳,۵}$	[۰/۲, ۰/۴]	[۰/۶, ۰/۸]	۱۱۰
۷	$e_{۴,۵}$	[۰/۳, ۰/۵]	[۰/۷, ۰/۹]	۷۰
۸	$e_{۱,۴}$	[۰/۴, ۰/۶]	[۰/۸, ۱/۰]	۱۸۰
۹	$e_{۱,۵}$	[۰/۱, ۰/۲]	[۰/۵, ۰/۶]	۵۰
۱۰	$e_{۲,۵}$	[۰/۵, ۰/۷]	[۰/۹, ۱/۰]	۱۶۰

جدول ۲ : نتایج براساس دو روش حریصانه و شاخه و حد.

متغیر تصمیم	روش حریصانه	روش شاخه وحد
$x_{۱,۲}$	۱	۱
$x_{۱,۳}$	۱	۱
$x_{۲,۳}$	۱	۱
$x_{۲,۴}$	۱	۱
$x_{۳,۴}$	۰	۰
$x_{۳,۵}$	۱	۱
$x_{۴,۵}$	۱	۱
$x_{۱,۴}$	۱	۱
$x_{۱,۵}$	۱	۱
$x_{۲,۵}$	۰	۰
بازه بهینه	[۱/۷, ۴/۷]	[۱/۷, ۴/۷]
زمان اجرا	۰/۰۰۰۳	۰/۰۲۳۹

۳ مثال عددی

اعتبارسنجی این مدل و ایده حل آن نیازمند اجرای آن روی نمونه‌های فرضی و همین‌طور داده‌های واقعی (مانند شبکه‌های حمل‌ونقل شهری) و مقایسه با رویکردهای موجود است. در اینجا برای شروع مثالی با ۵ گره، ۱۰ یال و بودجه ۸۶۰ واحد را مطابق داده‌های ارائه شده در جدول ۱ مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

حل مسئله با استفاده از دو روش حریصانه و شاخه و حد بازه بهینه یکسانی را به ما نشان می‌دهد. با این حال زمان در الگوریتم حریصانه به مراتب کمتر از روش شاخه و حد است. بررسی این مسئله در مدل‌های واقعی و ادغام این چارچوب با سیستم‌های پشتیبانی تصمیم (DSS) می‌تواند قابلیت اجرایی

آن را در شرایط بحران افزایش دهد.

۴ نتیجه‌گیری

این پژوهش با ترکیب روش رتبه‌بندی بازه‌ها مبتنی‌بر ماتریس امکان‌پذیری و الگوریتم‌های حریصانه و شاخه و حد، چارچوبی نوین برای بهینه‌سازی سرمایه‌گذاری پیش از وقوع بحران در شبکه‌های بزرگراهی ارائه می‌کند. نتایج نشان داد که هر دو روش در شبکه‌های کوچک (مانند نمونه ۱۰ یال) به جواب بهینه یکسانی می‌رسند، اما الگوریتم حریصانه با زمان اجرای قابل‌توجهی ۰/۰۰۰۳ ثانیه در مقابل ۰/۰۲۳۹ ثانیه، گزینه مناسبتری برای تصمیم‌گیری سریع در شرایط بحران است. این مدل با در نظر گرفتن عدم قطعیت در پارامترها، انعطاف‌پذیری لازم برای مواجهه با سناریوهای واقعی را فراهم می‌کند. کاربرد این چارچوب در سیستم‌های پشتیبانی تصمیم (DSS) می‌تواند زمان پاسخگویی به بحران را کاهش داده و جان انسان‌ها را نجات دهد. با این حال، همگرایی نتایج دو روش در شبکه‌های بزرگ‌تر نیاز به بررسی بیشتر دارد، چرا که افزایش ابعاد مسئله ممکن است کارایی الگوریتم شاخه و حد را تحت تأثیر قرار دهد. پیشنهادات زیر برای ادامه پژوهش در این حوزه می‌تواند مورد توجه محققان باشد:

- توسعه مدل برای شبکه‌های با مقیاس بزرگ و بررسی کارایی الگوریتم‌های حل آن‌ها
- در نظر گرفتن پارامترهای دینامیک به منظور مدل‌سازی تحت تاثیر عوامل پویایی همچون تغییرات ترافیک، تخریب‌های پیشرونده
- استفاده از داده‌های واقعی براساس اطلاعات سازمان‌های مدیریت بحران به ویژه در کلان‌شهرها
- تحلیل هزینه‌ـ فایده چند مرحله‌ای به منظور بررسی سناریوهای تدریجی با در نظر گرفتن بودجه سالیانه
- ارزیابی ریسک‌های غیرمستقیم به منظور مطالعه تأثیر خرابی شبکه حمل‌ونقل بر سایر زیرساخت‌ها (مانند انرژی و ارتباطات) و ارائه مدل‌های بهینه‌سازی چندهدفه.

مراجع

[1] Vanderster D., Dimopoulos N., Parra-Hernandez R., Sobie R. (2009), Resource allocation on computational grids using a utility model and the knapsackproblem, Future Gener, *Comput. Syst.*, 25 (1),35–50.

[2] Wilbaut C., Hanafi S., Salhi S. (2008), A survey of effective heuristics and their application to a variety of knapsack problems, *IMA J. Manage. Math.*, 19 (3), 227.

[3] Abboud, N. J., Sakawa, M., Inuiguchi, M. (1997), A fuzzy programming approach to multiobjective multidimensional $0, 1$ knapsack problems, *Fuzzy sets and systems*, 86 (1), 1-14.

[4] Olivas, F., Amaya, I., Ortiz-Bayliss, J. C., Conant-Pablos, S. E., Terashima-Mar´ın, H. (2021), Enhancing Hyper heuristics for the Knapsack Problem through Fuzzy Logic, *Computational Intelligence and Neuroscience*.

[5] Singh, V. P. (2020), An Approach to Solve Fuzzy Knapsack Problem in Investment and Business Model, *Networked Business Models in the Circular Economy*, 154-173.

[6] Cheng, L., Rao, C., and Chen, L. (2017), Multidimensional knapsack problem based on uncertain measure, *Scientia Iranica. Transaction E, Industrial Engineering,* 24(5), 2527-2539.

[7] Zeng, W., Li, D., Gu, Y. (2019), Note on the aggregation operators and ranking of hesitant interval-valued fuzzy elements, *Soft Comput*, 23, 8075–8083. https://doi.org/10.1007/s00500-018-3445-x

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

کاربرد مدلسازی ریاضی در درمان بیماری‌های قلبی

مریم مسعودی آرانی [۱]

[۱] گروه علوم پایه، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

چکیده

ما در این مقاله، برخی از مدلسازی‌های ریاضی را که در مطالعه بیماری‌های قلبی مورد استفاده قرار گرفته است، مطالعه می‌کنیم. همچنین نتیجه حاصل از به کار گیری این مدلسازی‌ها در تشخیص برخی از بیماری‌های قلبی و دست‌یابی به درمانی موثرتر و بی‌خطرتر بررسی می‌شود. مدلسازی‌های مورد نظر مربوط به درمان بیماری‌های VSD، نارسایی دریچه آئورت و گرفتگی عروق می‌باشد. با استفاده از مدلسازی ریاضی و حل معادلات حاصل، دیواره عروق دارای گرفتگی، مطالعه شده و میزان تنش حاصل از ایجاد گرفتگی بررسی می‌شود. این مطلب از آن نظر دارای اهمیت است که در رگ‌های دارای گرفتگی، نقاط دارای تنش بالا برای درمان‌هایی از قبیل جراحی و گذاشتن فنر ارزشمند هستند.

کلمات کلیدی: مدلسازی ریاضی، گرفتگی عروق، نقص دیواره بطن، تنش دیواره رگ

۱ مقدمه

علم ریاضیات از دیرباز به عنوان یک ابزار بسیار مفید برای دست‌یابی به ارزیابی درست، درک روابط بین پدیده‌ها و کمتر شدن خطا در پیش‌بینی‌ها، در اختیار سایر علوم بوده است. از جمله علوم پزشکی که از دانش ریاضی و ابزارهای آن بهره فراوان برده است. تا جایی که همکاری نزدیک پزشکان و ریاضی‌دانان نقش بسزایی در دست‌یابی به روش‌های درمانی مفید داشته است. امروزه استفاده از مدلسازی‌های ریاضی در فیزیولوژی انسانی توسعه بسیاری داشته است. با شناخت روابط بین پدیده‌ها و بیان آنها به زبان ریاضی، معادلات و روابط ریاضی حاکم بر آنها ساخته می‌شود. با حل این معادلات و تحلیل پاسخ‌های بدست آمده، نتایج مفیدی در تشخیص بیماری‌ها و دست‌یابی به درمان‌های اصولی‌تر و کم‌خطرتر بدست می‌آید.

در این مقاله برخی از مدلسازی‌های ریاضی را که در تشخیص و درمان بیماری‌های قلب و عروق به کار رفته است، مطالعه می‌کنیم. در [۱] یک نمونه مدلسازی ریاضی سیستم قلب و عروق معرفی شده است که برای بررسی و مطالعه نارسایی دریچه آئورت و بیماری‌های VSD معرفی شده است. مزیت

[1] masoudiar@gmail.com

این مدل آن است که یافته‌های آن با مقدارهای فیزیولوژیکی انطباق خوب و قابل قبولی داشته و می‌توان با استفاده از این مدل، دیگر بیماری‌های قلب و عروق را نیز شبیه‌سازی نمود. نمونه دیگر که در [۲] معرفی شده است، مدلسازی ریاضی است که برای جریان خون در یک رگ با گرفتگی نامتقارن ارائه شده است. در این مدلسازی، جریان خون در یک رگ مخروطی و به صورت غیرنیوتنی در نظر گرفته شده و برای ساده کردن معادلات حاصل، گرفتگی عروق به صورت خفیف در نظر گرفته شده است. با استفاده از این مدلسازی و حل معادلات حاصل، دیواره عروقی که دچار گرفتگی هستند در طول یک رگ در دو حالت انعطاف‌پذیر و انعطاف‌ناپذیر مطالعه شده و نتایج مفیدی در مورد ارتباط سرعت جریان خون و مقاومت در برابر تنش و احتمال پارگی رگ در قسمتی که گرفتگی ایجاد شده است، بدست می‌آید. مدلسازی دیگری که در این مقاله مطالعه می‌کنیم، مدلسازی ریاضی است که برای بررسی اثر گرفتگی رگ روی سرعت و دمای جریان خون در [۴] ارائه شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد، در دیواره رگ در نزدیکی سطح تماس با جریان خون به دلیل تغییرات شتاب، انرژی در دیواره رگ افزایش پیدا می‌کند. همچنین با دقت در مدل بدست آمده، ملاحظه می‌کنیم برخورد جریان سیال به ناحیه گرفتگی و ایجاد نیرو در آن، در نقاط ابتدا و انتهای گرفتگی تنش ایجاد می‌کند. این مطلب از آن نظر ارزشمند است که در رگ‌های دارای گرفتگی نقاط دارای تنش بالا، برای درمان‌هایی از قبیل جراحی و گذاشتن فنر اهمیت دارند.

۲ دست‌آوردهای پژوهش

۱.۲ مدلسازی ریاضی سیستم قلب و عروق در بیماری VSD و نارسایی دریچه آئورت

یکی از بیماری‌های مادرزادی قلب، نقص دیواره بین دو بطن یا VSD است. در این بیماری، در دیواره‌ی بین دو بطن قلب، سوراخی وجود دارد که باعث انتقال غیرطبیعی خون بین آنها می‌شود. از این سوراخ خون از بطن چپ به جای اینکه به بقیه بدن پمپاژ شود، دوباره به بطن راست و به ریه‌ها برمی‌گردد. این امر موجب مخلوط شدن خون سرشار از اکسیژن بطن چپ با خون کم‌اکسیژن بطن راست می‌شود. لذا فشار خون در ریه‌ها افزایش یافته و کار قلب برای پمپاژ خون بیشتر می‌شود.

قلب انسان از چهار دریچه تشکیل شده است که یکی از مهم‌ترین آن‌ها، دریچه آئورت است. این دریچه بین بطن چپ و شریان آئورت قرار داشته و جریان خون را از بطن چپ به سمت شریان اصلی آئورت هدایت می‌کند. نارسایی دریچه آئورت بیماری است که در آن خون به طور کامل از بطن چپ وارد شریان آئورت نمی‌شود. در اغلب مواردی که نارسایی دریچه آئورت اتفاق می‌افتد، تخلیه خون به خوبی در بطن چپ انجام نمیشود. در برخی از موارد نارسایی دریچه آئورت می‌تواند موجب برگشت و یا نشت جریان خون از رگ آئورت به سمت بطن چپ شود. افرادی که به بیماری نارسایی دریچه آئورت مبتلا هستند، معمولاً با تنگی نفس و یا درد قفسه سینه مواجه خواهند شد. در [۱] با بدست آوردن قواعد و رابطه‌های ریاضی که بر دستگاه قلب و عروق حاکم است، یک مدل ریاضی برای بررسی

ومطالعه روی بیماری‌های VSD و نارسایی دریچه آئورت ارائه شده است. در این مدل، دستگاه قلب و عروق به قسمت‌های مختلف تقسیم شده و عملکرد هر قسمت، مقاومت و اینرسی خون درون رگ‌ها شبیه‌سازی شده است. معادلات ریاضی ساخته شده برای این مدل غیرخطی بوده و در آن نوسان میزان منقبض شدن عضلات بطن‌ها و توانایی پمپ کردن آنها به شکل توابع نیم‌سینوسی در نظر گرفته شده‌اند. مزیت این مدل این است که نتیجه‌هایی که از آن به‌دست می‌آید با مقدارهای فیزیولوژیکی انطباق خوب و قابل قبولی داشته و برای مطالعه و بررسی بیماری‌های مختلف قلب و عروق می‌توان با استفاده از این مدل شبیه‌سازی نمود. برای مطالعه بیشتر این مدل ریاضی می‌توان به [۱] مراجعه نمود.

۲.۲ مدلسازی ریاضی برای جریان خون در یک رگ با گرفتگی نامتقارن

یکی از بیماری‌های قلبی عروقی و مرگ و میر ناشی از آن تصلب شرایین یا آتروسکلروز[۱] است. در آتروسکلروز رگ‌های خونی حالت ارتجاعی خود را از دست می‌دهند و رسوباتی از چربی و کلسترول در آن تشکیل می‌شود. این رسوبات باعث تنگی و بسته شدن عروق و مسدود شدن جریان خون خواهند شد. در [۲]، یک مدل ریاضی برای بررسی عددی جریان خون و مطالعه گرفتگی عروق ارائه شده است. نوع گرفتگي نسبت به جهت محوري غیرمتقارن و جریان خون به صورت سیال تک‌لایه مدلسازی شده است. آتروسکلروز در طول رگ همواره با بی‌نظمی همراه است و این بی‌نظمی باعث پیچیدگی در مدلسازی‌های عددی شده و کار شبیه سازی را با دشواری همراه می‌کند. در [۲]، جریان خون به صورت پالسی در رگ مخروطی و به صورت غیرنیوتنی در نظر گرفته شده و برای ساده کردن معادلات حاصل، عروق با گرفتگی خفیف در نظر گرفته شده‌اند. با استفاده از این مدلسازی و حل معادلات حاصل، دیواره عروقی که دچار گرفتگی هستند در طول یک رگ انعطاف‌پذیر و انعطاف‌ناپذیر مطالعه شده و نتایج زیر بدست آمده است:

۱. در رگ‌های الاستیک، گرفتگي از سرعت محوري جریان خون کاسته ولی در رگ‌های غیرالاستیک سرعت محوري جریان خون بیشتر می‌شود.
۲. در رگ‌های مخروطی انعطاف‌ناپذیر، با بیشتر شدن مقدار گرفتگي و انقباض رگ، سرعت محوري و دبي حجمي کمتر شده و مقاومت در برابر جریان و تنش دیواره بیشتر می‌شود. در حالي که در رگ‌های مخروطی که قابلیت انبساط دارند، شرایط معکوسی ایجاد می‌شود.
۳. با بیشتر شدن زاویه مخروطي سرعت محوري و دبي حجمي افزایش پیدا می‌کند. چون رابطه سرعت جریان خون با مقاومت در برابر جریان رابطه معکوس است، لذا مقاومت در برابر جریان و تنش برشي کمتر شده و احتمال پارگی رگ بیشتر می‌شود.

[۱] Atherosclerosis

۳.۲ مدلسازی ریاضی برای بررسی اثر گرفتگی رگ در ایجاد تنش در عروق

جمع شدن مولکول‌های چربی در دیواره رگ‌ها باعث سخت شدن دیواره درونی رگ و کم شدن قطر آن می‌شود. این تغییر اندازه قطر رگ بر روی جریان خون اثر می‌گذارد و می‌تواند سلامت فرد را به خطر بیاندازد. از آنجاکه با تغییر قطر رگ، سرعت جریان خون درون رگ‌ها تغییر می‌کند، لذا این موضوع شاخص مناسبی برای بررسی آسیب‌های قلب و عروق محسوب می‌شود.

م. کیهان‌پور و همکاران، با استفاده از مدلسازی ریاضی در [۴]، یک رگ دارای گرفتگی را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج نشان داد، سرعت در ناحیه گرفتگی به طور چشمگیری بیشتر می‌شود. این افزایش سرعت با شتاب بیشتر موجب وارد شدن نیروی بیشتر به دیواره رگ می‌شود. وارد شدن نیروی بیشتر به دیواره رگ و به همراه آن افزایش تنش، می‌تواند باعث ایجاد آسیب‌هایی مانند پارگی و یا تغییر اندازه‌ی جداره رگ در این ناحیه باشد. در دیواره رگ در نزدیکی سطح تماس با جریان خون نیز به دلیل تغییرات شتاب، انرژی در دیواره رگ افزایش پیدا می‌کند. افزایش شتاب جریان خون در ناحیه‌ای که گرفتگی وجود دارد، موجب جابجایی دیواره رگ می‌شود. با استفاده از مدلسازی انجام شده در [۴]، ملاحظه می‌کنیم، در نقطه‌ای قبل از گرفتگی، تنش در دیواره رگ بیشتر می‌شود. سپس تا قله گرفتگی این تنش کمتر شده و سپس در نقطه پایانی گرفتگی، مجدداً افزایش تنش ایجاد می‌شود. تغییرات تنش در این نقاط نشان می‌دهد که با برخورد جریان سیال به ناحیه گرفتگی و ایجاد نیرو در آن، نقاط ابتدا و انتهای گرفتگی متحمل تنش می‌شوند. این مطلب از آن نظر ارزشمند است که در علم پزشکی در رگ‌های دارای گرفتگی، نقاط دارای تنش بالا برای درمان‌هایی از قبیل جراحی و یا فنر گذاری دارای اهمیت هستند.

مراجع

[۱] ا. ر. حقیقي، ن. پیرهادی و م. شهبازي اصل ، یک مدل ریاضي براي بررسي جریان خون به عنوان جریان سیال کراس در طول رگ گرفته شده ، پژوهش‌هاي نوین در ریاضی، (۱۳۹۸) شماره ۲۰، ۳۰-۱۵.

[۲] م. کیهان‌پور، ف. میرعابدینی و م. قاسمی، بررسی عددی تأثیر گرفتگی رگ روی تنش و دمای جریان خون تحت یک شار حرارتی ثابت، نشریه علمی انجمن مهندسان مکانیک ایران ، (۱۴۰۰) شماره ۳۰، ۱۴-۳، .

[۳] م. نصیری ورگ، مدل ریاضی و کامپیوتری سیستم قلب و عروق انسان، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، (۱۳۸۰).

[4] Y. Wang, H. Sun, J. Wei, X. Liu, T. Liu and Y. Fan, (2018), *A mathematical model of human heart including the effects of heart contractility varying with heart rate changes*, Journal of Biomechanics, **75** 129-137.

[5] S. R. Yan, M. Zarringhalam, D. Toghraie, L. K. Foong and P. Talebizadehsardari, (2020), *Numerical investigation of non-Newtonian blood flow within an artery with cone shape of stenosis in various stenosis angles,* Computer Methods and Programs in Biomedicine, 105-434.

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

رتبه‌بندی استان‌های کشور در چارچوب توسعه پایدار با رویکرد DEA مبتنی بر داده‌های بازه‌ای

ملیحه امینی [۱] محمد خدابخشی [۲]

[۱,۲] گروه علوم ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

چکیده

توسعه پایدار و متوازن مستلزم شناسایی دقیق وضعیت موجود استان‌ها و تعیین اولویت‌های توسعه‌ای متناسب با ویژگی‌های منطقه‌ای است. در این میان، توسعه استانی مفهومی چندبُعدی است که ارتقای هم‌زمان شاخص‌های اقتصادی، اجتماعی و زیرساختی را در بر می‌گیرد و نقش مهمی در بهبود کیفیت زندگی و کاهش نابرابری‌های فضایی ایفا می‌کند. اسناد بالادستی از جمله سند ملی آمایش سرزمین و اسناد آمایش استانی نیز بر برنامه‌ریزی فضایی و توزیع بهینه منابع و جمعیت در پهنه سرزمین تأکید دارند.

در این راستا، پژوهش حاضر با هدف ارزیابی میزان توسعه‌یافتگی استان‌های کشور، از روش تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) بهره گرفته است که ابزاری مناسب برای سنجش کارایی در سیستم‌های پیچیده و چندشاخصه به‌شمار می‌رود. داده‌های مورد استفاده شامل ۲۲ شاخص کلیدی در سه بُعد اصلی (اقتصادی، اجتماعی و زیرساختی) طی سال‌های ۱۳۹۸ تا ۱۴۰۲ بوده که به‌صورت بازه‌ای تحلیل شده‌اند.

نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که استان‌های تهران و اصفهان از بالاترین سطح کارایی توسعه‌ای برخوردارند، در حالی که استان‌های سیستان و بلوچستان، هرمزگان و کهگیلویه و بویراحمد در پایین‌ترین رتبه‌ها قرار گرفته‌اند. این امر ضرورت تدوین سیاست‌های منطقه‌ای هدفمند و مداخلات توسعه‌محور برای استان‌های کمترتوسعه‌یافته را دوچندان می‌کند.

یافته‌های این پژوهش می‌تواند مبنای مناسبی برای تصمیم‌گیری کلان و طراحی راهبردهای اثربخش در راستای کاهش نابرابری‌های منطقه‌ای و تحقق اهداف آمایش سرزمین باشد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی‌داده‌ها، ارزیابی و رتبه‌بندی، شاخص‌های توسعه استانی، داده‌های بازه‌ای

۱ مقدمه

توسعه متوازن منطقه‌ای یکی از اصول کلیدی در برنامه‌ریزی کلان و سیاست‌گذاری‌های ملی به‌شمار می‌رود که نقش تعیین‌کننده‌ای در ارتقای سطح رفاه، عدالت اجتماعی و پایداری اقتصادی ایفا می‌کند. در بسیاری از کشورها، از جمله ایران، عدم تعادل در روند توسعه مناطق مختلف به‌عنوان یکی از چالش‌های اساسی مطرح است. استان‌های کشور از نظر منابع طبیعی، سرمایه انسانی، زیرساخت‌های اقتصادی و ظرفیت‌های اجتماعی تفاوت‌های چشمگیری دارند که همین موضوع منجر به شکل‌گیری

[1] Maliheh.amini1990@gmail.com
[2] mkhbakhshi@yahoo.com

شکاف‌های توسعه‌ای در سطح ملی شده است. کاهش این نابرابری‌ها و حرکت به‌سوی توسعه‌ای پایدار و هماهنگ، نیازمند شناخت دقیق وضعیت موجود، تحلیل عملکرد استان‌ها و ارزیابی بهره‌وری آن‌ها در استفاده از منابع است.

در این زمینه، تحلیل پوششی داده‌ها $(DMUs)$ به‌عنوان روشی غیرپارامتریک و توانمند برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری $(DMUs)$ کاربرد فراوانی یافته است. این روش به پژوهشگران امکان می‌دهد عملکرد نسبی واحدها را با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از ورودی‌ها و خروجی‌ها بررسی کنند. در این راستا، زیاری و همکاران با استفاده از مدل BCC به تحلیل کارایی استان‌های کشور از منظر توسعه‌یافتگی پرداخته‌اند. آن‌ها هشت شاخص شامل درصد شهرنشینی، درصد اشتغال، سرانه پزشک، نسبت زنان باسواد، نسبت شاغلان بخش صنعت، نسبت راه‌ها به مساحت استان و اعتبارات توسعه را به‌عنوان ورودی‌ها و خروجی‌های مدل در نظر گرفتند. یافته‌ها نشان داد که استان‌های آذربایجان شرقی، اصفهان، تهران، خراسان جنوبی، زنجان، سمنان، قزوین، قم، گیلان و یزد عملکرد مطلوب‌تری در زمینه توسعه‌ای داشته‌اند [۴].

از سوی دیگر، در شرایطی که داده‌ها دارای ابعاد چندگانه، ارتباطات پیچیده یا همراه با ابهام و عدم قطعیت هستند، مدل‌های تحلیل پوششی فازی می‌توانند با دقت بیشتری وضعیت عملکرد را بازتاب دهند. در همین راستا، امینی و همکاران با استفاده از ۲۳ شاخص مرتبط با ابعاد اقتصادی، اجتماعی و زیرساختی، به تحلیل و رتبه‌بندی ۳۱ استان کشور پرداختند. نتایج پژوهش آن‌ها نشان داد که استان‌های تهران و اصفهان از نظر توسعه‌یافتگی در بالاترین رده قرار دارند، در حالی که استان‌های سیستان و بلوچستان، هرمزگان، چهارمحال و بختیاری، خراسان شمالی و کهگیلویه و بویراحمد جزو استان‌های کمتر توسعه‌یافته محسوب می‌شوند [۱]. لازم به ذکر است که داده‌های توسعه‌ای در بسیاری از موارد نه به‌صورت دقیق و نقطه‌ای، بلکه در قالب بازه‌ای و به‌صورت مقادیر متغیر طی چند سال گزارش می‌شوند. استفاده از داده‌های بازه‌ای $(IntervalData)$ در چنین مواردی، همراه با مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، امکان مدل‌سازی نوسانات آماری و عدم قطعیت‌های موجود را فراهم می‌آورد و موجب افزایش دقت و اعتبار تحلیل‌ها در گذر زمان می‌شود. پژوهش حاضر با هدف رتبه‌بندی استان‌های ایران بر اساس شاخص‌های منتخب توسعه استانی انجام شده است. در این مطالعه، با بهره‌گیری از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها $(DMUs)$ و استفاده از داده‌های بازه‌ای در بازه زمانی سال‌های ۱۳۹۸ تا ۱۴۰۲، عملکرد نسبی استان‌ها در بهره‌برداری از منابع و دستیابی به شاخص‌های توسعه اقتصادی، اجتماعی و زیرساختی مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که استان‌های تهران و اصفهان در صدر جدول توسعه قرار دارند، در حالی که استان‌های سیستان و بلوچستان، هرمزگان، کهگیلویه و بویراحمد، خراسان شمالی، خراسان جنوبی و لرستان در انتهای فهرست جای گرفته‌اند. این تحلیل می‌تواند چشم‌انداز روشنی از موقعیت نسبی استان‌ها در مسیر توسعه ارائه دهد و ابزاری کارآمد برای تصمیم‌گیری مبتنی بر شواهد در اختیار سیاست‌گذاران قرار دهد.

۲ تحلیل پوششی داده‌ها

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش غیرپارامتریک برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده $(DMUs)$ در حوزه‌های مختلفی مانند ارزیابی و سنجش بیمارستان‌ها و مراکز درمانی، سنجش ظرفیت‌های مالیاتی مناطق، تحلیل کارایی مناطق در توسعه اقتصادی و ... است[۳]. این روش با استفاده از داده‌های ورودی و خروجی، واحدها را از نظر کارایی مقایسه می‌کند و آن‌ها را به دو گروه "کارا"و "ناکارا" تقسیم می‌کند. مدل‌های پایه‌ای DEA شامل CCR (بازدهی ثابت مقیاس) و BCC (بازدهی متغیر مقیاس) هستند که واحدهای کارا را با عدد ۱ مشخص می‌کنند و معمولاً رتبه‌بندی بین این واحدها انجام نمی‌شود[۶]. برای رفع این محدودیت، در ادبیات DEA ، مدل‌ها و روش‌های متنوعی برای رتبه‌بندی دقیق‌تر واحدهای کارا ارائه شده تا امکان مقایسه بهتر میان آن‌ها فراهم شود. این روش‌ها به بهینه‌سازی منابع و شناسایی واحدهای برتر و نیازمند بهبود کمک می‌کنند. یکی از روش‌های مؤثر در رتبه‌بندی واحدهای کارا، روش منصفانه دکترخدابخشی و آریاوش است که بر پایه‌ی دو دیدگاه خوش‌بینانه و بدبینانه در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) پیشنهاد شده است. در این روش، آن‌ها به تخمین حداقل و حداکثر امتیاز کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) می‌پردازند، با این فرض که مجموع این دو امتیاز برابر با عدد ۱ باشد. سپس، رتبه نهایی هر (DMU) بر اساس ترکیبی از این دو مقدار (دیدگاه‌های خوش‌بینانه و بدبینانه) تعیین می‌شود، که منجر به ارزیابی متعادل و منصفانه‌تری می‌گردد[۷]. در ادامه، به تشریح و تحلیل مدل پیشنهادی آن‌ها با عنوان مدل KA پرداخته می‌شود. فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده وجود دارد:

$$DMU_۱, DMU_۲, ..., DMU_n$$

که m متغیر ورودی $x_{ij} \in [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$ $(i = ۱, ۲, .., m)$ را به s متغیرخروجی $y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U]$ $(r = ۱, ۲, ..., s)$ تبدیل می‌کند. فرض کنید DMU_o واحد تصمیم‌گیری تحت ارزیابی باشد. برای تخمین ارزش کارایی این واحد تصمیم‌گیری θ_o، فرض می‌شود که جمع ارزش کارایی تمام DMU ها مساوی «۱» باشد، یعنی:

$$\sum_{j=۱}^{n} \theta_j = ۱$$

با در نظر گرفتن وزن‌های v_i $(i = ۱, ۲, ..., m)$ و u_r $(r = ۱, ۲, ..., s)$ برای ورودی‌ها و خروجی‌ها و اینکه کارایی DMUها از تقسیم مجموع وزن خروجی‌ها بر مجموع وزن ورودی‌ها به دست می‌آید،

مدل زیر را برای برآورد و محاسبه مقدار max و min ارزش کارایی پیشنهاد دادند:

$$\max and \min \theta_o = \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{ro}$$
$$s.t.$$
$$\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{io} = ۱$$
$$\sum_{i=۱}^{m} v_i \theta_j x_{ij} - \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} = ۰ \quad j = ۱, ۲, ..., n, j \neq ۰$$
$$\sum_{j=۱}^{n} \theta_j = ۱ u_r, v_i, \theta_j \geq ۰ \quad \forall\, r, i, j$$

با در نظر گرفتن $v_i \theta_j = w_{ij}$ معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\max and \min \theta_o = \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{ro}$$
$$s.t.$$
$$\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{io} = ۱$$
$$\sum_{i=۱}^{m} w_{ij} x_{ij} - \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} = ۰ \quad j = ۱, ۲, ..., n, j \neq ۰$$
$$\sum_{j=۱}^{n} w_{ij} = v_i \quad i = ۱, ۲, ..., m$$
$$u_r, v_i, w_{ij} \geq ۰ \quad \forall r, i, j$$

برای محاسبه حداقل امتیاز کارایی،در واقع حالت بدبینانه $(Pessimistic)$ برایDMU_o، باید x_{io} و $(j \neq o)x_{ij}$ در بالاترین مقدارشان و y_{ro} و $(j \neq o)y_{rj}$ در پایین‌ترین مقدارشان قرار گیرند. بنابراین

مینیمم مقدار θ_o از مدل زیر تعیین می‌شود:

$$\min \theta_o = \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{ro}^L$$
$$s.t.$$
$$\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{io}^U = ۱$$
$$\sum_{i=۱}^{m} w_{ij} x_{ij}^L - \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}^U = ۰ \quad j = ۱, ۲, ..., n, j \neq ۰$$
$$\sum_{j=۱}^{n} w_{ij} = v_i \quad i = ۱, ۲, ..., m$$
$$u_r, v_i, w_{ij} \geq ۰ \quad \forall r, i, j$$

و به طور مشابه، برای محاسبه حداکثرامتیاز کارایی،در واقع حالت خوشبینانه $(Optimistic)$ برایDMU_o، باید x_{io} و $(j \neq o)y_{rj}$ در پایین‌ترین مقدارشان و y_{ro} و $(j \neq o)x_{ij}$ در بالاترین مقدارشان قرار گیرند. بنابراین ماکزیمم مقدار θ_o از مدل زیر تعیین می‌شود:

$$\max \theta_o = \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{ro}^U$$
$$s.t.$$
$$\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{io}^L = ۱$$
$$\sum_{i=۱}^{m} w_{ij} x_{ij}^U - \sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}^L = ۰ \quad j = ۱, ۲, ..., n, j \neq ۰$$
$$\sum_{j=۱}^{n} w_{ij} = v_i \quad i = ۱, ۲, ..., m$$
$$u_r, v_i, w_{ij} \geq ۰ \quad \forall r, i, j$$

و در نهایت مقدار θ_j برای $j = ۱, ۲, ..., n$ در بازه زیر قرار می‌گیرد:

$$\theta_j^l \leq \theta_j \leq \theta_j^U$$

برای تعیین کاراییDMU ها می‌توان ترکیب محدبی از رابطه فوق را به کار برد که یک روش منصفانه است چرا که هم حالت خوشبینانه و هم حالت بدبینانه مساله را در نظر می‌گیرد و نتیجه روش قابل اعتمادترخواهد بود نسبت به زمانی که فقط یکی از حالت‌ها در نظر گرفته شود و و به علاوه رتبه‌بندی کاملی از DMU ها بر اساس امتیاز θ_j ها به دست می‌آید.فرض کنید بازه رابطه فوق به صورت ترکیب محدب زیر بازنویسی شود:

$$\theta_j = \lambda_j \theta_j^L + (۱ - \lambda_j)\theta_j^U \lambda_j \in [۰, ۱]$$

برای اینکه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرندهDMUها به‌صورت عادلانه تعیین شود، باید تمامی θ_jها برای $j = ۱, ۲, ..., n$ متناسب با بازه‌هایشان تعیین شوند. بنابراین، مقادیر λ_j برای $j = ۱, ۲, ..., n$ باید به‌صورت یکسان انتخاب شوند؛ به این معنا که $\lambda_۱ = \lambda_۲ = ...\lambda_n$ و با توجه به رابطه $\sum_{j=۱}^{n} \theta_j = ۱$ داریم:

$$\theta_j = \lambda\theta_j^L + (۱ - \lambda)\theta_j^U$$
$$\sum_{j=۱}^{n} \theta_j = ۱$$

مقدار λ به راحتی از حل دستگاه فوق قابل محاسبه است:

$$۱ = \sum_{j=۱}^{n} \theta_j = \lambda \sum_{j=۱}^{n} \theta_j^L + (۱ - \lambda) \sum_{j=۱}^{n} \theta_j^U$$

بنابراین داریم:

$$\lambda = \frac{۱ - \sum_{j=۱}^{n} \theta_j^U}{\sum_{j=۱}^{n} \theta_j^L - \sum_{j=۱}^{n} \theta_j^U}$$

۳ شاخص‌های توسعه استانی

برای ارزیابی سطح توسعه‌یافتگی استان‌های کشور، مجموعه‌ای از شاخص‌های منتخب در سه بُعد اصلیِ اقتصادی، اجتماعی و زیرساختی به‌عنوان متغیرهای ورودی و خروجی در مدل تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) مورد استفاده قرار گرفته‌اند. انتخاب این شاخص‌ها بر مبنای مطالعات نظری حوزه توسعه منطقه‌ای، چارچوب‌های مفهومی موجود در ادبیات توسعه، و همچنین تحلیل مطالعات تجربی پیشین انجام شده است. در این فرآیند، تلاش شده تا شاخص‌هایی برگزیده شوند که نه‌تنها نمایانگر وضعیت واقعی توسعه در هر استان باشند، بلکه از نظر آماری نیز از قابلیت اندازه‌گیری، دسترسی‌پذیری و مقایسه‌پذیری میان استان‌ها برخوردار باشند. از منظر روش‌شناختی، شاخص‌های مذکور به‌گونه‌ای

جدول ۱: شاخص‌های توسعه

ردیف	شاخص	ورودی/خروجی
۱	ضریب جینی	ورودی
۲	نرخ بیکاری	ورودی
۳	نرخ مشارکت اقتصادی	خروجی
۴	متوسط درآمد سالانه یک خانوار شهری	خروجی
۵	متوسط درآمد سالانه یک خانوار روستایی	
۶	سهم استان از محصول ناخالص داخلی(بدون نفت)	خروجی
۷	سهم اشتغال زنان در بخش غیر کشاورزی	خروجی
۸	نرخ باسوادی زنان	خروجی
۹	امید به زندگی	خروجی
۱۰	تراکم خانوار در واحد مسکونی	ورودی
۱۱	توزیع تعداد دانش‌آموختگان در هر استان	خروجی
۱۲	سرانه پزشکان به ازای هر ۱۰۰۰ نفر جمعیت	خروجی
۱۳	نسبت تعداد تخت‌های فعال بخش‌های بیمارستانی به جمعیت	خروجی
۱۴	تعداد مددجویان معیشت‌بگیر کمیته امداد امام خمینی	ورودی
۱۵	توزیع نسبی جمعیت شهری	خروجی
۱۶	نسبت تعداد مراکز ارائه‌دهنده مراقبت‌های بهداشتی‌و درمانی روستایی به جمعیت روستایی	خروجی
۱۷	توزیع تعداد شهرهای دارای انشعاب فاضلاب	خروجی
۱۸	نسبت خانوارها با دسترسی به اینترنت در محل سکونت	خروجی
۱۹	توزیع تعداد شهرهای دسترسی به آب شرب	خروجی
۲۰	نسبت تعداد خانوارهای روستایی دارای برق	خروجی
۲۱	توزیع روستاهای گاز رسانی شده	خروجی
۲۲	نسبت راه های روستایی آسفالته به کل راه های استان	خروجی

انتخاب و تنظیم شده‌اند که تناظر آن‌ها با نقش‌های نهادی و عملکردی استان‌ها در مسیر توسعه مشخص باشد. شاخص‌های ورودی عمدتاً شامل عوامل و منابعی هستند که توسعه را ممکن می‌سازند، در حالی که شاخص‌های خروجی بیانگر نتایج و پیامدهای توسعه هستند. با توجه به محدودیت‌های آماری، تلاش شده است تا از شاخص‌هایی استفاده شود که داده‌های آن‌ها در سطح استانی و برای بازه زمانی مورد نظر (۱۳۹۸ تا ۱۴۰۲) در دسترس و قابل اطمینان باشد. در نهایت، این مجموعه شاخص‌ها بستری مناسب برای مقایسه‌ی علمی سطح برخورداری استان‌ها و ارزیابی عملکرد نسبی آن‌ها در چارچوب مدل DEAفراهم کرده‌اند. به منظور جمع آوری اطلاعات در خصوص اجزای مدل، ورودی‌ها و خروجی‌های مدل از طریق مطالعات کتابخانه‌ای و نظری مقالات معتبر و مشاوره با خبرگان انتخاب شد. داده‌های مورد نیاز از سالنامه آماری ۱۴۰۲ و گزارش منتشر شده از سازمان مدیریت و برنامه‌ریزی کشور جمع آوری شده است[۵]. شاخص‌های مورد بررسی شامل ۲۲ متغیر اصلی است که در جدول شماره (۱) نشان داده شده است.

۴ نتایج و تحلیل

این پژوهش با هدف ارزیابی و مقایسه میزان توسعه‌یافتگی استان‌های کشور، با تمرکز بر سه بُعد اصلی شامل شاخص‌های زیرساختی، اقتصادی و اجتماعی انجام شده است. در این راستا، داده‌های مربوط به ۲۲ زیرشاخص منتخب طی سال‌های ۱۳۹۸ تا ۱۴۰۲ گردآوری و با بهره‌گیری از روش تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) مبتنی بر داده‌های بازه‌ای، مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. هدف نهایی این مطالعه، شناسایی نابرابری‌های منطقه‌ای و ارائه تصویری جامع از وضعیت برخورداری استان‌ها از فرصت‌های توسعه است.

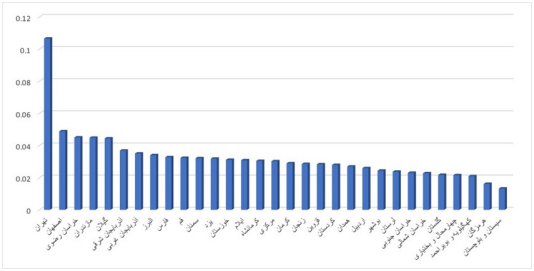
در جدول شماره ۲، نتایج حاصل از تلفیق شاخص‌ها ارائه شده و وضعیت کلی استان‌ها از منظر سطح توسعه تبیین گردیده است. بر اساس این نتایج، استان‌ها در دو گروه عمده طبقه‌بندی شده‌اند: استان‌های بالاتر از میانگین کشوری و استان‌های پایین‌تر از میانگین کشوری.

این تقسیم‌بندی ساده اما گویای شکاف توسعه‌ای میان مناطق مختلف کشور است. استان‌هایی که پایین‌تر از میانگین قرار دارند، اغلب نیازمند سیاست‌های حمایتی، سرمایه‌گذاری‌های هدفمند و بازنگری در رویکردهای توسعه‌ای هستند. در مقابل، استان‌های بالاتر از میانگین می‌توانند به عنوان الگوهای موفق توسعه مورد تحلیل قرار گرفته و برنامه‌ریزی‌های آتی را در جهت تثبیت و ارتقای موقعیت خود تنظیم نمایند.

توزیع عادلانه فرصت‌های توسعه یکی از مؤلفه‌های بنیادین در دستیابی به رفاه عمومی، کاهش نابرابری و ایجاد توازن منطقه‌ای است. براین اساس، شناخت دقیق از وضعیت موجود و تحلیل ساختارهای توسعه در سطوح مختلف، پیش‌نیاز تدوین راهبردهای مؤثر ملی به‌شمار می‌رود.

جدول ۲: رتبه‌بندی استان‌ها بر مبنای شاخص‌های توسعه

ردیف	استان	امتیاز	ردیف	استان	امتیاز
	بالاترازمیانگین (۰.۰۳۲۲)		۱۶	مرکزی	۰.۰۳۰۲
۱	تهران	۰.۱۸۹۳	۱۷	کرمان	۰.۰۲۸۹
۲	اصفهان	۰.۰۴۸۸	۱۸	زنجان	۰.۰۲۸۵
۳	خراسان رضوی	۰.۰۴۵۰	۱۹	قزوین	۰.۰۲۸۳
۴	مازندران	۰.۰۴۴۸	۲۰	کردستان	۰.۰۲۷۹
۵	گیلان	۰.۰۴۴۴	۲۱	همدان	۰.۰۲۶۹
۶	آذربایجان شرقی	۰.۰۳۶۸	۲۲	اردبیل	۰.۰۲۵۹
۷	آذربایجان‌غربی	۰.۰۳۵۰	۲۳	بوشهر	۰.۰۲۴۳
۸	البرز	۰.۰۳۴۰	۲۴	لرستان	۰.۰۲۳۷
۹	فارس	۰.۰۳۲۷	۲۵	خراسان‌جنوبی	۰.۰۲۳۰
۱۰	قم	۰.۰۳۲۳	۲۶	خراسان‌شمالی	۰.۰۲۲۷
	پایین‌ترازمیانگین(۰.۰۳۲۲)		۲۷	گلستان	۰.۰۲۱۷
۱۱	سمنان	۰.۰۳۲۱	۲۸	چهارمحال‌وبختیاری	۰.۰۲۱۵
۱۲	یزد	۰.۰۳۱۸	۲۹	کهگیلویه‌وبویراحمد	۰.۰۲۰۹
۱۳	خوزستان	۰.۰۳۱۱	۳۰	هرمزگان	۰.۰۱۶۱
۱۴	ایلام	۰.۰۳۰۸	۳۱	سیستان‌و بلوچستان	۰.۰۱۳۲
۱۵	کرمانشاه	۰.۰۳۰۴			



شکل ۱: امتیاز کارایی استان‌ها

تحلیل فضایی داده‌ها نشان می‌دهدکه:

۱- استان‌های محروم و کم‌برخوردار عمدتاً در نواحی مرزی شرق و غرب کشور متمرکز هستند. به‌طورخاص، مناطق شرقی، جنوب شرقی و غربی کشور بیشترین میزان محرومیت را تجربه می‌کنند.در مقابل، استان‌های توسعه‌یافته در نواحی مرکزی و شمالی کشور قرار دارند.

۲- استان‌هایی چون تهران، اصفهان، خراسان رضوی، مازندران و گیلان در صدر جدول قرار دارند که این امر نشانگر تمرکز منابع، زیرساخت‌ها و ظرفیت‌های توسعه‌ای در این مناطق است.

۳- استان‌هایی مانند فارس، البرز، آذربایجان شرقی و قم در رده‌های میانی قرار گرفته‌اند. این استان‌ها از برخی زیرساخت‌ها و امکانات توسعه‌ای برخوردارند، اما هنوز با استان‌های پیشرو فاصله معناداری دارند.

۴- استان‌هایی نظیر سیستان و بلوچستان، هرمزگان، کهگیلویه و بویراحمد، چهارمحال و بختیاری، گلستان، خراسان شمالی و جنوبی و لرستان در پایین‌ترین رده‌های جدول، رتبه ۲۴ ام تا ۳۱ ام قرار دارند و نیازمند سیاست‌های فوری در راستای ارتقای سطح خدمات و زیرساخت‌ها هستند.

یافته‌های پژوهش حاکی از وجود تفاوت‌های معنادار و نابرابری‌های چشمگیر در سطح توسعه‌یافتگی استان‌های کشور است. این نتایج در نمودار شکل ۱ به وضوح قابل مشاهده است. بر این اساس، ضروری است که دولت با رویکردی منطقه‌محور و با تکیه بر برنامه‌ریزی مبتنی بر شواهد، نسبت به بازتوزیع منابع، کاهش نابرابری‌های جغرافیایی و ایجاد عدالت توسعه‌ای اقدام نماید. سیاست‌گذاری هوشمندانه و سرمایه‌گذاری هدفمند در مناطق کم‌برخوردار می‌تواند ضمن کاهش فاصله میان استان‌ها، زمینه‌ساز رشد پایدار و متوازن در سطح ملی گردد.

در اسناد آمایش سرزمین استان‌ها، تصویر سازمان فضایی استان در افق توسعه‌یافتگی مطرح شده و مناطق مستعد توسعه را متناسب با توان اکولوژیکی، آب قابل برنامه‌ریزی مصوب، ظرفیت برد و دسترسی به زیرساخت‌ها، ادامه فعالیت موجود و همچنین استقرار جدید جمعیت و فعالیت در آن‌ها با رعایت ملاحظات محیط زیست بیان کرده است. با توجه به نتایج و اسناد آمایش استانی موارد زیر را می‌توان به عنوان پیشنهادات کاربردی این مطالعه مطرح کرد. به طور مثال برای چند استان محروم در یافته‌های پژوهش، راهبردهایی در اسناد آمایش استانی متناسب با شاخص‌های انتخابی در پژوهش بیان شده که در ادامه به برخی از آن‌ها پرداخته می‌شود.

۱. در خصوص استان سیستان‌وبلوچستان، نواحی جنوبی استان، جز نواحی اولویت‌دار اول استقرار جمعیت و توسعه صنایع سنگین و فعالیت‌های بندری و حمل ونقل است که تاثیر بسیار زیادی در شاخص‌های اقتصادی از جمله نرخ بیکاری، ضریب جینی، سهم استان از تولید ناخالص داخلی بدون نفت دارد. اولویت توسعه خدمات تخصصی بهداشت و درمان در کانون‌های شهری پرجمعیت استان شامل شهرهای زاهدان، زابل و چابهار و خدمات عمومی درمانی و مراکز بهداشت و درمان در مراکز مجموعه‌های روستایی است.
۲. در خصوص استان هرمزگان، به پهنه غربی و شرقی استان، جهت هدایت مهاجرت و بارگذاری جمعیت و در راستای ایجاد تعادل در شبکه شهری، به شهرستان بندرعباس به عنوان مرکز مستعد توسعه زیرساخت‌ها برای ایفای نقش محوری در کریدور جنوب- شمال، شهرستان جاسک، پارسیان و بندر لنگه برای توسعه خدمات بهداشتی- درمانی و آموزشی تاکید شده است.
۳. در خصوص استان چهارمحال‌وبختیاری، برای مناطق مستعد توسعه زیرساخت‌ها، به ارتباط پهنه‌های جمعیت و فعالیت استان در نواحی شرقی و شمال شرقی با استان اصفهان از طریق احداث خطوط ریلی، ارتقا شبکه‌های اصلی راه‌های استان به سطح بزرگراهی و طراحی شبکه آزادراهی با استان اصفهان تاکید شده است. در بسیاری از خدمات برتر آموزشی، سلامت و حمل و نقل با مجموعه امکانات چون فرودگاه، ایستگاه راه‌آهن و ... از طریق اتصال به شبکه ریلی اصفهان، به شهرستان شهرکرد، تاکید شده که می‌تواند در سطح منطقه به ارائه خدمات بپردازد. توسعه در این زمینه‌ها نقش بسزایی در توسعه استان در سطح کشور دارد.
۴. در خصوص استان کهگیلویه‌وبویراحمد، برای شهر یاسوج علاوه بر توسعه بیمارستان‌ها و سایر مراکز خدمات درمانی در آن، دو بیمارستان ناحیه‌ای و منطقه‌ای با تمام تخصص‌ها، امکانات و تجهیزات پیشنهاد شده است. برای مرکز ناحیه غرب استان، بیمارستان منطقه‌ای و بیمارستان ناحیه‌ای برای مرکز ناحیه جنوب استان، با تخصص‌ها و امکانات پیشنهاد گردیده و همچنین به توسعه فعالیت‌های آموزشی با هدف آموزش نیروی انسانی متخصص و ارتقا شاخص‌های سواد و فرهنگ عمومی، بهداشت و درمان و درآمد سرانه تاکید شده است.
در خصوص سایر استانها می‌توان به اسناد آمایش استانی منتشر شده توسط سازمان برنامه و بودجه کشور مراجعه کرد[۲].
و در انتها به مدیران و سیاست‌گذاران پیشنهاد می‌شود که تحقیقات انجام شده در مورد فرصت‌های منطقه‌ای و استان‌ها را مورد توجه قرار داده و در سیاست‌گذاری‌ها و جهت گیری‌های خود، اولویت‌بندی استان‌ها براساس درجه توسعه‌یافتگی و میزان برخورداری در چهارچوب برنامه‌ریزی مبتنی بر آمایش سرزمین را مورد عنایت قرار دهند. همچنین پیشنهاد می‌شود در مطالعات آتی می‌توان با استفاده از مدلهای تصادفی و داده‌های تصادفی به ابعاد مختلف فرصت و بررسی وضعیت استان‌های کشور پرداخته و وضعیت استان‌های کشور سنجیده شود.

مراجع

[۱] م. امینی، م. خدابخشی، رتبه‌بندیit و ارزیابی توسعه‌یافتگی استان‌های کشور با رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها (برمبنای شاخص‌های توسعه استانی)، نشریه تخصصی مجلس و اقتصاد، (۱۴۰۳)، ۲(۲)، ۳۴۳-۳۱۳.

[۲] اسناد آمایش سرزمین ملی و استانی، (۱۳۹۹).

[۳] پ. رحیمی، ف. دژپسند، م. خدابخشی، برآوردit ظرفیت مالیاتی و تلاش مالیاتی کشورهای مختلف جهان و رتبه بندی آن‌ها با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها، مجله علم تصمیم‌گیری و سیستم‌های هوشمند، (۱۴۰۳)، ۱(۱)، ۲۲-۱.

[۴] ک. زیاری، ک. سرخ کمال، م. زنجیرچی،ارزیابی کلاسیک کارایی استان‌های کشور از لحاظ توسعه‌یافتگی با استفاده از روش DEA، فصلنامه برنامه‌ریزی و آمایش فضا، (۱۳۸۹)۴.

[۵] سالنامه آماری کشور، (۱۴۰۲).

[6] Charns, A, Cooper, w and Tone, K. itMeasures of inefficiency in data envelopment analysis and stochastic frontier estimation, European Journal of Operational Research. 99, 72-88.

[7] Khodabakhshi, M and Aryavash, K. (2012), itRanking all units in data envelopment analysis, Applied Mathematics Letters. 25, 2066-2070.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

تولید اعداد با روش غربال استوانه‌ای: یک رویکرد نوین در رمزگشایی اعداد اول

هاجر امرایی [۱]

[۱] دبیر ریاضی، آموزش و پرورش استان ایلام، شهرستان دره شهر

چکیده

مفهوم اعداد اول در ریاضیات بسیار اساسی است و می‌توان آن را مانند حروف الفبا که در ساخت کلمات بکار می‌روند، در زیرساخت تمامی اعداد طبیعی در نظر گرفت. اعداد اول اعدادی هستند که فقط عامل تقسیم‌کننده آنها شامل اعداد ۱ و عدد خود آن است. برای تولید اعداد اول از ۱ تا n که نسبتاً کوچک باشند به آسانی و به‌صورت دستی قابل انجام است، اما برای تولید اعداد اول به مقیاس بزرگ نیاز به یک الگوریتم تولید کننده اعداد اول است. اگرچه هنوز فرمول کلی و جامع برای اعداد اول کشف نشده است، اما یک روش ساده برای غربال‌سازی اعداد مرکب به‌منظور به‌دست آوردن اعداد اول وجود دارد. به جای جستجو برای یافتن فرمول اعداد اول، می‌توان اعداد مرکب را حذف کرده و اعداد اول را به‌دست آورد. این مطالعه روشی نوآورانه از الگوریتم غربال به نام روش غربال استوانه‌ای را در چهار بخش معرفی می‌کند. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی می‌تواند تعداد زیادی از اعداد اول را با دقت خوب تولید کنند.

کلمات کلیدی: .....

۱ مقدمه

یکی از بزرگترین چالش‌های ریاضیدانان جستجوی اعداد اول است. به تعریف، عدد اول یک عدد طبیعی است که بزرگتر از ۱ است و نمی‌توان آن را به‌عنوان حاصلضرب دو عدد طبیعی کوچکتر تجزیه کرد. توسط اقلیدس حدود سال ۳۰۰ قبل از میلاد نشان داده شده است که تعدادی بی‌نهایت از اعداد اول وجود دارد، اما تا به امروز ما هنوز فرمولی را که دنباله تمامی اعداد اول را نشان دهد، کشف نکرده‌ایم. هنوز بسیاری از پیش‌بینی‌ها درباره اعداد اول باقیمانده و مشکلات حل نشده در این زمینه وجود دارد و معروفترین آنها فرضیه ریمان است که با توزیع اعداد اول مرتبط است [۳]. به‌عنوان یک پیامد از نفوذناپذیری آنها، اعداد اول نقش حیاتی در رمزنگاری ایفا می‌کنند. در واقع، برخی از الگوریتم‌های به‌طور بحرانی به تجزیه عدد اول بزرگ وابسته هستند [۶]. به‌طور اساسی یک کلید عمومی از ضرب دو عدد اول بزرگ تشکیل شده است که برای رمزنگاری یک پیام استفاده می‌شود و یک کلید مخفی از آن دو عدد اول استفاده می‌شود تا پیام را بازگشایی کند. بنابراین، امنیت این

[1] mahdie375z@gmail.com

الگوریتم‌ها بر پایه تجزیه کلید است که اگر اعداد اول بزرگ و ناشناخته در آن دخالت داشته باشند، با اهمیت است.
همواره اعداد بزرگتر به‌منظور افزایش امنیت اطلاعات در نظر گرفته می‌شوند. بزرگترین عدد اول شناخته شده (که با نام $M(۷۴,۲۰۷,۲۸۱)$ شناخته می‌شود (یک عدد با ۲۲ میلیون رقم است. اعداد بزرگ به علت محدودیت حافظه، امکان رمزنگاری در کامپیوترهای عمومی را فراهم نمی‌کنند.
بهترین روش نوشتن اعداد برای اجرای الگوریتم غربال اگر اعداد را در ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۷ یا ۸ یا ۹ یا ۱۰ ستون بنویسیم متوجه می شویم که در حالتیکه در ۶ ستون نوشته شوند ۴ ستون آنها (بجز خود ۲ و ۳) مضارب ۲ و ۳ هستند و مرکبند و خط می‌خورند بعبارتی ۶۶ درصد آنها خط می‌خورند (حذف می‌شوند) که بیشترین درصد برای خط خوردن اعداد غیر اول بصورت ستونی است.

$$۲+۶n=۲(۱+۳n)=۲k$$
$$۳+۶n=۳(۱+۲n)=۳k$$
$$۴+۶n=۲(۲+۳n)=۲k$$
$$۶+۶n=۲(۳+۳n)=۲k$$

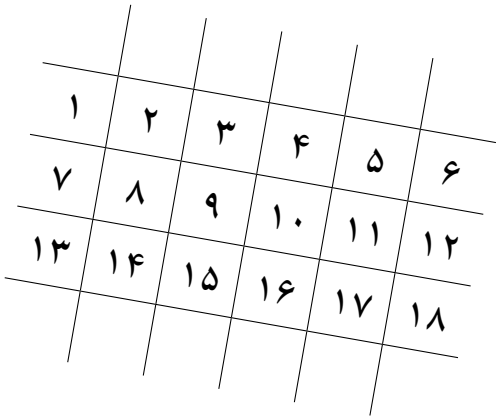
برای انجام الگوریتم غربال، بهترین روش نوشتن اعداد طبیعی به صورت ۶ ستون می‌باشد که در این حالت ابتدا عدد ۱ و سپس چهار ستون دوم و سوم و چهارم و ششم، (بجز اعداد ۲ و ۳) خط می‌خورند و فقط ستون‌های یک و پنج می‌مانند و اعداد اول بزرگتر از ۳ در بین اعداد ستون‌های اول و پنجم می‌باشند.

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶

۲ روش غربال استوانه‌ای

اعداد را روی برگه کاغذ در ۶ ستون طوری می‌نویسیم که با شروع از عدد ۱ اعداد هر سطر با شیب ملایمی به سمت پایین نوشته شوند به طوریکه بعد از لول کردن کاغذ، روی استوانه ایجاد شده اعداد اولی و آخری هر سطر یعنی اعداد ستون اول و ششم آن سطر مثل ۶ و ۱ کنار هم قرار نگیرند بلکه عدد

ستون ششم سطر قبلی در کنار عدد ستون اول سطر بعدی قرار گیرد مثل ۶ و ۷ کنار هم قرار گیرند در این‌صورت اعداد نوشته شده روی استوانه مانند یک مارپیچ از اعداد طبیعی متوالی‌اند.



در ادامه باید گفت چون اعداد اول (بجز ۲ و ۳) که در ستون اول و ستون پنجم قرار دارند و در فرمول $6k \pm 1$ قرار می‌گیرند پس برای خط زدن مضارب زدن مضارب هر عدد اول بزرگتر از ۳ با شروع از مجذور آن که در ستون اول قرار دارد با توجه به مقدار k که در واقع تعداد سطرهایی که رد می‌کنیم) را نشان می‌دهد و $+1$ که یک واحد به سمت راست (مارپیچ ساعتگردی بوجود می‌آید) یا -1 که یک واحد به سمت چپ (مارپیچ پادساعتگردی بوجود می‌آید) را نشان می‌دهد خط زدن را ادامه می‌دهیم و در مورد همه اعداد اول (بجز ۲ و ۳) این طریقه خط زدن سبب ایجاد یک مارپیچ متوالی منحصر به فرد (ساعتگرد یا پادساعتگرد) منظمی برای مضارب هر عدد اول می‌شود.
بعد از اینکه مضارب عدد اول n را بصورت ستونی (برای مضارب ۲و ۳) و یا روش مارپیچ متوالی (برای مضارب اعداد اول بزرگتر از ۳) خط زدیم اولین مجذور کامل خط نخورده در ستون اول حتما مجذور عدد اول بعدی خواهد بود و می‌توانیم دور همه اعداد خط نخورده قبل از آن مجذور کامل را بعنوان عدد اول خط بکشیم و خط زدن را تا جایی ادامه می‌دهیم که مجذور عدد اول بعدی در بین اعداد مورد نظر نباشد در این‌صورت همه اعداد خط نخورده عدد اولند.

۱.۲ مثال کاربردی از روش غربال استوانه‌ای

بعنوان مثال، عدد ۷۷ را درنظر بگیرید که با دو خط مارپیچ شکل، که مضارب ۷ و ۱۱ را خط می‌زنند، خط خورده است؛ نشان دهنده آنست که شمارنده‌های اول آن اعداد ۷ و ۱۱ می‌باشند $۷۷ = ۷ \times ۱۱$.
یا عددی مانند ۲۴۷ با خط مارپیچ شکل که، مضارب ۱۳ را خط می‌زند خط خورده است پس عدد ۱۳ یکی از شمارنده‌های اول آن است $۲۴۷ = ۱۳ \times ۱۹$ اگر برای خط زدن مضارب مرکب هر عدد، اول بجای شروع از مجذور کامل آن عدد اول، از دومین مضرب آن عدد اول، خط، زدن، مضارب

مرکب آن را شروع کنیم حتما عدد ۲۴۷ با مضارب ۱۹ هم خط خواهد خورد.
برای اعداد بزرگ که تجزیه آنها دشوار است استفاده از این روش به کمک برنامه‌های سه‌بعدی ساز مانند تری دی مکس $DS\ MAX$ ۳ و ایجاد استوانه متحرک با قابلیت تایپ اعداد روی آن در فضای سه‌بعدی در رایانه کمک می‌کند تا عوامل اول هر عدد مرکب براحتی بدست آید.
بنابراین یکی از کاربردهای مهم روش غربال استوانه‌ای یافتن شمارنده‌های اول اعداد مرکب می‌باشد و بعبارتی تجزیه اعداد مرکب به شمارنده‌های اول آن می‌باشد.

۳ روابط تعیین اعداد اول و مجذورهایشان

ستون اول با فرمول $6k-5$ (k عدد طبیعی) یا $6k+1$ (k عدد حسابی) و ستون پنجم با فرمول $6k-1$ (k عدد طبیعی) یا فرمول $6k+5$ (k عدد حسابی) ستون‌هایی هستند که اعداد اول بجز ۲ و ۳ در بین اعداد آن دو ستون قرار گرفته‌اند.
مجذور آنها طبق اتحاد مربع دو جمله‌ای بصورت $6k'+1$ که در آن k' مضربی از ۴ است) یا بعبارتی بصورت $24m+1$ می‌باشد.
- مجذور اعداد اول بزرگتر از ۳ که در فرمول $6k\pm1$ قرار می‌گیرند در سطر $2k(3k\pm1)+1$ قرار می‌گیرند. مثل مجذورعدد اول ۲۳، چون $23=6\times4-1\ (k=4)$ در سطر $2\times4(3\times4-1)+1=89=8(11)+1$ قرار می‌گیرد. مجذور ۲۳ برابر ۵۲۹ است (همچنین اگر ۵۲۹ را منهای یک و تقسیم بر ۶ کنیم عدد ۸۸ بدست می‌آید دوباره یک واحد به حاصل اضافه می‌کنیم ۸۹ بدست می‌آیدکه نشان دهنده سطری است که ۵۲۹ در ان نوشته شده بدست می‌آید).

۴ الگوهایی در مورد اعداد نوشته شده روی ستونها و مجذور آنها

مجذور هیچکدام از اعداد طبیعی در ستون‌های دو و پنج قرار ندارد.

مجذور اعداد زوج مضرب ۶	ستون ششم
مجذور اعداد زوج غیرمضرب ۶	ستون چهارم
مجذور اعداد فرد مضرب ۳	ستون سوم
مجذور اعداد فرد غیرمضرب ۳ (مجذور اعداد اول در این دسته‌اند)	ستون اول

پیدا کردن عدد اول بعدی و مجذور آن

نکته مهم دیگر در مورد مجذور اعداد اول : بعد از خط زدن مضارب عدد اول n بجزخودش (اولین

مجذور کامل خط نخورده در ستون اول حتی ما مجذور عدد اول بعدی است چون اگر مجذور عددی مرکب بود با مضارب اعداد اول قبلی خط میخورد.پس میتوان از آن جذر گرفت و عدد اول بعدی را پیدا کرد البته بدون استفاده از مجذورها، برای یافتن عدد اول بعدی طبق روش کتاب پایه هشتم، عددخط نخورده بعد از عدد اولی که مضارب آن را خط زده‌ایم عدد اول بعدی است).

الگوهای جالب اعداد نوشته شده روی هر ستون

مجموع ارقام اعداد (مجموع ارقام عدد و سپس مجموع ارقام حاصلجمع قبلی تا جایی که حاصل جمع ارقام به یک عدد تک رقمی برسد مثلاً در مورد عدد ۴۹ : $۴ + ۹ = ۱۳$,$۱ + ۳ = ۴$ در آخر به عدد ۴ رسیدیم) موجود در ستون‌ها نظم خاصی دارد و در جدول زیر مجموع ارقام اعداد موجود در هر ستون نوشته شده جالب است بدانیم که این مجموع‌ها بطور متناوب تکرار می‌شود.

۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱	۲	۳
۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱	۲	۳	۴	۵	۶
۷	۸	۹	۱	۲	۳
۴	۵	۶	۷	۸	۹

رقم یکان مجذوراعداد زوج ارقام ۰ یا ۴ یا ۶ می‌باشد و همچنین رقم یکان مجذور اعداد فرد ۱ یا ۹ یا ۵ می‌باشد مانند ۴۹ و ۱۲۱ و ۱۶۹ و ۲۸۹ و ۲۵ و ... (مجذور مضارب اعداد اول دارای یکان ۱ یا ۹ می‌باشند بجز عدد ۲۵ که مجذور عدد ۵ است و ۵ تنها عدد اول فرد با یکان ۵ می‌باشد).

۵ نتیجه گیری

این مقاله به بررسی روابط بین اعداد اول و مجذور آنها پرداخته و همچنین یک روش جدید و نوآورانه برای اجرای الگوریتم غربال ارائه داده است. این روش جدید به عنوان یک روش سه بعدی قابل اجرا است و با سادگی و کاربردی بیشتری نسبت به روش‌های قبلی ارائه می‌شود. بخش مهم این مقاله، روش استوانه‌ای برای اجرای الگوریتم غربال است که در بخش سوم مقاله به‌طور خلاصه مورد بررسی قرار گرفته است. این روش نه تنها به بهبود عملکرد الگوریتم غربال کمک می‌کند، بلکه قابلیت اجرا در فضای سه بعدی را نیز داراست، که این امر به ارتقاء کارایی و کاربردپذیری این الگوریتم برای محاسبات بزرگ مقیاسی کمک می‌کند.

مراجع

[1] M. Agrawal, N. Kayal and N. Saxena, PRIMES is in P, Annals of Mathematics 160 (2), 781-793 (2004).

[2] A. O. L. Atkin, D. J. Bernstein, Prime sieves using binary quadratic forms, Mathematics of Computati on 73, 1023-1030 (2004).

[3] E. Bombieri, Problems of the millennium: The Riemann Hypothesis, CLAY (2000).

[4] D. H. Lehmer, An Extended Theory of Lucas Functions, Annals of Mathematics 31.(3), 419-488 (1930).

[5] http://cse.iitkgp.ac.in/∼ debdeep/courses_ iitkgp/PAlgo/index.htm.

[6] R. L. Rivest, A. Shamir and L. Adleman, A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key C ryptosystems, Communications of the ACM 21 (2), 120126 (1978).

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

قضیه نقطه ثابت برانچیاری با استفاده از مفهوم wـ فاصله

ظهیر مظلومی‌نژاد [۱] میثم جعفری [۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نیشابور
[۲] گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان

چکیده

در این گفتار، به مروری بر نسخه‌ای جدید از تعمیم قضیه نقطه ثابت برانچیاری با استفاده از مفهوم wـ فاصله می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: نقطه ثابت، نگاشت نانزولی، wـ فاصله

۱ مقدمه

انقباض باناخ ساده‌ترین و مهم‌ترین اصل برای یافتن، وجود و یکتایی نقاط ثابت برخی از خودنگاشت‌های فضاهای متریک است و در حل بسیاری از مسائل ریاضیات و مهندسی راهگشاست. پژوهشگران متعددی نگاشت‌های از نوع انقباضی را در فضای متریک کامل تعریف نموده‌اند که تعمیم‌های انقباض معروف باناخ هستند و از ویژگی وجود نقطه ثابت یکتا برای نگاشت‌ها برخوردارند. یکی از این تعمیم‌ها قضیه نقطه ثابت برانچیاری [۱] برای نگاشت‌های تعریف‌شده بر فضاهای متریک کاملی مانند (X, d) است که در یک نابرابری انقباضی انتگرال‌گون صدق می‌کنند. درواقع برانچیاری نگاشت‌هایی مانند $f : X \to X$ را مورد مطالعه قرار داد که برای آن‌ها عددی حقیقی مانند $c \in (۰, ۱)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x, y \in X$،

$$\int_{۰}^{d(fx,fy)} \phi(t)\,\mathrm{d}t \leq c \int_{۰}^{d(x,y)} \phi(t)\,\mathrm{d}t,$$

که در آن $\phi : [۰, \infty) \to [۰, \infty)$ یک نگاشت اندازه‌پذیر لبگ است که در هر زیرمجموعه فشرده از $[۰, \infty)$ جمع‌پذیر، نامنفی و برای هر $\varepsilon > ۰$، $\int_{۰}^{\varepsilon} \phi(t)\,\mathrm{d}t > ۰$.

[1] rozhneh@gmail.com
[2] jfrimsm@gmail.com

در تعمیم دیگری [۴]، اصلی کلی ارائه گردید که به‌راحتی به‌دست‌آوردن آن دسته از قضایای نقطه ثابت را برای یک جفت از نگاشت‌هایی که در نابرابری انقباضی انتگرال‌گون صدق می‌کنند، ممکن ساخت. از طرفی مفهوم wـفاصله در یک فضای متریک که در ادامه می‌آید در [۲] معرفی و برخی از قضایای نقطه ثابت مورد مطالعه قرار گرفته است.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $p : X \times X \to [0,\infty)$ یک wـفاصله روی X نامیده می‌شود اگر

- برای هر $x,y,z \in X$، $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$؛
- نگاشت p در متغیر دوم، شبه پیوسته پایینی باشد؛
- برای هر $\varepsilon > 0$، وجود داشته باشد $\delta > 0$ به‌طوری که $p(z,x) \geq \delta$ و $p(z,y) \geq \delta$ ایجاب کند $d(x,y) \geq \varepsilon$.

مثال ۱.۱(الف) فرض کنیم $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار خطی باشد. آنگاه تابع $p : X \times X \to [0,\infty)$ به‌طوری که برای هر $x,y \in X$، $p(x,y) = \|x\| + \|y\|$، یک wـفاصله روی X است.

(ب) اگر (X,d) یک فضای متریک و T نگاشتی پیوسته روی X باشد، آنگاه تابع $p : X \times X \to [0,\infty)$ طوری که برای هر $x,y \in X$، $p(x,y) = \max\{d(Tx,y), d(Tx,Ty)\}$، یک wـفاصله روی X است.

(پ) فرض کنیم $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. برای هر $x,y \in X$، اگر $x \neq y$، $d(x,y) = x+y$، و اگر $x = y$، $d(x,y) = 0$ را در نظر می‌گیریم که یک متر روی X و (X,d) یک فضای متریک کامل است. اگر قرار دهیم $p(x,y) = y$، آنگاه p یک wـفاصله روی X است.

در ادامه نوشتار به مروری بر نسخه‌ای جدید از تعمیم قضیه نقطه ثابت برانچیاری با استفاده از مفهوم wـفاصله خواهیم پرداخت که حاصل [۳] است. فرض کنیم $\Phi = \{\phi : \phi : [0,\infty) \to [0,\infty)\}$ که در آن ϕ نانزولی و پیوسته است و برای هر $\varepsilon > 0$، $\phi(\varepsilon) > 0$. به‌علاوه، فرض کنیم $\Psi = \{\psi : \psi : [0,\infty) \to [0,\infty)\}$ که در آن ψ نانزولی و از راست پیوسته است و برای هر $t > 0$، $\psi(t) < t$.

تعریف ۲.۱. فرض کنیم p یک wـفاصله روی فضای متریک (X,d) باشد. نگاشتی مانند S روی X را (Φ,Ψ,p)ـانقباضی گویند اگر $\phi \in \Phi$ و $\psi \in \Psi$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x,y \in X$،

$$\phi p(Sx,Sy) \leq \psi\phi p(x,y).$$

لم ۱.۱. [۳] اگر $\psi \in \Psi$، آنگاه برای هر $t > 0$، $\lim_n \psi^n(t) = 0$ و اگر $\phi \in \Phi$، $\{a_n\} \subset [0,\infty)$ و $\lim_n \phi(a_n) = 0$ آنگاه $\lim_n a_n = 0$.

لم ۲.۱. [۲] فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و p یک wـفاصله روی X باشد. اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد طوری که $\lim_n p(x_n,x)=\lim_n p(x_n,y)=۰$ آنگاه $x=y$. به‌ویژه، اگر $p(z,x)=p(z,y)=۰$ آنگاه $x=y$.

اگر $p(a,b)=p(b,a)=۰$ و $p(a,a)\leq p(a,b)+p(b,a)=۰$، آنگاه $p(a,a)=۰$ و با توجه به لم ۲.۱، $a=b$.

لم ۳.۱. [۲] فرض کنیم p یک wـفاصله روی فضای متریک X و (X,d) یک دنباله در $\{x_n\}$ باشد که برای هر $\varepsilon>۰$ وجود داشته باشد $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ به‌طوری که $m>n>N_\varepsilon$ ایجاب کند $p(x_n,x_m)<\varepsilon$ (یا $\lim_{m,n} p(x_n,x_m)=۰$) آنگاه $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است.

۲ دست‌آوردهای پژوهش

در این بخش، تعمیم معهود از قضیه نقطه ثابت برانچیاری با استفاده از wـفاصله ارائه می‌گردد که از ویژگی‌های آن جایگزینی متر فضای متریک با فاصله ضعیف و به‌علاوه جایگزینی تابع انتگرال با تابع پیوسته و ثابت لیپ‌شیتس با تابع از راست پیوسته است.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم p یک wـفاصله روی یک فضای متریک کامل مانند (X,d) باشد، و $\phi\in\Phi$، $\psi\in\Psi$. اگر S یک نگاشت (ϕ,ψ,p)ـانقباضی روی X باشد، آنگاه S یک نقطه ثابت یکتا در X دارد. به‌علاوه، برای هر $x\in X$،

$$\lim_n S^n x$$

نقطه ثابت S است.

اثبات. قرار می‌دهیم $x\in X$، همچنین $x_{n+۱}=Sx_n$ با $x_۰=x$. آنگاه

$$\begin{aligned}\phi p(x_n,x_{n+۱}) &\leq \psi\phi p(x_{n-۱},x_n)\\ &\leq \psi^۲\phi p(x_{n-۲},x_{n-۱})\\ &\leq \cdots\\ &\leq \psi^n\phi p(x_۰,x_۱).\end{aligned}$$

بنابراین $\lim_n \phi p(x_n,x_{n+۱})=۰$ و لم ۱.۱ ایجاب می‌کند

$$\lim_n p(x_n,x_{n+۱})=۰, \qquad (۱)$$

و به‌طور مشابه

$$\lim_n p(x_{n+۱},x_n)=۰. \qquad (۲)$$

(گام اول) $\lim_{m,n} p(x_n, x_m) = ۰$.
فرض کنیم وجود داشته باشد $\varepsilon > ۰$ و $\{n_k\}_{k=۱}^{\infty}, \{m_k\}_{k=۱}^{\infty}$ به‌طوری که

$$p(x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \varepsilon \qquad (۳)$$

که در آن $m_k > n_k$. با توجه به (۱)، وجود دارد $k. \in \mathbb{N}$ به‌طوری که $n_k > k$. ایجاب می‌کند

$$p(x_{n_k}, x_{n_{k+۱}}) < \varepsilon. \qquad (۴)$$

اگر $n_k > k$. به‌توسط (۳) و (۴)، $m_k \neq n_{k+۱}$. می‌توان فرض نمود که m_k اندیس مینیمالی است به‌طوری که $p(x_{n_k}, x_{m_k}) \geq \varepsilon$ اما $p(x_{n_k}, x_h) < \varepsilon$ $(h \in \{n_{k+۱}, \cdots, m_k - ۱\})$.
داریم

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq p(x_n, x_{m_k}) \\ &\leq p(x_{n_k}, x_{m_k-۱}) + p(x_{m_k-۱}, x_{m_k}) \\ &< \varepsilon + p(x_{m_k-۱}, x_{m_k}) \to \varepsilon^+, \end{aligned}$$

که وقتی $k \to \infty$، $\lim_k p(x_{n_k}, x_{m_k}) = \varepsilon^+$. اگر

$$\eta := \limsup_k p(x_{n_k+۱}, x_{m_k+۱}) \geq \varepsilon,$$

آن‌گاه وجود دارد $\{k_r\}_{r=۱}^{\infty}$ به‌طوری که وقتی $r \to \infty$، $p(x_{n_{k_r}+۱}, x_{m_{k_r}+۱}) \to \eta \geq \varepsilon$.
ازآنجایی‌که ϕ پیوسته و نانزولی است

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon) \leq \phi(\eta) &= \lim_r \phi p(x_{n_{k_r}+۱}, x_{m_{k_r}+۱}) \\ &\leq \lim_r \psi\phi p(x_{n_{k_r}}, x_{m_{k_r}}) \\ &= \psi\phi(\varepsilon). \end{aligned}$$

ازطرفی

$$\phi p(x_{n_{k_r}}, x_{m_{k_r}}) \to \phi(\varepsilon)^+$$

و ψ از راست پیوسته است، لذا $\phi(\epsilon) = ۰$. این یک تناقض است و

$$\lim_k p(x_{n_k+۱}, x_{m_k+۱}) < \varepsilon,$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq p(x_{n_k}, x_{m_k}) \\ &\leq p(x_{n_k}, x_{n_k+۱}) + p(x_{n_k+۱}, x_{m_k+۱}) + p(x_{m_k+۱}, x_{m_k}). \end{aligned}$$

بدین‌ترتیب (۱) و (۱) ایجاب می‌کند

$$\begin{aligned}\varepsilon &\le \lim_k p(x_{n_k}, x_{n_k+1}) + \limsup_k p(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}) \\ &\quad + \lim_k p(x_{m_k+1}, x_{m_k}) \\ &= \limsup_k p(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}) < \varepsilon,\end{aligned}$$

که یک تناقض است. اکنون، ثابت شده است

$$\lim_{m,n} p(x_n, x_m) = 0. \qquad (5)$$

با توجه به لم ۳.۱، $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است و چون X کامل است، وجود دارد $u \in X$ به‌طوری که در X، $x_n \to u$.

(گام دوم) u نقطه یک نقطه ثابت S است.

با توجه به (۵)، برای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ به‌طوری که $n > N_\varepsilon$ ایجاب می‌کند $p(x_{N_\varepsilon}, x_n) < \varepsilon$ اما $x_n \to u$ و $p(x, .)$ شبه پیوسته پایینی است، لذا

$$p(x_{N_\varepsilon}, u) \le \liminf_n p(x_{N_\varepsilon}, x_n) \le \varepsilon.$$

بنابراین $p(x_{N_\varepsilon}, u) \le \varepsilon$. قرار می‌دهیم $\epsilon = \frac{1}{k}, N_\varepsilon = n_k$ و داریم

$$\lim_k p(x_{n_k}, u) = 0. \qquad (6)$$

ازسوی‌دیگر،

$$\phi p(x_{n_k+1}, Su) \le \psi\phi p(x_{n_k}, u) \to 0$$

(وقتی $k \to \infty$) و لذا $\lim_k p(x_{n_k+1}, Su) = 0$، اما

$$p(x_{n_k}, Su) \le p(x_{n_k}, x_{n_k+1}) + p(x_{n_k+1}, Su),$$

در نتیجه

$$\lim_k p(x_{n_k}, Su) = 0. \qquad (7)$$

حال از (۶)، (۷)، و لم ۲.۱ نتیجه می‌گردد $Su = u$.

(گام سوم) نقطه ثابت S یکتاست.

فرض کنیم u_1 و u_2 دو نقطه ثابت دلخواه S باشند. لذا

$$\phi p(u_1, u_2) = \phi p(Su_1, Su_2) \le \psi\phi p(u_1, u_2).$$

بنابراین $\phi p(u_1, u_2) = 0$ و $p(u_1, u_2) = 0$. به‌طور مشابه، $p(u_2, u_1) = 0$ و لذا $u_1 = u_2$.

□

مراجع

[1] Branciari, A. (2002), *A fixed point theorem for mapping satisfying a general contractive condition of integral type* , Int. J. Math. Math. Sci. 10, 531–536.

[2] Kada, O., Suzuki T. and Takahashi, W. (1996), *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japonica 44, 381–591.

[3] Razani, A., Mazlumi Nezhad Z. and Boujary, M. (2009), *A fixed point theorem for w-distance*, Appl. Sci. 11, 114–117.

[4] Vijayaraju, P., Rhoades B.E. and Mohanraj, R. (2005), *A fixed point theorem for pair of maps satisfying a general contractive condition of integral type*, Int. J. Math. Math. Sci. 15, 2359–2364.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

گروه‌های تقارنی و کاربردهای آنها در رمزنگاری

میعاد باوی [۱]

[۱] کارشناس ارشد ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور مرکز شهرکرد

چکیده

در این مقاله، به بررسی ساختار جبری گروه تقارنی S_n و نقش آن در طراحی و پیاده‌سازی الگوریتم‌های رمزگذاری پرداخته می‌شود. گروه S_n، به عنوان گروه تمام جایگشت‌های روی یک مجموعه nـعضوی، دارای خواص منحصر به فردی است که از دیدگاه رمزنگاری اهمیت ویژه‌ای دارد. این خواص شامل غیرآبلی بودن برای $n \geq ۳$، وجود زیرگروه‌های نرمال، و قابلیت تجزیه به دورهای مستقل است. در ادامه، کاربرد این گروه‌ها در طراحی الگوریتم‌های رمزگذاری مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک مثال عددی از رمزگذاری با استفاده از یک جایگشت مشخص ارائه شده است. همچنین، چالش‌های موجود در استفاده از جایگشت‌ها در رمزنگاری و پتانسیل آنها در آینده این حوزه مطرح می‌شود. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که گروه‌های تقارنی نه تنها از دیدگاه نظری بلکه در کاربردهای عملی نیز ابزارهایی قدرتمند محسوب می‌شوند و زمینه‌های غنی‌ای برای پژوهش‌های آینده فراهم می‌کنند.

کلمات کلیدی: گروه تقارنی، جایگشت، S_n، رمزنگاری متقارن، AES، $P-box$

۱ مقدمه

گروه‌های تقارنی S_n، یعنی گروه تمام جایگشت‌های روی یک مجموعه متناهی با n عضو، یکی از بنیادی‌ترین و غنی‌ترین ساختارهای موجود در نظریه گروه‌ها هستند. این گروه‌ها دارای خواص منحصربه‌فردی از جمله غیرآبلی بودن برای $n \geq ۳$، وجود زیرگروه‌های نرمال مانند A_n، و قابلیت تجزیه به دورهای مستقل هستند. این ویژگی‌ها باعث شده‌اند که گروه S_n در حوزه‌های مختلفی از ریاضیات، از جمله هندسه، نظریه نمایش، و حتی علوم کامپیوتر کاربرد یابد.

در سال‌های اخیر، استفاده از جایگشت‌ها در طراحی الگوریتم‌های رمزگذاری به ویژه در رمزنگاری بلوکی مانند AES [۱] مورد توجه قرار گرفته است. این الگوریتم‌ها از جایگشت‌های پیچیده به منظور افزایش مقاومت در برابر حملات رمزنگاری استفاده می‌کنند.

در این مقاله، ضمن مروری بر خواص جبری گروه S_n، نقش این گروه در رمزگذاری اطلاعات مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک مثال عددی از رمزگذاری با استفاده از یک جایگشت مشخص ارائه می‌شود

[1] author1@email.com

[1] Advanced Encryption Standard

و در نهایت چالش‌های موجود در استفاده از جایگشت‌ها در رمزنگاری و پتانسیل آنها در آینده این حوزه مورد بحث قرار می‌گیرد. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که گروه‌های تقارنی نه تنها از لحاظ نظری بلکه در کاربردهای عملی نیز ابزارهایی قدرتمند محسوب می‌شوند و زمینه‌های غنی‌ای برای پژوهش‌های آینده فراهم می‌کنند.

۲ مروری بر گروه S_n

گروه S_n، گروه تمام جایگشت‌های روی یک مجموعه nـعضوی، یکی از مهم‌ترین ساختارهای موجود در نظریه گروه‌هاست. این گروه دارای خواص منحصربه‌فردی است که باعث شده در حوزه‌های مختلف ریاضیات و علوم کاربردی کاربرد گسترده‌ای داشته باشد.

تعریف ۱.۲ (جایگشت)**.** فرض کنید $X = \{۱, ۲, \dots, n\}$. یک جایگشت روی X، یک تابع دوسویی (یعنی یک‌به‌یک و پوشا) از X به خودش است. مجموعهٔ تمام جایگشت‌های روی X را با S_n نشان می‌دهیم و آن را گروه تقارنی روی n عنصر می‌نامیم.

عمل گروهی در S_n، ترکیب جایگشت‌ها است:

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x)), \quad \forall x \in X.$$

۱.۲ خواص اصلی گروه S_n

قضیه ۱.۲. S_n تحت عمل ترکیب تشکیل یک گروه می‌دهد.

اثبات. چون هر جایگشت یک تابع دوسویی است، معکوس آن وجود دارد و ترکیب دو جایگشت نیز یک جایگشت است. بنابراین S_n تحت عمل ترکیب بسته است، دارای عضو خنثی (جایگشت همانی) و هر عضو دارای معکوس است. پس یک گروه است. □

لم ۱.۲. مرتبهٔ گروه S_n برابر است با $|S_n| = n!$.

اثبات. انتخاب یک جایگشت معادل است با تعیین تصویر هر عنصر از $\{۱, ۲, \dots, n\}$ به صورت یک‌به‌یک، که n گزینه برای اولی، $n - ۱$ برای دومی و الی آخر وجود دارد. پس:

$$|S_n| = n \cdot (n - ۱) \cdot \dots \cdot ۱ = n!$$

□

گزاره ۱۵. برای $n \geq ۳$، گروه S_n غیرآبلی است.

اثبات. فرض کنید $\sigma = (۱\ ۲), \tau = (۱\ ۳)$. آنگاه:

$$\sigma \circ \tau = (۱\ ۳\ ۲), \quad \tau \circ \sigma = (۱\ ۲\ ۳)$$

پس $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$، بنابراین S_n غیرآبلی است. □

گزاره ۱۶. گروه A_n، شامل تمام جایگشت‌های زوج، یک زیرگروه نرمال از S_n است و داریم:

$$|A_n| = \frac{n!}{۲}.$$

نمایش جایگشت‌ها

جایگشت‌ها را می‌توان به دو روش نمایش داد:

- **نمایش دوخطی**:

$$\sigma = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & \cdots & n \\ \sigma(۱) & \sigma(۲) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

- **نمایش دوری**: به طور مثال:

$$\sigma = (۱\ ۳\ ۵)(۲\ ۴),$$

که نشان‌دهنده $۱ \to ۵ \to ۳ \to ۱$ و $۴ \leftrightarrow ۲$ است.

۲.۲ مثال عددی

فرض کنید $n = ۴$ و جایگشت زیر را داشته باشیم:

$$\sigma = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۲ \end{pmatrix}.$$

این جایگشت را می‌توان به صورت دوری نوشت:

$$\sigma = (۱\ ۳\ ۴\ ۲).$$

همچنین، این جایگشت را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب ترانهادها نوشت:

$$\sigma = (۱\ ۲)(۱\ ۴)(۱\ ۳).$$

این نشان می‌دهد که جایگشت‌ها را می‌توان به شکل‌های مختلفی بسط داد.

۳ مفاهیم اولیه رمزنگاری

رمزنگاری [۲] علم حفظ اطلاعات در برابر دسترسی غیرمجاز، تغییر، یا فاش‌سازی است. در طول تاریخ، روش‌های مختلفی برای رمزگذاری پیام‌ها توسعه یافته‌اند، اما در دوران دیجیتال، این روش‌ها تحت استانداردهای ریاضی و محاسباتی قرار گرفته‌اند. در این بخش، مفاهیم بنیادین رمزنگاری را مرور می‌کنیم و به نحوه استفاده از جبر و جایگشت‌ها در این حوزه می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳ (سیستم رمزنگاری)**.** یک سیستم رمزنگاری را به صورت یک چهارتایی (P, C, K, E) تعریف می‌کنیم، که:

- P: مجموعهٔ تمام متن‌های اصلی (Plaintext)
- C: مجموعهٔ تمام متن‌های رمزگذاری‌شده (Ciphertext)
- K: مجموعهٔ تمام کلیدها (Keys)
- $E = \{E_k : k \in K\}$: مجموعهٔ توابع رمزگذاری، که برای هر $k \in K$، تابع $E_k : P \to C$ یک تابع یک‌به‌یک است.

تعریف ۲.۳ (رمزگذاری و رمزگشایی)**.** اگر $e \in K$ کلید رمزگذاری و $d \in K$ کلید رمزگشایی باشد، آنگاه:

$$D_d(E_e(p)) = p,$$

که D_d تابع رمزگشایی است.

انواع رمزنگاری

دو نوع اصلی رمزنگاری وجود دارد:

- **رمزنگاری متقارن** [۳]: در این حالت، کلید رمزگذاری و رمزگشایی یکسان است. مثال: AES، DES.
- **رمزنگاری نامتقارن** [۴]: کلید رمزگذاری و رمزگشایی متفاوت است. مثال: RSA.

در این مقاله، تمرکز ما روی رمزنگاری متقارن است، زیرا جایگشت‌ها بیشتر در این نوع کاربرد دارند.

نقش جبر و جایگشت‌ها در رمزنگاری

جایگشت‌ها به عنوان یک ابزار قدرتمند در طراحی الگوریتم‌های رمزنگاری استفاده می‌شوند. یکی از کاربردهای مهم آنها در بلوک‌های جایگشتی [۵] (یا به اختصار $P - Box$) است که در الگوریتم‌های

[2] Cryptography
[3] Symmetric Cryptography
[4] Asymmetric Cryptography
[5] Permutation Boxes

رمزگذاری بلوکی نقش دارند.

مثال ۱.۳ (رمزگذاری با استفاده از جایگشت)**.** فرض کنید $p = \texttt{"MATH"}$ و یک جایگشت $\sigma \in S_۴$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$\sigma = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۲ \end{pmatrix}.$$

هر کاراکتر را با یک موقعیت از ۱ تا ۴ نشان می‌دهیم:

i	۱	۲	۳	۴
p_i	M	A	T	H

با استفاده از جایگشت σ، رمزگذاری به صورت زیر انجام می‌شود:

$$c_i = p_{\sigma(i)}.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} c_۱ &= p_{\sigma(۱)} = p_۳ = T, \\ c_۲ &= p_{\sigma(۲)} = p_۱ = M, \\ c_۳ &= p_{\sigma(۳)} = p_۴ = H, \\ c_۴ &= p_{\sigma(۴)} = p_۲ = A. \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$c = E_\sigma(p) = \texttt{"TMHA"}.$$

معیارهای امنیت در رمزنگاری

در رمزنگاری، چند معیار کلیدی برای ارزیابی امنیت یک سیستم وجود دارد:

- **پنهان‌سازی**: رابطه بین متن اصلی و رمزگذاری‌شده باید غیرقابل تشخیص باشد.
- **مقاومت در برابر حملات**: سیستم باید در برابر حملات مختلف (مانند حمله کلید فاحصه، حمله متن مشخص) مقاومت کند.
- **کلیدهای قوی**: کلید باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا امکان جستجوی کامل [۶] وجود نداشته باشد.

جایگشت‌ها به خوبی می‌توانند در بهبود این معیارها کمک کنند، زیرا تعداد زیادی جایگشت ممکن وجود دارد ($n!$)، که می‌تواند به عنوان فضای کلید استفاده شود.

[6] Brute-force attack

۴ کاربردهای گروه S_n در الگوریتم‌های رمزنگاری

استفاده از جایگشت‌ها در الگوریتم‌های رمزنگاری، به ویژه در رمزنگاری بلوکی، از دیرباز مورد توجه قرار گرفته است. این جایگشت‌ها نقش مهمی در افزایش مقاومت در برابر حملات، ایجاد پراکندگی[۷] و تولید کلیدهای قوی دارند. در ادامه، به کاربرد گروه S_n در الگوریتم‌های معروفی مثل AES می‌پردازیم.

جایگشت‌ها در AES

. AES[۸]، یکی از استانداردهای رمزنگاری متقارن است که از جایگشت‌های ثابت در طراحی خود استفاده می‌کند. یکی از مؤلفه‌های کلیدی آن، ShiftRows است که یک جایگشت روی بایت‌های یک ماتریس ۴ × ۴ اعمال می‌کند.

مثال ۱.۴ (جایگشت در AES - ShiftRows). فرض کنید وضعیت فعلی (State) در AES به صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} s_{۰,۰} & s_{۰,۱} & s_{۰,۲} & s_{۰,۳} \\ s_{۱,۰} & s_{۱,۱} & s_{۱,۲} & s_{۱,۳} \\ s_{۲,۰} & s_{۲,۱} & s_{۲,۲} & s_{۲,۳} \\ s_{۳,۰} & s_{۳,۱} & s_{۳,۲} & s_{۳,۳} \end{bmatrix}.$$

در مرحله $ShiftRows$، هر ردیف به مقدار مشخصی شیفت داده می‌شود:

- ردیف ۰ : بدون تغییر
- ردیف ۱ : شیفت به چپ یک واحد
- ردیف ۲ : شیفت به چپ دو واحد
- ردیف ۳: شیفت به چپ سه واحد

این عمل یک جایگشت است که به صورت یک عضو از $S_{۱۶}$ (چون ۱۶ بایت داریم) قابل تعریف است.

جایگشت‌ها در هاP-box

در رمزنگاری بلوکی، P-boxها (جعبه‌های جایگشتی)، ابزارهایی برای ایجاد پراکندگی [۹] هستند. این جعبه‌ها از جایگشت‌هایی استفاده می‌کنند که به صورت یک عضو از S_n تعریف می‌شوند.

[7] Diffusion
[8] Advanced Encryption Standard
[9] Diffusion

تعریف ۱.۴ (P-box)**.** یک P-box یک جایگشت $\pi : \{۰,۱\}^n \to \{۰,۱\}^n$ است که بیت‌ها را در موقعیت‌های جدیدی قرار می‌دهد تا از تشخیص الگوهای احتمالی جلوگیری کند.

این نوع جایگشت‌ها در الگوریتم‌هایی مانند DES و AES نقش کلیدی دارند.

طراحی سیستم‌های مبتنی بر جایگشت

یکی از روش‌های طراحی سیستم‌های رمزگذاری، استفاده از یک جایگشت $\sigma \in S_n$ به عنوان یک تابع رمزگذاری است.

تعریف ۲.۴ (سیستم رمزگذاری مبتنی بر جایگشت)**.** فرض کنید $\sigma \in S_n$ یک جایگشت باشد. یک سیستم رمزگذاری مبتنی بر σ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\sigma(p_۱p_۲\dots p_n) = p_{\sigma(۱)}p_{\sigma(۲)}\cdots p_{\sigma(n)}.$$

این سیستم تنها یک جایگشت از ورودی است، اما می‌تواند به عنوان یک بلوک ساده در طراحی سیستم‌های پیچیده‌تر مورد استفاده قرار گیرد.

ارزیابی امنیت

امنیت یک سیستم مبتنی بر جایگشت به تعداد کل جایگشت‌های ممکن $(n!)$ و نحوه مدیریت کلید بستگی دارد.

قضیه ۱.۴. اگر یک سیستم رمزگذاری تنها از یک جایگشت $\sigma \in S_n$ استفاده کند، آنگاه فضای کلید آن $n!$ است.

این عدد بزرگ است و حتی برای $n = ۸$، $n! = ۴۰۳۲۰$ است که جستجوی کامل کلید را دشوار می‌کند. البته، در عمل این نوع سیستم‌ها به تنهایی کافی نیستند و باید با عملیات دیگری مانند جایگشت‌های تکراری یا توابع غیرخطی تقویت شوند.

۵ مثال عددی رمزگذاری با استفاده از جایگشت

در این بخش، یک مثال کامل و دقیق از نحوه استفاده از یک جایگشت $\sigma \in S_n$ در طراحی یک سیستم رمزگذاری ساده ارائه می‌دهیم. همچنین، نحوه رمزگشایی با استفاده از معکوس جایگشت و تحلیل اولیه امنیت آن را بررسی خواهیم کرد.

تعریف جایگشت

فرض کنید $n = ۸$ و جایگشت $\sigma \in S_۸$ به صورت زیر داده شده باشد:

$$\sigma = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۴ & ۶ & ۲ & ۷ & ۱ & ۸ & ۵ & ۳ \end{pmatrix}.$$

این جایگشت را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دورهای جدا از هم نوشت:

$$\sigma = (۱\ ۴\ ۷\ ۵)(۲\ ۶\ ۸\ ۳).$$

۱.۵ رمزگذاری متن

فرض کنید متن اصلی (Plaintext) به صورت زیر باشد:

$$p = \texttt{"MATHCONF"}.$$

هر کاراکتر را با یک موقعیت از ۱ تا ۸ نشان می‌دهیم:

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
p_i	M	A	T	H	C	O	N	F

با استفاده از جایگشت σ، رمزگذاری به صورت زیر انجام می‌شود:

$$c_i = p_{\sigma(i)}.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} c_۱ &= p_{\sigma(۱)} = p_۴ = H, \\ c_۲ &= p_{\sigma(۲)} = p_۶ = O, \\ c_۳ &= p_{\sigma(۳)} = p_۲ = A, \\ c_۴ &= p_{\sigma(۴)} = p_۷ = N, \\ c_۵ &= p_{\sigma(۵)} = p_۱ = M, \\ c_۶ &= p_{\sigma(۶)} = p_۸ = F, \\ c_۷ &= p_{\sigma(۷)} = p_۵ = C, \\ c_۸ &= p_{\sigma(۸)} = p_۳ = T. \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$c = E_\sigma(p) = \texttt{"HONAMFCT"}.$$

۲.۵ رمزگشایی با استفاده از معکوس جایگشت

برای رمزگشایی، از معکوس جایگشت σ^{-1} استفاده می‌کنیم. با توجه به نمایش دوری:

$$\sigma^{-1} = (۵\ ۷\ ۴\ ۱)(۳\ ۸\ ۶\ ۲).$$

با استفاده از σ^{-1}، داریم:

$$p_i = c_{\sigma^{-1}(i)}.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
p_۱ &= c_{\sigma^{-1}(۱)} = c_۵ = M,\\
p_۲ &= c_{\sigma^{-1}(۲)} = c_۳ = A,\\
p_۳ &= c_{\sigma^{-1}(۳)} = c_۸ = T,\\
p_۴ &= c_{\sigma^{-1}(۴)} = c_۱ = H,\\
p_۵ &= c_{\sigma^{-1}(۵)} = c_۷ = C,\\
p_۶ &= c_{\sigma^{-1}(۶)} = c_۲ = O,\\
p_۷ &= c_{\sigma^{-1}(۷)} = c_۴ = N,\\
p_۸ &= c_{\sigma^{-1}(۸)} = c_۶ = F.
\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$D_{\sigma^{-1}}(c) = \texttt{"MATHCONF"},$$

که با متن اصلی یکسان است.

۳.۵ تحلیل امنیت ساده

در این روش، فضای کلید برابر با $|S_۸| = ۸! = ۴۰۳۲۰$ است. بنابراین، این روش در برابر حمله جستجوی کلید (Brute-force attack) مقاومت مناسبی دارد، زیرا تعداد کلیدهای ممکن زیاد است.

اما این روش تنها یک مرحله جایگشت را شامل می‌شود و بدون استفاده از مرحله‌های دیگر (مانند تعویض بیتی یا مدیریت کلید)، از امنیت لازم برخوردار نیست.

تذکر ۱.۵. این روش تنها یک مثال آموزشی و ساده از کاربرد جایگشت‌ها در رمزنگاری است و در عمل نیازمند ترکیب با مؤلفه‌های دیگر رمزنگاری برای افزایش امنیت است.

۶ چالش‌ها و مسائل باز

استفاده از گروه S_n و ساختارهای مبتنی بر جایگشت در رمزنگاری، اگرچه دارای پتانسیل بالایی است، اما با چالش‌هایی نیز همراه است. در ادامه به برخی از مهم‌ترین این چالش‌ها و مسائل باز در این زمینه

اشاره خواهیم کرد.

۱.۶ چالش‌های محاسباتی

یکی از مشکلات اصلی در استفاده از جایگشت‌ها در رمزنگاری، افزایش پیچیدگی محاسباتی است. این چالش شامل موارد زیر است:
- تعداد جایگشت‌های ممکن $(n!)$ به صورت فاکتوریلی افزایش می‌یابد.
- ذخیره‌سازی و مدیریت جایگشت‌های بزرگ در حافظه دشوار است.
- تولید جایگشت‌های تصادفی و امن نیازمند الگوریتم‌های پیشرفته است.

این مسائل باعث می‌شوند که در عمل تنها از زیرمجموعه‌ای از S_n استفاده شود، که ممکن است امنیت را تحت تأثیر قرار دهد.

۲.۶ مقاومت در برابر حملات

سیستم‌های رمزگذاری مبتنی بر جایگشت ممکن است در برابر انواع مختلفی از حملات رمزنگاری ضعیف باشند:
- **حمله جستجوی کلید** $(Brute - force\,attack)$: با توجه به اینکه تعداد جایگشت‌ها زیاد است، ولی در مقیاس‌های کوچک (مانند $n = ۸$) قابل حمله است.
- **حمله متن مشخص** $(Known - plaintext\,attack)$: اگر مهاجم بتواند چند جفت (p, c) را بدست آورد، ممکن است بتواند جایگشت σ را بازیابی کند.
- **حمله متن انتخابی** $(Chosen - plaintext\,attack)$: در این حالت، مهاجم می‌تواند متن‌های دلخواهی را رمز کند و اطلاعات بیشتری از ساختار جایگشت به دست آورد.

بنابراین، استفاده از جایگشت‌ها در رمزنگاری باید همراه با سایر مؤلفه‌های رمزنگاری (مانند توابع غیرخطی و مدیریت کلید) باشد.

انتخاب جایگشت بهینه

یکی از مسائل باز در این حوزه، این است که:

چگونه یک جایگشت "بهینه" را انتخاب کنیم که از لحاظ امنیتی قوی و در عین حال قابل پیاده‌سازی عملی باشد؟

برخی معیارهای مهم در انتخاب یک جایگشت مناسب عبارتند از:
- طول دورهای تشکیل‌دهنده
- عدم وجود الگوهای قابل پیش‌بینی
- مقاومت در برابر حملات خطی و دیفرانسیلی

اما تعریف دقیق ریاضی از "جایگشت بهینه" هنوز یک موضوع تحقیقاتی است.

۳.۶ امنیت در برابر رایانه‌های کوانتومی

در دوران آینده نزدیک، با ظهور رایانه‌های کوانتومی، سیستم‌های رمزنگاری قدیمی ممکن است آسیب‌پذیر شوند. این موضوع در مورد جایگشت‌ها نیز صادق است.

نکته ۱.۶. آیا می‌توان یک سیستم رمزنگاری مبتنی بر جایگشت طراحی کرد که در برابر حملات کوانتومی مقاوم باشد؟

این یکی از مسائل باز در حوزه رمزنگاری پسا- کوانتومی ($Post-Quantum\,Cryptography$) است.

۴.۶ کاربرد در سیستم‌های مبتنی بر هویت و امضای دیجیتال

یکی از پتانسیل‌های آینده، استفاده از جایگشت‌ها در سیستم‌های احراز هویت و امضای دیجیتال است:
- استفاده از جایگشت‌ها در طراحی امضای دیجیتال مبتنی بر جایگشت ($Permutation-based\,Signature$)
- توسعه سیستم‌های احراز هویت بدون کلید عمومی ($Password-based\,authentication$)

این حوزه‌ها هنوز به طور کامل مطالعه نشده‌اند و فرصت‌های تحقیقاتی فراوانی فراهم می‌کنند.

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی ساختار جبری گروه تقارنی S_n و نقش آن در طراحی الگوریتم‌های رمزگذاری پرداختیم. نشان دادیم که این گروه دارای خواص منحصربه‌فردی است که از دیدگاه رمزنگاری بسیار مهم هستند. این خواص شامل غیرآبلی بودن برای $n \geq 3$، وجود زیرگروه‌های نرمال (مانند A_n)، و قابلیت تجزیه به دورهای مستقل است. همچنین، نحوه استفاده از جایگشت‌ها در طراحی سیستم‌های رمزگذاری مورد بررسی قرار گرفت. یک مثال عددی از رمزگذاری و رمزگشایی با استفاده از یک جایگشت مشخص ارائه شد و امنیت این روش به صورت اولیه تحلیل گردید. علاوه بر این، چالش‌های موجود در استفاده از جایگشت‌ها در رمزنگاری، از جمله مقاومت در برابر حملات، انتخاب جایگشت بهینه و امنیت در برابر رایانه‌های کوانتومی مطرح شد.

نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که گروه‌های تقارنی نه تنها از دیدگاه نظری بلکه در کاربردهای عملی نیز ابزارهایی قدرتمند محسوب می‌شوند. استفاده از این گروه‌ها در الگوریتم‌های رمزگذاری مانند AES و همچنین در توسعه سیستم‌های مبتنی بر جایگشت، زمینه‌های غنی‌ای برای پژوهش‌های آینده فراهم می‌کنند.

در نهایت، تأکید می‌کنیم که:

- استفاده از جایگشت‌ها در رمزنگاری باید همراه با مؤلفه‌های دیگر (مانند توابع غیرخطی و مدیریت کلید) باشد.
- انتخاب یک جایگشت "بهینه" هنوز یک موضوع تحقیقاتی است.
- گروه S_n می‌تواند در طراحی الگوریتم‌های رمزنگاری پسا_کوانتومی نیز کاربرد داشته باشد.

بنابراین، گروه‌های تقارنی به عنوان یک ابزار قدرتمند، ارتباط عمیقی بین جبر مجرد و کاربردهای عملی در رمزنگاری ایجاد می‌کنند و زمینه‌های فراوانی برای تحقیقات آینده فراهم می‌کنند.

مراجع

[۱] ق. بابایی تهرانی و ا. ع. جمشیدیان، جبر مجرد، انتشارات دانشگاه پیام نور، ۱۳۹۵.

[۲] م. محمدزاده و ر. فرنوش، نظریه گروه‌ها برای علوم فیزیکی و مهندسی، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۸۹.

[3] Dummit, D. S., and Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra*, 3rd ed., John Wiley & Sons.

[4] Stinson, D. R. (2005). *Cryptography: Theory and Practice*, 3rd ed., CRC Press.

[5] Daemen, J., and Rijmen, V. (2002). *The Design of Rijndael: AES – The Advanced Encryption Standard*, Springer-Verlag.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

مدل‌سازی ریاضی و شبیه‌سازی مونته‌کارلو برای مدیریت سرمایه و کاهش ریسک در بازارهای مالی

عباسعلی شریفی [۱] حجت امامی [۲]

[۱] دانشیار گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بناب
[۲] دانشیار گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بناب

چکیده

اغلب معامله‌گران در بازارهای مالی مثل فارکس، ارزهای دیجیتال، و بازارهای سهام، تمرکز خود را به روش‌های معاملاتی و تحلیل‌های تکنیکال معطوف می‌کنند و اکثرا از دو فاکتور مهم و اساسی "مدیریت سرمایه" و "مدیریت ریسک" غافل می‌مانند و با کوچکترین اشتباهی، حساب‌های معاملاتی آنها آسیب‌های جدی را متحمل می‌شوند. در این مقاله، چند روش عمده و مهم از مدیریت سرمایه و مدیریت ریسک را بررسی می‌کنیم و با استفاده از مدلسازی ریاضی و محاسبات آماری، روش بهینه را برای رشد پرتفوی معامله‌گران ارائه می‌دهیم تا معامله‌گران بتوانند استراتژی‌های معاملاتی موثرتری را برای معاملات خود در بازارهای مالی جهانی و همچنین بازار بورس اوراق بهادر تهران اتخاذ نمایند. شبیه‌سازی‌های کامپیوتری برای ۱۰۰۰ مرتبه معامله انجام گردیده و نتایج بدست‌آمده موثر بودن روش‌های مدیریت سرمایه در میزان رشد حساب معاملاتی را نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: مدیریت سرمایه، مدیریت ریسک، حد سود، حد ضرر، نرخ برد

۱ مقدمه

شرط بقاء و استمرار در بازارهای مالی مثل فارکس، رمز ارز، و بازارهای خرید و فروش سهام، عمدتا بر مبنای کنترل دو فاکتور اساسی ریسک و سرمایه می‌باشد، بطوریکه بزرگترین و نام‌آورترین معامله‌گران جهان مثل آقایان "وارن بافت" و "البروکس" و حتی مدیران عامل صندوق‌های سرمایه‌گذاری سهام، عمدتا بجای تمرکز به سودآوری، بر مدیریت ریسک و حفظ سرمایه مشتریان خود تاکید دارند [۱]. اما در عمل متاسفانه اغلب معامله‌گران خرد (بویژه تازه‌کارها) فقط به تحلیل تکنیکال و اندیکاتورها توجه می‌کنند و از بحث مدیریت ریسک و مدیریت سرمایه غافل می‌مانند که این غفلت باعث می‌شود ضررهای مالی جبران‌ناپذیری را متحمل شوند. تحلیل تکنیکال شامل بررسی کندل‌های قیمت، شرط ورود به معامله و شرط خروج از آن می‌باشد و در اغلب موارد میزان سرمایه قابل اختصاص (مارجین)

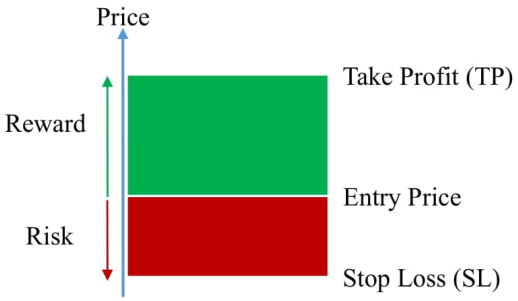
[1] sharifi@ubonab.ac.ir
[2] emami@ubonab.ac.ir

به یک سهم یا به اختصار حجم مورد نظر را پیش‌بینی نمی‌کند [۲]. یا مثلا یک سیستم هوش مصنوعی برای معامله‌گری نیز صرفا جهت نمودار تغییرات قیمت را پیش‌بینی می‌کند و مقدار حجم معامله و میزان سود و ضرر را مشخص نمی‌کند [۳]. امروزه پژوهش‌های بسیاری در خصوص معامله‌گری در بازارهای مالی فارکس و رمزارزها ارائه شده است [۴، ۵، ۶، ۷]. عمده این پژوهش‌ها مبتنی بر شبکه‌های عصبی و الگوریتم‌های یادگیری در خصوص بررسی الگوریتم‌های معاملاتی و پیش‌بینی تحرکات قیمت می‌باشند و موضوع مدیریت سرمایه در آنها بررسی نشده است. در واقع معامله‌گران حرفه‌ای بر مبنای یک استراتژی مکتوب معاملاتی، معاملات خود را انجام می‌دهند که این استراتژی شامل هم تحلیل‌های تکنیکالی و هم مدیریت ریسک و مدیریت سرمایه می‌باشد [۸]. مدیریت سرمایه به نوعی مدیریت ریسک ناشی از معاملات است که بسته به سبک معاملاتی می‌تواند متغیر باشد، اما در حالت کلی به مدیریت ریسک هر سفارش خرید سهم و مدیریت ریسک کلی که شامل ریسک همه سفارش‌های خرید تقسیم می‌شود و معامله‌گران حرفه‌ای تواما هر دو ریسک را کنترل می‌کنند [۹، ۱۰].

در این مقاله موضوع کاهش ریسک از طریق مدیریت صحیح سرمایه را با مدل‌سازی ریاضی نشان می‌دهیم و پارامترهای موثر در مدیریت توام ریسک و سرمایه را تعریف می‌کنیم. همچنین، برای داشتن یک پرتفوی مناسب، موضوع مدیریت سرمایه با حجم ثابت و حجم متغییر را متناسب با میزان سرمایه بصورت گرافیکی نشان می‌دهیم. نهایتا نرخ رشد پرتفوی یک معامله‌گر را بر حسب تعداد معاملات با استفاده از شبیه‌سازی نرم‌افزاری (مونته کارلو) برای مقادیر مختلفی از چندین پارامتر موثر بدست می‌آوریم. پس از این مقدمه، سایر بخش‌های این مقاله به این صورت سازماندهی شده است. در بخش ۲، موضوع مدیریت سرمایه در بازارهای مالی با روابط ریاضی و مدلسازی آماری توضیح داده شده است. در بخش ۳، به تشریح کنترل سرمایه با انتخاب حجم معامله پرداخته شده است. در بخش ۴، شبیه‌سازی‌ها صورت گرفته و نتایج و نمودارها مورد بحث قرار گرفته شده است. در نهایت، در بخش ۵ به نتیجه‌گیری و پیشنهادات ادامه پژوهش پرداخته شده است.

۲ مدل‌سازی ریاضی مدیریت سرمایه در بازار بورس

انتخاب استراتژی معامله‌گری بسیار حائز اهمیت است، چرا که موفقیت و رشد سرمایه یک معامله‌گر به فاکتورهایی چون تعداد معاملات سودده (نرخ برد) ، میزان ریسک یا حد ضرر، و مقدار پاداش یا حد سود بستگی دارد که یک استراتژی معاملاتی مناسب، همه این فاکتورها را در نظر می‌گیرد [۱۱]. شکل ۱ میزان ریسک (حد ضرر) و مقدار پاداش (حد سود) در معامله خرید یک سهم را به تصویر می‌کشد. همانطوریکه در شکل فوق مشخص شده است مقادیر ریسک و ریوارد با توجه به قیمت ورود (خرید) محاسبه می‌شوند. ریوارد در واقع میزان سودی است که از فروش یک سهم در قیمت بالاتر از قیمت خرید انجام می‌گیرد، اما اگر به هر دلیلی قیمت یک سهم طبق تحلیل و انتظار پیش نرود و بعد از خرید به قیمت‌های پایین‌تر نزول کند برای جلوگیری از ضررهای بزرگتر، مجبور به پذیرش ضرر با فروش



شکل ۱: حد ضرر و حد سود (مقادیر ریسک و ریوارد)

یک سهم در زیر قیمت خرید هستیم. در واقع میزان ریسک از اختلاف قیمت خرید با قیمت فروش در قیمت پایین تر از قیمت خرید بدست می‌آید و از قبل از ورود به معامله باید تعیین گردد. واضح است که مقدار ریوارد باید همواره از میزان ریسک بیشتر و یا حداقل برابر باشد و در غیر اینصورت اصلا نباید اقدام به خرید یک سهم نمود. لذا اولین فاکتوری که معامله‌گران به آن توجه می‌کنند پارامتر R/R یا همان نسبت ریسک به ریوارد است و همواره باید این فاکتور کوچکتر یا مساوی یک باشد یعنی

$$R/R \leq ۱ \qquad (۱)$$

فرض کنید یک معامله‌گر بطور کلی N تا معامله انجام داده باشد که N_L معامله آن به ضرر منجر شده و N_P تا به حد سود رسیده باشد ($N = N_L + N_P$). اگر فرض کنیم L_i و P_i بترتیب مقادیر ضرر و سود در معامله iام باشند، مقادیر ریسک و ریوارد بر مبنای واحد پولی برای کل معاملات عبارتند از

$$\text{ریسک} = \sum_{i=۱}^{N_L} L_i, \quad \text{ریوارد} = \sum_{i=۱}^{N_P} P_i \qquad (۲)$$

دومین فاکتور قابل توجه برای معامله‌گران نرخ برد می‌باشد. نرخ برد در واقع نسبت تعداد معاملات سودده به کل معاملات است و بصورت زیر محاسبه می‌گردد

$$W = \frac{N_P}{N} \qquad (۳)$$

با توجه به دو پارامتر W و R/R، نرخ رشد سرمایه (نرخ رشد بالانس حساب معامله‌گر) بصورت زیر محاسبه می‌گردد

$$G = W - (۱ - W) \times R/R \qquad (۴)$$

برای $G > ۰/۵$، سرمایه معامله‌گر در حال رشد است و هر چقدر G بزرگتر باشد بالانس حساب سریعتر رشد خواهد کرد. واضح است که برای $G < ۰/۵$ استراتژی معامله‌گر سودده نیست. از رابطه (۴)

جدول ۱: مقادیر سود و زیان در ۱۰ معامله

	(L)	(P)
1	0	1,500,000
2	1,000,000	0
3	0	750,000,000
4	500,000	0
5	1,500,000	0
6	0	2,000,000
7	0	1,000,000
8	1,250,000	0
9	0	1,150,000
10	0	1,400,000
	4,250,000	7,800,000

نتیجه می‌شود که سوددهی استراتژی یک معامله‌گر به دو فاکتور اصلی نرخ برد و نسبت ریسک به ریوارد بستگی دارد. فاکتور اول با الگوریتم‌های معاملاتی مثل تحلیل تکنیکال و استفاده از ابزارهای اندیکاتورها کنترل می‌شود و دومین فاکتور یعنی نسبت R/R با مدیریت سرمایه تنظیم می‌شود.

فرض کنیم یک معامله‌گر بازار بورس ۱۰ مرتبه معامله انجام می‌دهد و ۴ معامله آن مطابق جدول ۱ شامل معاملات ردیف دوم، چهارم، پنجم، و هشتم منجر به ضرر و مابقی سودده می‌باشد. فرض کنید مقادیر سود و ضرر بر حسب تومان به شرح جدول زیر باشند نرخ برد این معامله‌گر عبارت است از $W = ۶/۱۰ = ۰/۶$ و مقادیر ریسک و ریوارد به صورت زیر محاسبه می‌گردند

$$\text{ریسک} = ۴,۲۵۰,۰۰۰, \quad \text{ریوارد} = ۷,۸۰۰,۰۰۰$$

نسبت ریسک به ریوارد در ۱۰ معامله انجام شده برابر است با

$$R/R = \frac{۴,۲۵۰,۰۰۰}{۷,۸۰۰,۰۰۰} \approx ۰/۵۴۴$$

و نهایتا نرخ رشد حساب معامله گر عبارت است از

$$G = ۰/۶ - (۱ - ۰/۶) \times ۰/۵۴۴ = ۰/۳۸۲$$

نرخ رشد سرمایه معامله‌گر در این حالت بزرگتر از ۵.۰ می‌باشد و چنین سبک معاملاتی می‌تواند برای معامله‌گر سودده باشد.

باید خاطر نشان کرد که کنترل توام دو فاکتور W و R/R برای داشتن مقدار G بالا، چندان کار ساده‌ای نیست یعنی نمی‌توان یک مدل ریاضی بصورت یک رابطه بسته برای ارتباط این دو فاکتور

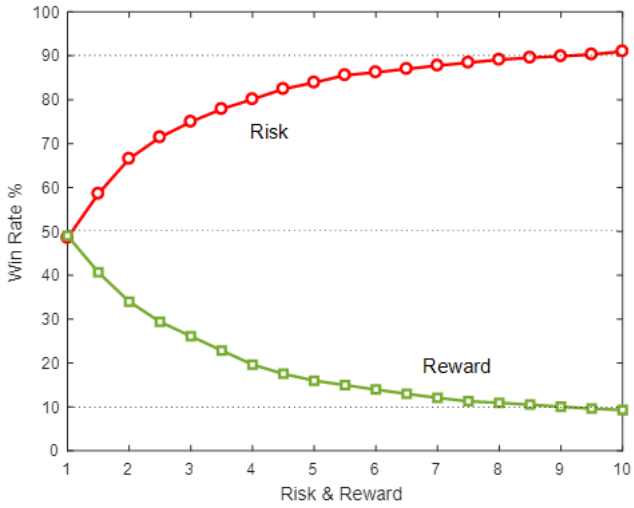


شکل ۲: افزایش حد سود (کاهش حد ضرر)



شکل ۳: افزایش حد ضرر (کاهش حد سود)

مطرح کرد چرا که با افزایش حد سود (کاهش حد ضرر) به صورت شکل زیر، شانس رسیدن قیمت به SL بیشتر شده و احتمال رسیدن به TP کمتر می‌شود و نرخ برد کاهش می‌یابد. با افزایش فاصله حد ضرر (کاهش حد سود)، نرخ برد افزایش می‌یابد زیرا افزایش فاصله نقطه SL باعث می‌شود نمودار کمتر به حد ضرر حرکت کند. اگر چه در این حالت نرخ برد افزایش می‌یابد ولی در عوض نسبت R/R به درستی انتخاب نمی‌گردد و این پروسه نهایتا باعث می‌شود که بالانس حساب معامله‌گر نتواند رشد کند و یا حتی ممکن است منجر به از دست دادن حساب گردد. با توجه به مطالب گفته شده مشخصه نرخ برد بر حسب ریسک و ریوارد بصورت توام با شبیه‌سازی برای ۱۰۰۰ مرتبه معامله بصورت منحنی‌های شکل ۴ بدست آمده است. برای بدست آوردن مشخصه ریسک (ریوارد)، مقدار ریوارد (ریسک) را برابر ۱ فرض کرده و ریسک (ریوارد) را از ۱ تا ۱۰ افزایش می‌دهیم و در هر



شکل ۴: مشخصه نرخ برد بر حسب ریسک و ریوارد

محله نرخ برد را بدست آورده و رسم نموده‌ایم.

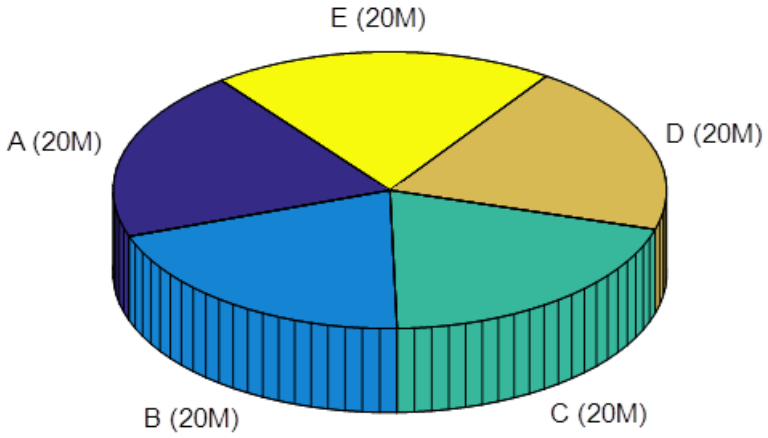
۳ مدیریت سرمایه

همانطوریکه قبلا نیز اشاره شد شرط تداوم در بازارهای مالی، مدیریت سرمایه می‌باشد. با توجه به اینکه میزان سرمایه درگیر در یک سهم یا به اختصار حجم معامله، کنترل‌کننده اصلی سرمایه است، لذا دو روش برای مدیریت سرمایه استفاده می‌شود که عبارتند از مدیریت سرمایه با حجم ثابت و مدیریت سرمایه با حجم متغییر. برای سادگی، در این مقاله میزان سرمایه تخصیص داده شده به یک سهم خاص را حجم می‌نامیم که می‌دانیم برابر است با حاصلضرب تعداد برگه سهام خریداری شده در قیمت خرید.

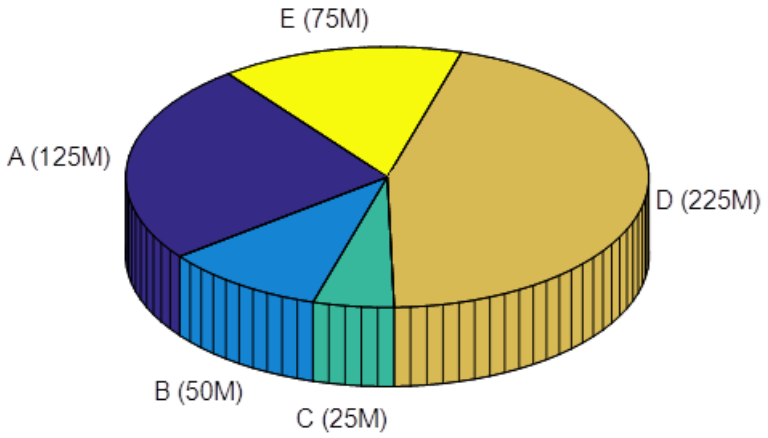
روش مدیریت سرمایه با حجم ثابت، ساده‌ترین و مناسب‌ترین روش برای سبدهای سرمایه‌گذاری کوچک می‌باشد. در این روش تنظیم مقادیر Risk و Reward می‌تواند بصورت مستقیم با تنظیم مقادیر حد ضرر و حدسود انجام گیرند. مقادیر ریسک ضرر (L) و انتظار سود (P) برای هر سفارش خرید بصورت زیر تنظیم می‌شوند

$$L = R_m \times B, \quad P = \frac{L}{R/R} \tag{۵}$$

که R_m حداکثر ریسک قابل پذیرش برای هر سفارش خرید و B بالانس حساب معامله‌گر می‌باشد. به عنوان مثال معامله‌گری با مقدار بالانس حساب ۱۰۰ میلیون تومان را در نظر بگیریم. اگر میزان ریسک به ازای هر سهم را حداکثر ۲% از کل پرتفو بگیریم (۲ میلیون تومان) و میزان ریسک کلی را نهایتا ۱۰% (۱۰ میلیون تومان) فرض کنیم در این حالت سبد پرتفو حداکثر شامل ۵ نوع سهم



شکل ۵: مدیریت سرمایه با حجم ثابت



شکل ۶: مدیریت سرمایه با حجم متغیر

(A, B, C, D, E) خواهد بود و مطابق شکل ۵ حجم خرید بطور مساوی برای سهم‌ها برابر ۲۰ میلیون تومان خواهد بود.

با فرض نسبت ریسک به ریوارد معقول (مثلا ۱/۱٫۵)، میزان انتظار سود ۳ میلیون تومان برای هر سفارش می‌باشد. به مفهوم ساده‌تر به محض اینکه ارزش دارایی‌های هر سفارش خرید انجام شده به ۱۸ میلیون تومان یا ۲۳ میلیون تومان برسد باید اقدام به فروش کرد.

روش مدیریت سرمایه با حجم متغییر کارامدتر و مناسب سبدهایی با سرمایه‌های بیشتر است (مثلا ۵۰۰ میلیون تومان) و تقریبا پیچیده‌تر از روش اول می‌باشد چرا که حجم سفارش خرید را با میزان ریسک کنترل می‌کنیم و نقطه SL هر سهمی از تحلیل‌های تکنیکالی و نقاط معتبر حمایت سهم بدست می‌آید و با توجه به شرایط مختلف هر سهمی، سبد پرتفو دارای حجم‌های متفاوت مشابه شکل ۶ خواهد بود. برای سادگی و صرفنظر از بحث‌های تکنیکالی، مقدار ۵۰۰ میلیون تومان به طور تصادفی برای ۵ سهم مفروض A, B, C, D, E تخصیص داده شده و به تصویر کشیده شده است.

مقدار ریسک ضرر برای هر سفارش خرید مطابق فرمول (۵) در این مرحله ۱۰ میلیون تومان و با R/R قبلی، سود مورد انتظار هر سفارش خرید ۱۵ میلیون تومان می‌باشد. حجم خرید هر سهم بصورت زیر محاسبه می‌گردد.

فرض کنید P_E قیمت ورود به سهم و P_{SL} قیمت سهم در نقطه حد ضرر (زیر نقطه حمایتی معتبر) باشد پارامتر r را بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$r = \frac{P_E - P_{SL}}{P_E} \qquad (۶)$$

واضح است که r افت قیمت سهام بر حسب درصد می‌باشد. حجم مناسب خرید (بر مبنای واحد پولی) مطابق رابطه زیر بدست می‌آید

$$V = \frac{L}{r} \qquad (۷)$$

برای درک ساده‌تر فرمول فوق، فرض کنید مثلا قیمت سهام A برابر ۱۰۰۰ تومان و نقطه حد ضرر از تحلیل تکنیکالی ۹۲۰ تومان باشد، مقدار افت قیمتی (r) برای این سهم برابر است با

$$r = \frac{۱۰۰۰ - ۹۲۰}{۱۰۰۰} = ۰/۰۸$$

و حجم مناسب خرید عبارت است از

$$V = \frac{۱۰,۰۰۰,۰۰۰}{۰/۰۸} = ۱۲۵,۰۰۰,۰۰۰$$

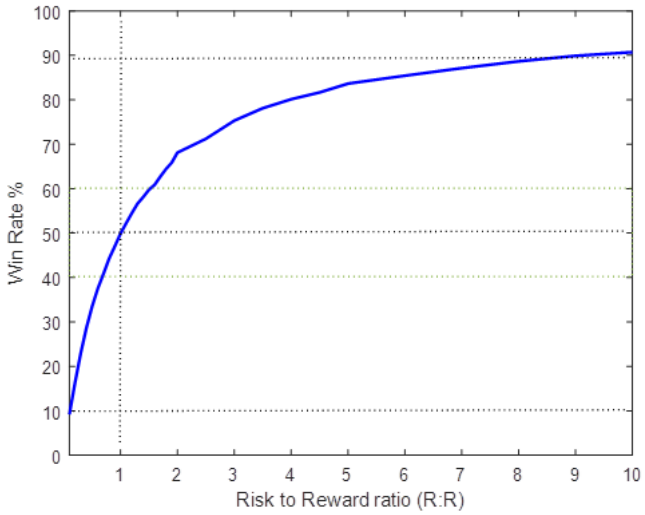
یعنی حداکثر مبلغ قابل تخصیص برای سهام A، برابر ۱۲۵ میلیون تومان می‌باشد. حال سهام B را در نظر بگیرید که قیمت خرید آن ۵۰۰ تومان و حد ضرر ۴۰۰ تومن باشد، حجم مناسب برای خرید سهم B بصورت زیر ۵۰ میلیون تومان بدست می‌آید

$$r = \frac{۵۰۰ - ۴۰۰}{۵۰۰} = ۰/۲, \quad V = \frac{۱۰,۰۰۰,۰۰۰}{۰/۲} = ۵۰,۰۰۰,۰۰۰$$

یعنی از ۵۰۰ میلیون تومان بالانس حساب، ۱۲۵ میلیون تومان به سهم A و ۵۰ میلیون به سهام B باید اختصاص داد.

۴ نتایج شبیه‌سازی‌ها

شبیه‌سازی‌های کامپیوتری با استفاده از نرم‌افزار Matlab برای ۱۰۰۰ مرتبه معامله خرید انجام شده است، اگر چه با توجه به دوطرفه بودن بازارهای جهانی، این نتایج برای معاملات فروش نیز صادق

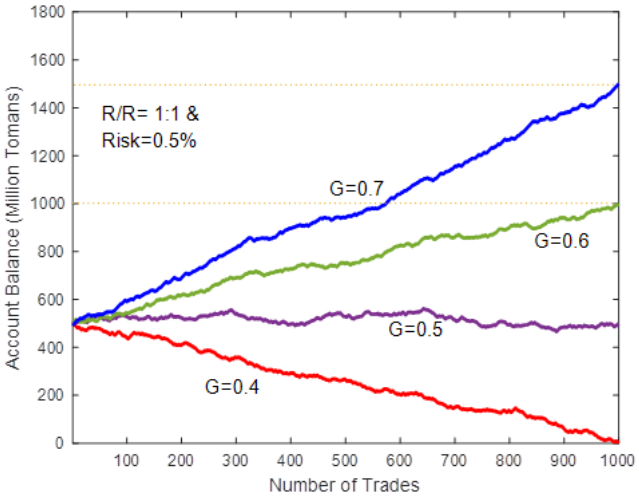


شکل ۷: منحنی نرخ برد بر حسب ریسک به ریوارد

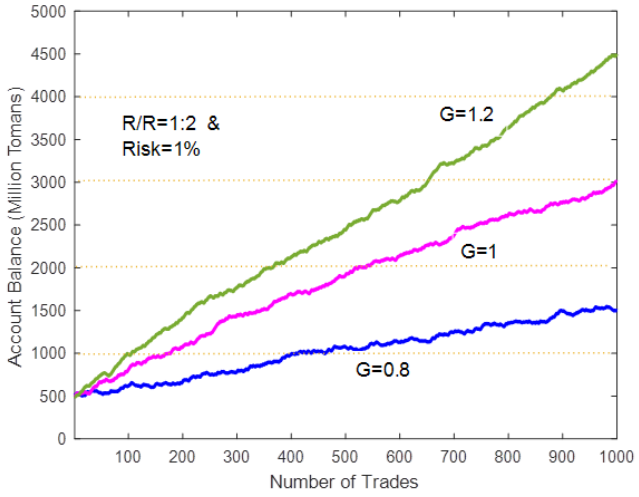
می‌باشند.

شکل ۷ منحنی نرخ برد را بر حسب R/R نشان می‌دهد. میزان ریسک به ریوارد را از ۱/۰ تا ۱۰ با گام ۱/۰ افزایش داده و در هر مرحله میزان W را بدست می‌آوریم. همانطوریکه از شکل منحنی مشخص است میزان نرخ برد با افزایش مقدار R/R افزایش پیدا می‌کند. باید این نکته را دوباره یادآوری کنیم که داشتن نرخ برد بالا برای یک معامله‌گر تنها در شرایط R/R مناسب (کوچکتر از ۱) سودمند است. شکل ۸ منحنی تغییرات بالانس حساب را به ازای ۱۰۰۰ معامله مختلف نشان می‌دهد. در این شبیه‌سازی بالانس اولیه حساب ۵۰۰ میلیون تومان، ریسک هر معامله ۵/۰ درصد (۵/۲ میلیون تومان)، و مقدار ریسک به ریوارد برابر ۱ فرض شده است. واضح است که برای $G < ۰/۵$ به مرور بالانس حساب کاهشی و بعد از ۱۰۰۰ مرتبه معامله مقدار آن صفر شده و عملا معامله‌گر کل دارایی خود را از دست می‌دهد. مقدار $G = ۰/۵$ در بلند مدت تغییری در میزان سرمایه ایجاد نمی‌کند. برای نرخ رشد ۶/۰ و ۷/۰ (بطور معادل نرخ برد ۶۰ و ۷۰ درصد)، بالانس حساب بترتیب به ۱ و ۵/۱ میلیارد تومان افزایش می‌یابد.

شکل ۹ نیز منحنی تغییرات بالانس حساب را به ازای مقدار ریسک هر سفارش ۱ درصد (۵ میلیون تومان) و نسبت ریسک به ریوارد کوچکتر از ۱ ($R/R = ۰/۵$) نشان می‌دهد. با توجه به اینکه نرخ برد در بازارهای مالی در بهترین شرایط عموما ۶۰ درصد می‌باشد لذا در این شبیه‌سازی از ۳ نرخ برد ۴۰، ۵۰، و ۶۰ درصد استفاده کردیم و نتایج را برای نرخ رشد حساب ۸/۰، ۱،و ۲/۱ بدست آورده‌ایم. نتایج حاکی از آن است انتخاب مقادیر Risk و Reward بهینه می‌تواند منجر به استراتژی سودده گردد بطوریکه حتی اگر در برآیند معاملات بازنده باشیم ($W < ۰/۵$). به ازای نرخ برد ۴/۰، بالانس حساب تا ۵/۱ میلیارد تومن افزایش می‌یابد و برای نرخ برد ۵۰ و ۶۰ درصد میزان پرتفو بترتیب به ۳ و ۵/۴ میلیارد تومان افزایش می‌یابد. بنابراین اگر چه مدیریت سرمایه یک فاکتور مهم



شکل ۸: تغییرات حساب معامله‌گر بر حسب تعداد معامله $(R/R = ۱, R_m = ۰/۰۰۵)$



شکل ۹: تغییرات حساب معامله‌گر بر حسب تعداد معامله $(R/R = ۰/۵, R_m = ۰/۰۱)$

است اما در طراحی یک استراتژی معاملاتی نمی‌تواند به تنهایی حساب معاملاتی را رشد دهد و بطور خلاصه یک استراتژی معامله‌گری خوب باید شامل یک الگوریتم معاملاتی با نرخ برد بالا و مدیریت مناسب سرمایه باشد.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل ریاضی برای محاسبه نرخ رشد پرتفو ارائه دادیم. مدل ریاضی ارائه شده به ما کمک می‌کند تا درک بهتری از طراحی استراتژی معاملاتی داشته باشیم. در این مقاله نشان دادیم که مدیریت صحیح سرمایه می‌تواند سبد سرمایه‌گذاری یک معامله‌گر را بهبود بخشد. همچنین یک

رویکرد سیستماتیک برای مدیریت سرمایه ارائه دادیم که می‌تواند در پرتفوی سرمایه گذاری پیاده‌سازی شود. در این مقاله، برای سادگی، اولا خرید و فروش سهم بصورت تک مرحله‌ای انجام می‌شود و در خرید از مارتینگل کردن و یا میانگین کم کردن و در فروش از حد سود چندمرحله‌ای صرفنظر شده است. ثانیا مقادیر ریسک و ریوارد به عنوان ضرایب ثابتی از کل پرتفوی اولیه منظور شده و از سود و ضرر مرکب استفاده نشده است و این دو مهم می‌توانند به عنوان پیشنهادات ادامه کار در پژوهش‌های آتی منظور گردند.

مراجع

[1] Singh, M. (2014), *Unlocking the World's Largest Financial Secret: 12 Keys to Forex Freedom*, Mario Singh Pte Limited.

[2] Nugroho, F. E. (2016), *Trading Otomatis Perdagangan Forex Menggunakan Metode Martingale dan Candlestick Sebagai Acuan Transaksi di Exness*, Simetris: Jurnal Teknik Mesin, Elektro dan Ilmu Komputer.

[3] Islam, M. S., et al. (2020), *A review on recent advancements in forex currency prediction*, Algorithms.

[4] Fisichella, M. and Garolla, F. (2021), *Can deep learning improve technical analysis of forex data to predict future price movements?*, IEEE Access.

[5] Bellocca, G. P., et al. (2022), *Leveraging the momentum effect in machine learning-based cryptocurrency trading*, Machine Learning with Applications.

[6] Hernandez-Aguila, A., et al. (2021), *Using fuzzy inference systems for the creation of forex market predictive models*, IEEE Access.

[7] Argotty-Erazo, M., et al. (2023), *A novel linear-model-based methodology for predicting the directional movement of the euro-dollar exchange rate*, IEEE Access.

[8] Malathong, K., Konpang, J., and Sirikham, A. (2023), *Money Management for Trading Strategies*, International Electrical Engineering Congress.

[9] Abouloula, K., EL Habil, B., and Krit, S. (2018), *Money management limits to trade by robot trader for automatic trading*, International Journal of Engineering, Science and Mathematics.

[10] Bredin, D. and Hyde, S. (2004), *Forex risk: Measurement and evaluation using value-at-risk*, Journal of Business Finance & Accounting.

[11] Cheng, G. (2007), *7 Winning Strategies for Trading Forex: Real and actionable techniques for profiting from the currency markets*, Harriman House Limited.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

استفاده از یادگیری ماشین برای پیش‌بینی موفقیت کمپین‌های بازاریابی بانکی

علی حیدری [۱] حجت امامی [۲] عباسعلی شریفی [۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی کامپیوتر- هوش مصنوعی و رباتیک، دانشگاه بناب
[۲] دانشیار گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بناب
[۳] دانشیار گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بناب

چکیده

استفاده از یادگیری ماشین برای پیش‌بینی موفقیت کمپین‌های بازاریابی بانکی با رویکرد استکینگ می‌تواند ابزار مؤثری برای تصمیم‌گیری پیش از تماس با مشتریان باشد. هرچند ویژگی مدت‌زمان تماس یکی از مؤثرترین عوامل در پیش‌بینی است، اما ازآنجاکه فقط پس از تماس در دسترس قرار می‌گیرد، کاربرد عملی محدودی دارد. حذف این ویژگی باعث کاهش نسبی عملکرد مدل‌ها می‌شود، اما نتایج نشان می‌دهد که ترکیب مدل‌ها در قالب استکینگ، دقت و قابلیت اطمینان پیش‌بینی را تا حد زیادی حفظ می‌کند و همچنان برای انتخاب هدفمند مشتریان اثربخش است.

کلمات کلیدی: یادگیری ماشین، مدل‌های پیش‌بینی، استکینگ، بهینه‌سازی آستانه احتمال، کمپین‌های بازاریابی

۱ مقدمه

تحولات فناوری اطلاعات و ظهور ابزارهای پیشرفته یادگیری ماشین راهکارهای نوینی را در حوزه بازاریابی به ارمغان آورده، یادگیری ماشین به‌عنوان یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین شاخه‌های علم داده و هوش مصنوعی، اصول و مفاهیم خاص خود را دارد. درک این اصول برای هر پژوهشگر یا حرفه‌ای که بخواهد در این زمینه کار کند ضروری است. برخی از اصول کلیدی یادگیری ماشین شامل مفاهیم پایه‌ای مانند یادگیری نظارت شده و بدون نظارت، ویژگی‌های مدل‌ها، ارزیابی عملکرد مدل‌ها و پیشگیری از بیش‌برازش است. یکی از منابع برجسته که به بررسی این اصول و مفاهیم پرداخته است، مقاله ارائه شده در مرجع [۱] به طور جامع مفاهیم کلیدی یادگیری ماشین و چالش‌های اصلی در این حوزه را بررسی می‌کند.

[1] a.heydari@ubonab.ac.ir
[2] emami@ubonab.ac.ir
[3] sharifi@ubonab.ac.ir

در پژوهش‌های پیشین، بسیاری از مطالعات از مجموعه داده بانک مارکتینگ برای تحلیل رفتار مشتریان و پیش‌بینی موفقیت کمپین‌های بازاریابی استفاده کرده‌اند. یکی از شناخته‌شده‌ترین چالش‌ها در این زمینه، استفاده از ویژگی مدت زمان تماس به‌عنوان یکی از مهم‌ترین عوامل مؤثر بر دقت مدل‌ها بوده است؛ به‌عنوان مثال، در مطالعات Moro و همکاران [۲] و همچنین Siqueira و همکاران [۳] تأثیر این ویژگی در افزایش دقت مدل‌ها مورد تأکید قرار گرفته اما در عین حال به غیرعملی بودن استفاده از آن در سناریوهای پیش‌بینی قبل از تماس اشاره شده است و مطالعه Yusen Wu [۴] نیز به ارزیابی مدل‌های یادگیری ماشین در پیش‌بینی موفقیت کمپین‌های بازاریابی بانکی پرداخته است و نتایج آن نشان می‌دهد که ویژگی‌هایی مانند سن و نوع ارتباط با بانک نیز از عوامل مهم در پیش‌بینی موفقیت کمپین‌های بازاریابی هستند.

در بخش‌های مختلف این مقاله مجموعه داده بانک مارکتینگ و چالش‌های مرتبط با آن، روش‌شناسی، شامل پیش‌پردازش داده‌ها و مدل‌سازی و در نهایت به تحلیل نتایج و یافته‌ها مورد بحث و نتیجه‌گیری قرار خواهد گرفت.

۲ روش پیشنهادی

۱.۲ جمع‌آوری داده

در این پژوهش، جمع‌آوری داده بر پایهٔ مجموعه‌داده‌های مرتبط با بانکداری و بازاریابی صورت‌گرفته است. این داده‌ها معمولاً شامل اطلاعاتی دربارهٔ مشتریان، تعاملات آن‌ها با خدمات بانکی، کمپین‌های بازاریابی و دیگر ویژگی‌های مرتبط هست؛ داده‌ها می‌توانند از منابع مختلفی مانند پایگاه‌های دادهٔ بانک‌ها، سیستم‌های مدیریت ارتباط با مشتری[۱]، نظرسنجی‌های مشتریان و گزارش‌های تحلیلی استخراج شوند. دقت در جمع‌آوری داده و اطمینان از صحت و کیفیت آن، نقش کلیدی در بهبود نتایج مدل‌های یادگیری ماشین ایفا می‌کند؛ بنابراین، پس از این مرحله، داده‌ها تحت فرایند پاک‌سازی و پیش‌پردازش قرار می‌گیرند تا اطمینان حاصل شود که هیچ‌گونه نویز، دادهٔ پرت یا مقادیر گمشده‌ای وجود ندارد که بتواند بر تحلیل‌های نهایی تأثیر منفی بگذارد.

۲.۲ پیش‌پردازش داده‌ها

داده‌های خام ارائه شده در مجموعه داده بانک مارکتینگ برای استفاده در مدل‌های یادگیری ماشین نیازمند آماده‌سازی و پیش‌پردازش هستند لازم به ذکر است برخی پیش‌پردازش‌ها فقط برای افزایش کارایی در حالت بعد از حذف ویژگی مدت‌زمان تماس در نظر گرفته شده است که در ادامه اشاره خواهد شد.

[۱] CRM

۳.۲ مدل‌های یادگیری ماشین

برای بررسی عملکرد مدل‌های یادگیری ماشین از هفت مدل شامل رگرسیون لجستیک [۵]، رگرسیون ریج [۶]، جنگل تصادفی [۷]، LightGBM [۸] و گرادیان افزایشی [۹] استفاده شده است. این مدل‌ها به دلیل توانایی بالا در پیش‌بینی و تطبیق با داده‌های پیچیده در مسائل طبقه‌بندی انتخاب شده‌اند.

مدل‌سازی در دو حالت با و بدون ویژگی مدت‌زمان تماس در مجموعه داده بانک مارکتینگ انجام شده و در حقیقت برای هر حالت مدل‌ها جداگانه آموزش‌داده‌شده‌اند و هدف این است که کاهش دقت یا تغییرات دیگر در معیارهای عملکردی اندازه‌گیری شود و درنهایت مدل‌های بدون ویژگی مدت‌زمان تماس به‌صورت استکینگ ترکیب کردیم.

تنظیم آستانه احتمال یکی از روش‌های بهینه‌سازی مدل‌ها برای بهبود عملکرد آن‌ها است که این فرایند شامل انتخاب یک آستانه خاص برای تصمیم‌گیری در مورد کلاس‌های پیش‌بینی شده است، ما این عدد را با آزمایش تعداد زیادی از اعداد به‌عنوان آستانه احتمال به دست آوردیم و این مورد هرچند اندک ولی در پیش‌بینی موفقیت تماس‌های می‌تواند باعث بهبود دقت و توانایی مدل شود.

۳ آزمایش‌ها و بحث

برای ارزیابی عملکرد مدل از تکنیک K-Fold Cross-Validation استفاده شده است [۱۰]. مجموعه داده به K بخش مساوی تقسیم گردید ($K = ۵$) طی هر تکرار یکی از بخش‌ها به عنوان مجموعه اعتبارسنجی و باقی بخش‌ها به عنوان مجموعه آموزش در نظر گرفته می‌شود که این فرآیند به اندازه K بار تکرار شد تا هر بخش یک بار به عنوان مجموعه اعتبارسنجی استفاده شود. در نهایت میانگین نتایج حاصل از این ۵ تکرار به عنوان عملکرد کلی مدل گزارش گردید استفاده از این روش به منظور کاهش واریانس در ارزیابی مدل و اطمینان از تعمیم پذیری نتایج صورت گرفته است و برای ارزیابی عملکرد مدل‌ها از معیارهایی همچون دقت[۲]، دقت مثبت[۳]، یادآوری[۴] و امتیاز F1 استفاده شده است که این معیارها به صورت میانگین در طول تکرارهای 5-Fold محاسبه شده و برای مقایسه و تحلیل نتایج مدل‌های مختلف مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

همان‌طور که در **جدول ۱** مشاهده می‌شود، که در حضور ویژگی مدت زمان تماس مدل‌های پیشرفته مانند LightGBM و GBC عملکرد بالایی در پیش‌بینی موفقیت تماس دارند و مدل LightGBM با دقت 0.9066 و AUC برابر 0.9281 بهترین نتیجه را داشته است که این عملکرد بالا تا حد زیادی ناشی از نقش کلیدی مدت‌زمان تماس در پیش‌بینی می‌باشد.

براساس **جدول ۲** که بدون ویژگی مدت زمان تماس اجرا شده، افت محسوسی در عملکرد تمامی مدل‌ها مشاهده می‌شود ولی با این‌حال مدل‌هایی مانند LightGBM و GBC همچنان نتایج قابل قبولی

[۲] Accuracy
[۳] Precision
[۴] Recall

جدول ۱: عملکرد مدل‌های یادگیری ماشین با حضور ویژگی مدت‌زمان تماس

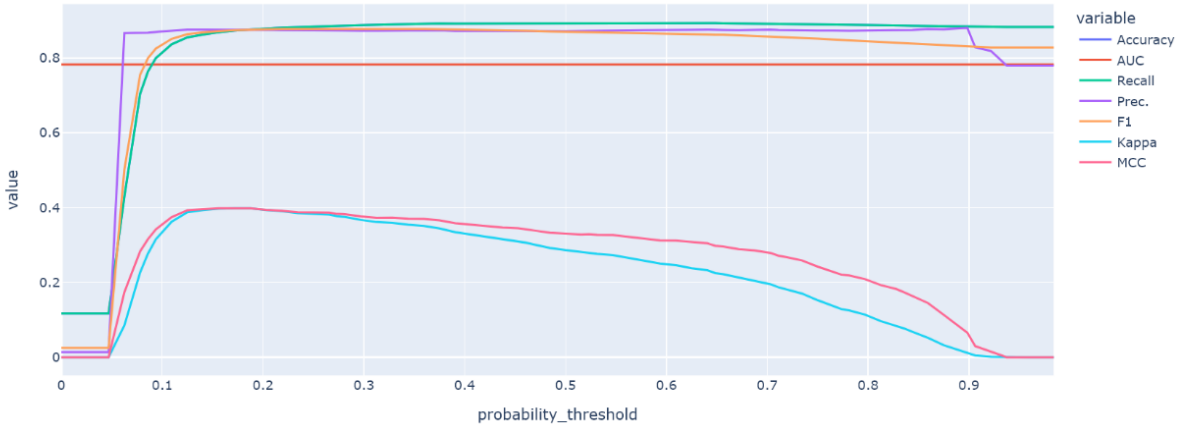
Model	Accuracy	AUC	Recall	Prec.	F1	Kappa	MCC	TT (Sec)
lightgbm	0.9066	0.9281	0.9066	0.8973	0.9001	0.4879	0.4954	1.7720
gbc	0.9041	0.9196	0.9041	0.8918	0.8943	0.4463	0.4611	4.7180
rf	0.9025	0.9216	0.9025	0.8886	0.8903	0.4182	0.4390	4.2540
lr	0.9004	0.8980	0.9004	0.8849	0.8860	0.3895	0.4153	4.9040
ridge	0.8996	0.9024	0.8996	0.8831	0.8809	0.3505	0.3901	0.6280

جدول ۲: عملکرد مدل‌های یادگیری ماشین بدون ویژگی مدت‌زمان تماس

Model	Accuracy	AUC	Recall	Prec.	F1	Kappa	MCC	TT (Sec)
lr	0.8929	0.7408	0.8929	0.8731	0.8630	0.2294	0.2974	5.2720
lightgbm	0.8928	0.7817	0.8928	0.8716	0.8712	0.2931	0.3329	1.6860
gbc	0.8927	0.7731	0.8927	0.8711	0.8677	0.2661	0.3163	4.2440
ridge	0.8925	0.7419	0.8925	0.8711	0.8650	0.2457	0.3039	0.6780
rf	0.8924	0.7641	0.8924	0.8705	0.8694	0.2799	0.3232	4.1140

ارائه داده‌اند و این موضوع نیاز به اعمال بهینه سازی را نشان میدهد و با توجه به افتی که پس از حذف ویژگی مدت زمان بوجود آمد، مدل های جدول ۲ را استک کردیم و برای بهینه سازی آستانه احتمال آن را با مقادیر مختلف آستانه احتمال بررسی کردیم که نمودار زیر مربوط به آن است. طبق نمودار ۱، لازم به ذکر است که مقدار Accuracy تقریبا با مقدار Recall هم‌راستا است. طبق نمودار بهترین آستانه احتمال مقدار 0.546875 و نتایج آن در جدول ۳ آمده است. با مقایسه نتایج جداول ۱ و ۲ مشاهده می‌شود که حذف ویژگی مدت‌زمان تماس باعث افت در عملکرد مدل‌ها شده است. به‌ویژه، مدل LightGBM در حضور این ویژگی، دقت بالاتری نسبت به حالت بدون آن ارائه کرده است. این کاهش عملکرد در سایر مدل‌ها نیز قابل مشاهده است. بر اساس جدول ۳ عملکرد مدل استک شده در شرایط حذف ویژگی مدت‌زمان تماس

همانطور که مشاهده می‌شود، میانگین دقت برابر با 89.43% و میانگین AUC برابر با 78.28% به دست آمده است. همچنین معیار یادآوری با مقدار میانگین 89.43% نشان‌دهنده‌ی توانایی بالای مدل در شناسایی نمونه‌های مثبت است و نزدیک بودن مقادیر دقت و یادآوری بیانگر تعادل مناسب مدل در تشخیص نمونه‌های مثبت و منفی می‌باشد. علاوه بر این، با توجه به مقادیر Kappa و MCC، عملکرد مدل در مواجهه با عدم تعادل داده‌ها نیز قابل قبول ارزیابی می‌شود. شایان ذکر است که نتایج بر اساس اعتبارسنجی K-Fold محاسبه شده‌اند و انتظار می‌رود که در آموزش نهایی روی کل داده‌ها نتایج بهتری حاصل شود.



شکل ۱ : بررسی تأثیر آستانه‌های مختلف احتمال بر دقت و یادآوری در حالت بدون ویژگی مدت‌زمان تماس

جدول ۳: عملکرد مدل استک شده در حالت بدون ویژگی مدت‌زمان تماس

Fold	Accuracy	AUC	Recall	Prec.	F1	Kappa	MCC
0	0.8921	0.7857	0.8921	0.8699	0.8689	0.2770	0.3205
1	0.8908	0.7719	0.8908	0.8672	0.8640	0.2428	0.2946
2	0.8943	0.7830	0.8943	0.8745	0.8679	0.2630	0.3212
3	0.8954	0.7812	0.8954	0.8766	0.8699	0.2750	0.3328
4	0.8987	0.7921	0.8987	0.8829	0.8751	0.3068	0.3644
Mean	0.8943	0.7828	0.8943	0.8742	0.8692	0.2729	0.3267
Std	0.0027	0.0066	0.0027	0.0055	0.0036	0.0208	0.0226

۴ نتیجه گیری

این پژوهش به بررسی کاربرد یادگیری ماشین در پیش‌بینی موفقیت کمپین‌های بازاریابی بانکی پرداخته و تأثیر حذف ویژگی مدت‌زمان تماس را مورد ارزیابی قرار داده است. نتایج نشان می‌دهد که اگرچه حذف این ویژگی منجر به کاهش نسبی دقت مدل‌ها می‌شود، اما با استفاده از رویکرد استکینگ و تنظیم آستانه احتمال، می‌توان تا حد زیادی عملکرد پیش‌بینی را حفظ کرد. این یافته‌ها می‌توانند به بهبود تصمیم‌گیری در مراحل اولیه کمپین‌های بازاریابی بانکی کمک کنند و راه را برای تحقیقات آینده در این حوزه هموار سازند. برخی از کارهای آتی این پژوهش عبارت‌انداز: استفاده از مدل‌های پیشرفته‌تر مانند Deep Learning یا AutoML برای بررسی تأثیر حذف مدت‌زمان تماس، آزمون روش‌های داده‌افزایی (Data Augmentation) برای مقابله با عدم تعادل داده‌ها، و استفاده از تکنیک‌های XAI برای تحلیل اینکه کدام ویژگی‌ها بیشترین تأثیر را بعد از حذف مدت‌زمان تماس دارند.

مراجع

[1] Domingos, P. (2012), *A Few Useful Things to Know About Machine Learning*, Communications of the ACM.

[2] Moro, P., Laureano, R., and Cortez, P. (2011), *Using Data Mining for Bank Direct Marketing: An Application of the CRISP-DM Methodology*, in Proceedings of the European Simulation and Modelling Conference.

[3] Siqueira, R., Santos, C., and Carvalho, F. (2018), *A Comparative Study of Data Mining Techniques for Predicting the Success of Bank Telemarketing*, Expert Systems with Applications.

[4] Wu, Y. (2022), *Machine Learning Approaches for Retail Bank Marketing Practice*, BCP Business & Management, vol. 23, pp. 931-937, doi: 10.54691/bcpbm.v23i.1475.

[5] Hosmer, D. and Lemeshow, S. (2004), *Applied Logistic Regression.*

[6] Hoerl, A. and Kennard, R. (2012), *Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems*, Technometrics, vol. 12, pp. 55-67, doi: 10.1080/00401706.1970.10488634.

[7] Breiman, L. (2001), *Random Forests*, Machine Learning, vol. 45, no. 1, pp. 5-32, doi: 10.1023/A:1010933404324.

[8] Ke, G. et al. (2017), *LightGBM: A Highly Efficient Gradient Boosting Decision Tree.*

[9] Friedman, J. (2000), *Greedy Function Approximation: A Gradient Boosting Machine*, The Annals of Statistics, vol. 29, doi: 10.1214/aos/1013203451.

[10] Brownlee, J. (2020), *A Gentle Introduction to k-fold Cross-Validation.*

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

یک روش شبه‌نیوتن حافظه محدود با شروع اولیه مبتنی بر یک الگوریتم گرادیان تطبیقی برای حل مسائل بهینه‌سازی مقیاس بزرگ

زهرا مهدور [۱] مسعود فاطمی [۲]

[۱,۲] گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

چکیده

در این مقاله، نسخه‌ی حافظه محدود از یک الگوریتم شبه‌نیوتنی مبتنی بر شرط تطابق مقدار تابع، معرفی و پیاده‌سازی شده است. هدف اصلی، ارائه روشی کارا و مقیاس‌پذیر برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید با مقیاس بزرگ است. به‌منظور دستیابی به تخمین اولیه مناسب، در تکرار نخست از یک روش گرادیان تطبیقی بهره گرفته می‌شود و در ادامه نسخه حافظه محدود الگوریتم پیشنهادی به‌کار گرفته می‌شود. عملکرد روش پیشنهادی بر روی مجموعه‌ای از توابع آزمون استاندارد و نیز مسئله رگرسیون لجستیک با مجموعه داده MNIST ارزیابی شده است. نتایج عددی نشان می‌دهند که الگوریتم ارائه شده در مقایسه با روش‌های مرسوم مانند L-BFGS، Adam و SGD از لحاظ دقت و سرعت همگرایی عملکرد بهتری داشته و در حل مسائل بهینه‌سازی مقیاس بزرگ مؤثر و قابل اتکا است.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی نامقید، شبه‌نیوتن، حافظه محدود، یادگیری ماشین

۱ مقدمه

با رشد فزاینده‌ی حجم داده‌ها و پیچیدگی مدل‌ها، بهینه‌سازی در مقیاس بزرگ به یکی از چالش‌های اساسی در یادگیری ماشین تبدیل شده است. در بسیاری از مسائل یادگیری ماشین، فرآیند آموزش مدل را می‌توان به‌صورت یک مسئله‌ی بهینه‌سازی فرموله کرد که طی آن هدف کمینه‌سازی یک تابع هزینه تعریف‌شده بر پایه‌ی داده‌های آموزشی است. این تابع معمولاً به‌شکل میانگینی از توابع زیان به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$F(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} f_i(\mathbf{x}),$$

[1] zahra.mahdevar@email.kntu.ac.ir
[2] smfatemi@kntu.ac.ir

که در آن $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ بردار پارامترهای مدل یادگیری را نشان می‌دهد و $f_i(\mathbf{x})$ تابع زیانی است که کیفیت پیش‌بینی مدل را برای نمونه‌ی iـام ارزیابی می‌کند. به‌طور خاص، $f_i(\mathbf{x})$ به‌صورت:

$$f_i(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f\left(\mathbf{x}; (\mathbf{u}_i, y_i)\right) \mid \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^n,\ y_i \in \mathbb{R} \right\},$$

تعریف می‌شود. برای مثال در رگرسیون لجستیک که به‌صورت:

$$f_i(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \log\left(1 + \exp(-y_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{x})\right), \qquad (1)$$

تعریف می‌شود، تابع زیان دارای ساختاری محدب و هموار است و امکان فرمول‌بندی مسئله‌ی آموزش را به‌صورت یک مسئله‌ی بهینه‌سازی محدب و نامقید فراهم می‌سازد.

حل این دسته از مسائل بهینه‌سازی، به‌ویژه در مقیاس بزرگ، با چالش‌های محاسباتی قابل‌توجهی همراه است. روش‌های کلاسیک نظیر روش گرادیان نزولی و نیوتن، هرچند از لحاظ نظری قدرتمند هستند اما در عمل به‌دلیل هزینه‌ی محاسبه‌ی گرادیان به‌صورت کامل یا ماتریس هسی ناکارآمد تلقی می‌شوند[۵]. به همین دلیل، روش‌های کارآمدتری مانند گرادیان نزولی تصادفی (SGD) معرفی و توسعه داده شده‌اند که با استفاده از نمونه‌های تصادفی، به‌روزرسانی‌های کم‌هزینه‌تری ارائه می‌دهند، اما نرخ همگرایی پایین و حساسیت بالا نسبت به نوسانات نمونه‌ای، از جمله محدودیت‌های این روش‌ها است.

در سال‌های اخیر، تمرکز پژوهش‌ها بر توسعه‌ی الگوریتم‌های بهینه‌سازی عددی کارآمد بوده است که بتوانند بین هزینه‌ی محاسباتی پایین و سرعت همگرایی بالا تعادل ایجاد کنند. در این راستا دو رویکرد اصلی مورد توجه قرار گرفته‌اند:

- روش‌های کاهش واریانس مانند SVRG [۲] و SAGA [۷] که با بهره‌گیری از ترکیب تصادفی و اطلاعات حافظه‌ای، نرخ همگرایی بهتری نسبت به SGD ارائه می‌دهند.
- روش‌های شبه‌نیوتنی که با تخمین ماتریس معکوس هسی، امکان به‌روزرسانی‌های دقیق‌تر را فراهم می‌کنند.

الگوریتم‌های شبه‌نیوتنی به‌ویژه خانواده BFGS، از روش‌های مؤثر برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید هستند. این روش‌ها به دلیل تخمین مناسب ماتریس هسی، از همگرایی سریع و دقت بالا برخوردارند. با این حال، پیاده‌سازی نسخه‌ی کلاسیک BFGS در مسائل با تعداد متغیرهای زیاد به دلیل نیاز به حافظه زیاد و پیچیدگی محاسباتی، مناسب نیست. برای رفع این مشکل، نسخه حافظه محدود BFGS (L-BFGS) در [۶] معرفی شده است.

از سوی دیگر، در مقاله‌ی [۸]، نسخه‌ای اصلاح‌شده از روش BFGS معرفی شده است که به‌جای اتکا به شرط تطابق گرادیان، از شرط تطابق مقدار تابع بهره می‌گیرد. در این پژوهش، این رویکرد را در قالب یک الگوریتم حافظه محدود توسعه می‌دهیم و با بهره‌گیری از شروع اولیه مبتنی بر یک روش گرادیان تطبیقی، کارایی آن را در حل مسائل بهینه‌سازی در مقیاس بزرگ بهبود می‌بخشیم.

عملکرد الگوریتم پیشنهادی، ابتدا بر روی مسائل استاندارد بهینه‌سازی عددی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در ادامه برای حل مسئله‌ی رگرسیون لجستیک در مقیاس بزرگ، به بررسی چالش‌های موجود در به‌کارگیری مستقیم روش‌های شبه‌نیوتنی می‌پردازیم. با وجود موفقیت روش L-BFGS در مسائل کلاسیک بهینه‌سازی، استفاده‌ی مستقیم از آن در مسائل یادگیری ماشین با محدودیت‌هایی مواجه است؛ از جمله نیاز به حافظه‌ی بالا برای ذخیره‌ی بردارها و حساسیت زیاد نسبت به نویز تصادفی حاصل از گرادیان‌های تخمینی.

برای غلبه بر این چالش‌ها، نسخه‌های تصادفی از روش‌های شبه‌نیوتنی توسعه یافته‌اند. به عنوان مثال، روش SQN [۱] (Stochastic-Quasi-Newton) با به‌روزرسانی دوره‌ای ماتریس هسی از طریق گرادیان‌های محاسبه‌شده بر مبنای زیرمجموعه‌های نسبتاً بزرگ از داده‌ها و با بهره‌گیری از پیش‌شرطی‌سازی، سعی دارد تخمینی پایدارتر از هسی ارائه داده و اثرات نویز را کاهش دهد. همچنین، روش SLBFGS [۴] با ترکیب نمونه‌برداری تصادفی و نگهداری تعداد محدودی از بردارهای تفاضل گرادیان و پارامتر، نسخه‌ای کم‌هزینه و مقیاس‌پذیر از L-BFGS را ارائه می‌دهد که برای مسائل یادگیری ماشین با داده‌های حجیم مناسب‌تر است.

در همین راستا، ما نیز برای ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی، نسخه‌ای تصادفی از آن را برای حل مسئله‌ی رگرسیون لجستیک روی مجموعه داده‌ی استاندارد MNIST پیاده‌سازی می‌کنیم. هدف از این آزمایش، بررسی توانایی الگوریتم در مدیریت داده‌های با ابعاد بالا و نویز تصادفی است؛ به‌ویژه در شرایطی که استفاده از اطلاعات هسی به‌صورت دقیق ممکن نیست. نسخه‌ی تصادفی طراحی‌شده، با بهره‌گیری از تکنیک‌های به‌روزرسانی حافظه محدود و انتخاب زیرمجموعه‌های تصادفی از داده‌ها، تلاش می‌کند ضمن حفظ دقت تخمین، از پیچیدگی محاسباتی بکاهد و همگرایی سریعتری نسبت به روش‌های پایه حاصل کند.

یافته‌های تجربی نشان می‌دهند که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با روش‌های متداولی نظیر L-BFGS، Adam[۳] و SGD از همگرایی سریع‌تر و پایدارتری برخوردار بوده و در مسائل بهینه‌سازی مقیاس بزرگ عملکرد بهتری ارائه می‌دهد.

در ادامه، ابتدا الگوریتم پیشنهادی را معرفی می‌کنیم و در گام بعد عملکرد آن را از طریق آزمایش‌های عددی بر روی مجموعه‌ای از مسائل بهینه‌سازی کلاسیک و همچنین مسئله‌ی رگرسیون لجستیک بر پایه‌ی مجموعه داده‌ی MNIST مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

۲ الگوریتم پیشنهادی

۱.۲ مروری بر روش شبه‌نیوتنی ارائه شده توسط Yuan

روش‌های شبه‌نیوتنی از جمله رویکردهای مؤثر و پرکاربرد در حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی به‌شمار می‌روند. این دسته از الگوریتم‌ها با بهره‌گیری از اطلاعات انحنای مرتبه دوم، به تسریع روند همگرایی کمک می‌کنند. برخلاف روش نیوتن که مستلزم محاسبه‌ی دقیق ماتریس هسی است، در روش‌های

شبه‌نیوتنی این ماتریس به‌صورت تقریبی و تدریجی به‌روزرسانی می‌شود؛ ویژگی که آنها را به گزینه‌ای مناسب برای مسائل با مقیاس بزرگ تبدیل می‌کند.

در این میان، یکی از نسخه‌های اصلاح‌شده‌ی روش شبه‌نیوتن توسط یوان (Yuan) معرفی شده است. در این روش، جهت جستجو $\mathbf{p}_k$ از طریق حل زیرمسئله

$$\min_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^d} \Psi_k(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{p}^T\nabla f(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}\mathbf{p}^T B_k\mathbf{p},$$

به‌دست می‌آید که یک تقریب مرتبه دوم از تابع هدف در همسایگی نقطه‌ی فعلی $\mathbf{x}_k$ را ارائه می‌دهد. این تقریب شامل گرادیان و یک ماتریس متقارن و معین مثبت B_k است. برخلاف شرط secant در روش BFGS که بر برابری گرادیان‌ها در نقاط متوالی تکیه دارد، روش یوان بر پایه‌ی یک شرط درون‌یابی تابع طراحی شده است؛ به‌طوری‌که مقدار تقریب درجه دوم در جهت جستجو برابر با مقدار تابع اصلی در نقطه‌ی جاری باشد، به عبارت دیگر:

$$\Psi_k(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k).$$

با توجه به عبارت بالا به‌روزرسانی ماتریس تقریب هسی در این حالت به‌صورت:

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k\mathbf{s}_k\mathbf{s}_k^T B_k}{\mathbf{s}_k^T B_k\mathbf{s}_k} + t_k\frac{\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k^T}{\mathbf{s}_k^T\mathbf{y}_k},$$

است که نسخه‌ای اصلاح‌شده از رابطه‌ی BFGS می‌باشد و در آن

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{y}_k = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_k),$$

است. همانطور که مشاهده می‌کنیم این فرمول شامل ضریبی به‌صورت:

$$t_k = \frac{2}{\mathbf{s}_k^T\mathbf{y}_k}[f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{s}_k^T\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})], \qquad (2)$$

است که به‌گونه‌ای تعریف می‌شود تا تضمین کند ماتریس جدید همچنان معین مثبت باقی بماند. این شرط تنها زمانی برقرار است که مقدار t_k در یک بازه‌ی مناسب مانند $[0, 2]$ انتخاب شود.

در حل مسائل غیرخطی عمومی، تعیین طول گام مناسب معمولاً مستلزم بررسی شرایط ولف [۵] است. در این مقاله، برای یافتن طول گام سازگار با این شرایط، از یک الگوریتم کارآمد جستجوی دودویی بهره گرفته‌ایم تا علاوه بر دقت، از نظر محاسباتی نیز بهینه عمل کنیم.

۲.۲ نسخه حافظه محدود الگوریتم

در بهینه‌سازی غیرخطی، استفاده از تقریب معکوس ماتریس هسی به‌جای خود ماتریس، به‌عنوان رویکردی مؤثر و کارآمد شناخته شده است. این رویکرد به‌ویژه در حل مسائل بهینه‌سازی مقیاس بزرگ

و دارای ساختار پیچیده، نقش کلیدی ایفا می‌کند. در این راستا، نسخه‌ای از الگوریتم Yuan طراحی می‌کنیم که به‌جای استفاده‌ی مستقیم از ماتریس هسی، با تقریب معکوس آن کار می‌کند. این تقریب به‌صورت بازگشتی و با بهره‌گیری از فرمول Sherman–Morrison–Woodbury [۵] به‌روزرسانی می‌شود. فرمول به‌روزرسانی این ماتریس به‌شکل زیر بیان می‌شود

$$H_{k+1} = (I - \rho_k \mathbf{s}_k \mathbf{y}_k^T) H_k (I - \rho_k \mathbf{y}_k \mathbf{s}_k^T) + \frac{\rho_k}{t_k} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T.$$

یکی از چالش‌های اصلی روش‌های شبه‌نیوتنی خصوصاً در مسائل مقیاس بزرگ، نیاز بالای آنها به حافظه برای ذخیره‌سازی ماتریس‌های هسی یا معکوس آن است. برای رفع این محدودیت مشابه روش BFGS حافظه محدود، نسخه‌ی حافظه محدودی از این الگوریتم ارائه می‌دهیم. در این نسخه، تنها تعداد محدودی از بردارهای $\mathbf{s}_k$ و $\mathbf{y}_k$ نگهداری می‌شود. این رویکرد با وجود کاهش قابل توجه در مصرف حافظه و هزینه‌های محاسباتی، موجب حفظ کارایی الگوریتم در مقایسه با روش‌هایی نظیر گرادیان نزولی یا الگوریتم‌های تطبیقی مانند Adam می‌گردد، بدون آنکه کاهش چشمگیری در دقت یا سرعت همگرایی مشاهده شود.

با این وجود، حتی در این نسخه، محاسبه معکوس هسی و ضرب آن در گرادیان می‌تواند پرهزینه باشد. در مسائل مقیاس بزرگ، این عملیات باعث افزایش پیچیدگی محاسباتی و کاهش بهره‌وری می‌شود. برای مقابله با این مشکل، به جای محاسبه کامل معکوس هسی، از حاصل‌ضرب ماتریس‌ـ بردار به‌صورت تقریبی استفاده می‌کنیم. این حاصل‌ضرب با بهره‌گیری از اطلاعات گرادیان و جفت بردارهای $\mathbf{s}_k$ و $\mathbf{y}_k$ از چند تکرار اخیر محاسبه می‌شود. این رویکرد نه‌تنها مصرف حافظه و زمان اجرا را کاهش می‌دهد، بلکه موجب بهبود سرعت و دقت فرآیند بهینه‌سازی نیز می‌گردد.

شبه‌کد نسخه حافظه محدود در الگوریتم زیر ارائه شده است.

الگوریتم دو حلقه بازگشتی برای محاسبه نسخه حافظه محدود روش مطرح شده

ورودی ∇f_k، t_k، جفت بردارهای $\{\mathbf{s}_i, \mathbf{y}_i\}$ برای $i = k-1, \ldots, k-M$، و اندازه حافظه M.

گام ۱ مقدار اولیه زیر را قرار دهید:

$$\mathbf{q} \leftarrow \nabla f_k.$$

گام ۲ برای $i = k-1, k-2, \ldots, k-M$ مراحل زیر را انجام دهید:

$$\alpha_i \leftarrow \rho_i \, \mathbf{s}_i^\top \mathbf{q},$$
$$\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} - \alpha_i \mathbf{y}_i,$$

که در آن $\rho_i = \frac{1}{\mathbf{y}_i^\top \mathbf{s}_i}$.

گام ۳ مقدار اولیه بردار $\mathbf{r}$ را محاسبه کنید:

$$\mathbf{r} \leftarrow H_k^{\cdot}\mathbf{q}.$$

معمولاً $H_k^{\cdot} = \gamma_k I$ است و γ_k به‌صورت مناسبی تعیین می‌شود.

گام ۴ برای $i = k-M, k-M+۱, \ldots, k-۱$ مراحل زیر را انجام دهید:

$$\beta \leftarrow \rho_i \, \mathbf{y}_i^{\top}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r} + \mathbf{s}_i(\frac{\alpha_i}{t_k} - \beta).$$

گام ۵ نتیجه نهایی: $H_k \nabla f_k = \mathbf{r}$.

اکنون با تکیه بر این الگوریتم پایه، نسخه بهبودیافته و تطبیقی از الگوریتم شبه‌نیوتنی را ارائه می‌کنیم که با عنوان «الگوریتم حافظه محدود Yuan با مقداردهی اولیه تطبیقی» (Adaptive-Initialized L-Yuan) شناخته می‌شود. این الگوریتم با ترکیب مزایای روش‌های مبتنی بر گرادیان‌های لحظه‌ای مانند Adm و استفاده دوره‌ای از تقریب‌های هسی از طریق الگوریتم دو حلقه بازگشتی فوق، تلاش می‌کند تا پایداری و سرعت همگرایی روش‌های مرتبه دوم را با سادگی و انعطاف‌پذیری روش‌های مرتبه اول ترکیب کند.

الگوریتم حافظه محدود Yuan با مقداردهی اولیه تطبیقی AI-L-Yuan

ورودی تابع هدف $f(\mathbf{x})$، نرخ یادگیری α، نرخ‌های کاهش نمایی $\beta_۱, \beta_۲ \in [۰, ۱)$، مقدار اولیه $\mathbf{x}_۰$، بردار گرادیان اولیه $\mathbf{g}_۰ = ۰$ و اندازه حافظه M.

گام ۰. مقداردهی اولیه زیر را انجام دهید:

$$\mathbf{m}_۰ \leftarrow ۰, \quad \mathbf{v}_۰ \leftarrow ۰, \quad k \leftarrow ۰, \quad S \leftarrow [\,], \quad Y \leftarrow [\,], \quad H \leftarrow I.$$

گام ۲ تکرار اول را به‌صورت زیر انجام دهید و سپس به گام ۳ بروید.

۱. افزایش گام تکرار:

$$k \leftarrow k + ۱.$$

۲. محاسبه گرادیان:

$$\mathbf{g}_k \leftarrow \nabla f(\mathbf{x}_k).$$

۳. به‌روزرسانی میانگین متحرک درجه اول:

$$\mathbf{m}_k \leftarrow \beta_۱ \mathbf{m}_{k-۱} + (۱ - \beta_۱)\mathbf{g}_k.$$

۴. به‌روزرسانی میانگین متحرک درجه دوم:

$$\mathbf{v}_k \leftarrow \beta_۲ \mathbf{v}_{k-۱} + (۱ - \beta_۲)\mathbf{g}_k^۲.$$

۵. عبارات تصحیح:

$$\hat{\mathbf{m}}_k \leftarrow \frac{\mathbf{m}_k}{۱ - \beta_۱^k}, \qquad \hat{\mathbf{v}}_k \leftarrow \frac{\mathbf{v}_k}{۱ - \beta_۲^k}.$$

۶. به‌روزرسانی پارامترها:

$$\mathbf{x}_k \leftarrow \mathbf{x}_{k-۱} - \alpha H \frac{\hat{\mathbf{m}}_k}{\sqrt{\hat{\mathbf{v}}_k} + \epsilon}.$$

گام ۳ تا زمانی که معیار همگرایی برآورده نشده است، مراحل زیر را تکرار کنید:

۱. افزایش گام تکرار:

$$k \leftarrow k + ۱.$$

۲. محاسبه گرادیان:

$$\mathbf{g}_k \leftarrow \nabla f(\mathbf{x}_k).$$

۳. محاسبه جفت بردارهای تفاضل:

$$\mathbf{s}_k \leftarrow \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-۱}, \qquad \mathbf{y}_k \leftarrow \mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-۱}.$$

۴. اگر طول لیست S برابر M باشد، قدیمی‌ترین جفت $(\mathbf{s}, \mathbf{y})$ را حذف کنید.

۵. افزودن $\mathbf{s}_k$ به لیست S و $\mathbf{y}_k$ به لیست Y.

۶. به‌روزرسانی t_k:

$$t_k = \frac{۲}{\mathbf{s}_{k-۱}^T \mathbf{y}_{k-۱}} [f(\mathbf{x}_{k-۱}) - f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{s}_{k-۱}^T \nabla f(\mathbf{x}_k)].$$

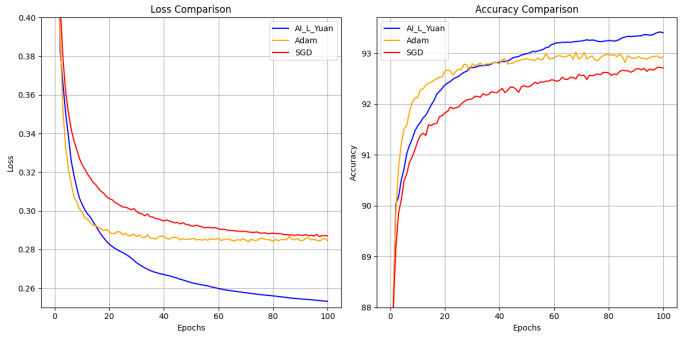
۷. از الگوریتم دو حلقه بازگشتی ۲.۲ برای به‌روزرسانی حاصل‌ضرب هسی در بردار استفاده کنید.

۸. به‌روزرسانی پارامترها:

$$\mathbf{x}_k \leftarrow \mathbf{x}_{k-۱} - \alpha H \mathbf{g}_k.$$

جدول ۱: مقایسه عددی الگوریتم‌ها در حل مسائل بهینه‌سازی کلاسیک

AI-L-Yuan		Adam		L-Yuan		L-BFGS		problem Optimization
NF	NI	NF	NI	NF	NI	NF	NI	
۱۰۵۷	**۵۰۳**	۵۳۵۱۸	۷۲۲۵	۲۱۳۳	۱۰۱۳	۲۱۴۳	۱۰۱۳	Rosenbrock Function
۴۲۹	**۲۰۹**	۱۶۸۶۷	۲۶۹۶	۸۲۲	۳۸۸	۸۰۹	۳۸۰	Wood Function
۵۹۰۵	۲۸۸۳	۷۱۴۷۱	۱۰۰۰۰	۴۴۵۱	۲۱۴۶	**۳۹۸۸**	**۱۹۲۵**	Powell Function
۹۹۹	**۴۹۳**	۱۷۱۵۰	۲۷۹۰	۱۰۳۹	۵۰۸	۱۰۳۰	۵۰۴	Sin-Valley Function
۸۲	**۴۱**	۸۵۰	۴۱۸	۸۹	۴۱	۹۱	۴۲	Quartic Function

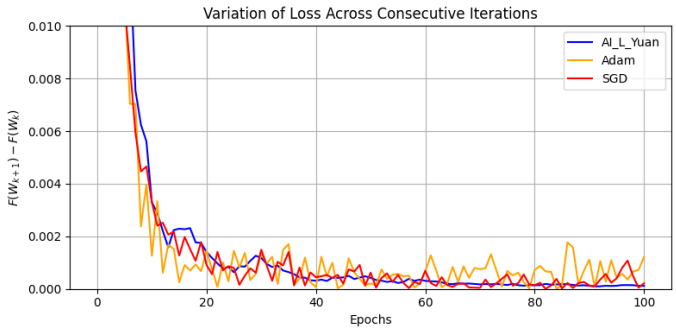


شکل ۱: مقایسه روند کاهش تابع هزینه و افزایش دقت در الگوریتم‌های Al-L-Yuan، Adam و SGD روی مجموعه داده‌ی MNIST

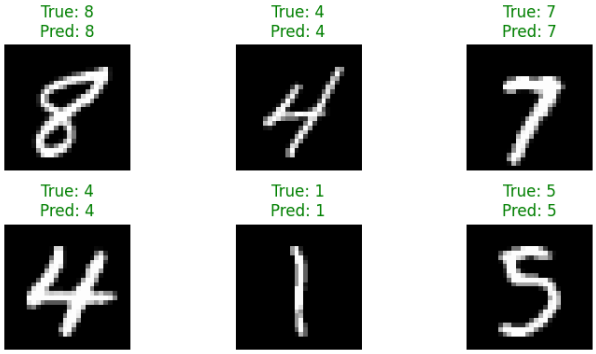
۳ دست‌آوردهای پژوهش

در این بخش، ابتدا عملکرد الگوریتم پیشنهادی AI-L-Yuan در مقایسه با چند الگوریتم مرجع شامل L-BFGS، L-Yuan و Adam، در حل مجموعه‌ای از مسائل کلاسیک بهینه‌سازی بررسی می‌شود. پس از آن به بررسی عملکرد الگوریتم پیشنهادی روی یک مسئله کاربردی در یادگیری ماشین (مسئله رگرسیون لجستیک) با استفاده از مجموعه‌داده‌ی استاندارد MNIST پرداخته می‌شود. در این مرحله الگوریتم AI-L-Yuan با دو الگوریتم رایج SGD و Adam از منظر روند کاهش تابع هزینه، دقت و پایداری عددی مقایسه خواهد شد. این دو بخش در کنار هم نمایی جامع از توانمندی الگوریتم پیشنهادی در هر دو حوزه‌ی مسائل کلاسیک و کاربردی ارائه می‌دهند.

ابتدا عملکرد الگوریتم پیشنهادی از منظر سرعت همگرایی و هزینه‌ی محاسباتی با چندین الگوریتم رایج مقایسه می‌شود. معیارهای ارزیابی شامل تعداد تکرارها و دفعات ارزیابی تابع هدف هستند که شاخص‌هایی برای سنجش کارایی محاسباتی محسوب می‌شوند. هدف از این مقایسه، ارزیابی اثربخشی الگوریتم پیشنهادی در حل مسائل بهینه‌سازی و تحلیل رفتار آن در شرایط مختلف است. بدین منظور، مجموعه‌ای متنوع از مسائل آزمون با ویژگی‌های ساختاری گوناگون انتخاب شده‌اند تا توانایی الگوریتم در مقابله با چالش‌های مختلف به‌صورت جامع مورد بررسی قرار گیرد.



شکل ۲: بررسی اختلاف تابع هزینه در دو دوره‌ی آموزشی پیاپی برای الگوریتم‌های Al-L-Yuan، Adam و SGD روی مجموعه داده‌ی MNIST



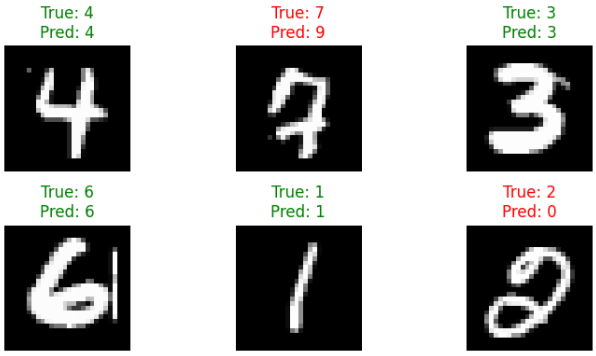
شکل ۳: مقایسه‌ی برچسب‌های پیش‌بینی‌شده و واقعی برای نمونه‌های تصادفی از مجموعه داده‌های آموزش

در نمودار دقت (شکل ۱ - راست)، الگوریتم پیشنهادی در ابتدا کمی عقب‌تر از Adam قرار دارد اما پس از حدود ۲۰ دوره آموزشی از آن پیشی گرفته و تا پایان آموزش به دقتی بیشتر از ۹۳٪ می‌رسد. در حالی‌که Adam و SGD به‌ترتیب در حدود ۹۲٫۹٪ و ۹۲٫۶٪ باقی می‌مانند. این نتایج نشان می‌دهند که Al-L-Yuan نه‌تنها در کاهش loss مؤثرتر عمل می‌کند، بلکه از نظر قابلیت تعمیم و دقت نهایی نیز برتری نسبی دارد.

در نهایت، نمودار ۲ تغییرات مقدار تابع هزینه بین دو تکرار متوالی را نمایش می‌دهد. الگوریتم پیشنهادی پس از حدود ۲۰ دوره به مقدار نوسان بسیار ناچیز و ثابتی می‌رسد، که نشان‌دهنده پایداری بالا و همگرایی یکنواخت آن است. در مقابل، الگوریتم Adam علی‌رغم کاهش سریع اولیه، نوسانات بیشتری در طول فرآیند آموزش دارد و SGD نیز با نرخ کاهشی کندتر به پایداری می‌رسد.

به‌طور کلی، نتایج تجربی نشان می‌دهند که الگوریتم پیشنهادی Al-L-Yuan در مقایسه با روش‌های متداول، عملکرد بهتری از نظر سرعت همگرایی، دقت نهایی و پایداری عددی دارد.

جدول ؟؟ نتایج عددی مربوط به مقایسه‌ی عملکرد الگوریتم پیشنهادی AI-L-Yuan با سه روش دیگر شامل L-BFGS، L-Yuan و Adam را در حل مجموعه‌ای از مسائل بهینه‌سازی کلاسیک نشان می‌دهد. مسائل مورد بررسی شامل توابع شناخته‌شده‌ی Rosenbrock، Wood، Powell، Sin-Valley و Quartic هستند که به دلیل ویژگی‌های مختلف‌شان نظیر غیرخطی‌بودن، وابستگی متقابل



شکل ۴: مقایسه‌ی برچسب‌های پیش‌بینی‌شده و واقعی برای نمونه‌های تصادفی داده‌های آزمون

متغیرها و رفتار چندمقیاسی، معیار مناسبی برای ارزیابی الگوریتم‌های بهینه‌سازی محسوب می‌شوند. بُعد همه مسائل فوق ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است.

در این جدول، برای هر روش بهینه‌سازی دو معیار ارزیابی گزارش شده است: تعداد تکرارها (NI) و تعداد ارزیابی‌های تابع هدف (NF). معیار NI بیانگر تعداد دفعات به‌روزرسانی متغیرها طی فرآیند بهینه‌سازی است، در حالی که معیار NF معرف بار محاسباتی مربوط به ارزیابی تابع هدف در طول اجرای الگوریتم می‌باشد.

نتایج نشان می‌دهند که الگوریتم AI-L-Yuan که نسخه‌ای بهبود یافته از روش L-Yuan با بهره‌گیری از تکنیک‌های تقویتی و اطلاعات تطبیقی است، در اکثر مسائل مورد بررسی هم از نظر تعداد تکرارها و هم از نظر تعداد ارزیابی‌های تابع هدف عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌ها داشته است. به‌ویژه در مسئله‌های پیچیده‌تری نظیر Sin-Valley و Rosenbrock کاهش قابل توجهی در NF مشاهده می‌شود که نشان‌دهنده‌ی بهره‌وری محاسباتی بالاتر الگوریتم پیشنهادی است. مقادیر بهترین نتایج در جدول به‌صورت پررنگ مشخص شده‌اند.

از سوی دیگر، الگوریتم Adam با وجود محبوبیت بالای آن در مسائل یادگیری ماشین، در این مسائل کلاسیک از نظر سرعت همگرایی و کارایی محاسباتی نسبتاً ضعیف‌تر عمل کرده و به تعداد تکرارها و ارزیابی‌های تابع هدف به‌مراتب بیشتری نیاز دارد.

این نتایج به‌طور کلی گویای اثربخشی الگوریتم پیشنهادی در حل مسائل بهینه‌سازی کلاسیک با هزینه محاسباتی پایین‌تر و سرعت همگرایی بالاتر در مقایسه با روش‌های مرجع است.

در ادامه، عملکرد الگوریتم پیشنهادی Al-L-Yuan را با دو الگوریتم پرکاربرد در یادگیری ماشین، یعنی SGD و Adam، روی مجموعه داده استاندارد MNIST مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌دهیم. معیارهای مقایسه شامل مقدار تابع هزینه (Loss)، دقت پیش‌بینی (Accuracy) و تفاضل مقدار تابع هزینه در دو تکرار متوالی به‌عنوان شاخصی برای سنجش نرخ همگرایی الگوریتم‌ها، می‌باشد.

شکل ۱ (چپ) نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی دارای سرعت کاهش قابل توجهی در مقدار

تابع هزینه نسبت به دو الگوریتم دیگر است. به‌ویژه در مراحل ابتدایی آموزش، Al-L-Yuan با شیب تندتری به سمت کمینه حرکت می‌کند و پس از حدود ۳۰ دوره آموزشی، مقدار تابع به‌طور محسوسی کمتر از Adam و SGD باقی می‌ماند. این روند بیانگر همگرایی سریع‌تر و مؤثرتر الگوریتم پیشنهادی است.

همچنین برای ارزیابی عملکرد طبقه‌بندی الگوریتم پیشنهادی، در شکل مربوطه برچسب‌های پیش‌بینی‌شده و واقعی تعدادی از تصاویر انتخاب‌شده به‌صورت تصادفی از مجموعه داده‌های آموزش و آزمون MNIST نمایش داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که مدل در شناسایی صحیح ارقام دست‌نویس، دقت بالایی دارد و در بیش از ٪۹۳، خروجی پیش‌بینی‌شده با برچسب واقعی مطابقت دارد.

مراجع

[1] Richard H Byrd, Samantha L Hansen, Jorge Nocedal, and Yoram Singer. A stochastic quasi-newton method for large-scale optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 26(2):1008–1031, 2016.

[2] Rie Johnson and Tong Zhang. Accelerating stochastic gradient descent using predictive variance reduction. *Advances in neural information processing systems*, 26, 2013.

[3] Diederik P Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv preprint arXiv:1412.6980*, 2014.

[4] Philipp Moritz, Robert Nishihara, and Michael Jordan. A linearly-convergent stochastic l-bfgs algorithm. In *Artificial intelligence and statistics*, pages 249–258. PMLR, 2016.

[5] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer, Berlin, 2006.

[6] Jorge Nocedal. Updating quasi-newton matrices with limited storage. *Mathematics of computation*, 35(151):773–782, 1980.

[7] Nicolas Roux, Mark Schmidt, and Francis Bach. A stochastic gradient method with an exponential convergence _rate for finite training sets. *Advances in neural information processing systems*, 25, 2012.

[8] Ya-xiang Yuan. A modified bfgs algorithm for unconstrained optimization. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 11(3):325–332, 1991.

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

ماتریس بی‌نظمی گراف

راحله خاکباز [۱] جواد بهادری [۲]

[۱,۲] گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در این مقاله، ماتریس بی‌نظمی گراف به عنوان ابزاری مؤثر برای تحلیل ناهمگنی ساختار گراف‌ها معرفی و بررسی می‌شود. این ماتریس که درایه‌های آن اختلاف قدر مطلق درجات رأس‌ها را نشان می‌دهد، امکان اندازه‌گیری کمی بی‌نظمی و ناهمگنی گراف‌ها را فراهم می‌کند. با استفاده از این ماتریس، می‌توان شاخص‌های بی‌نظمی را به‌صورت کارآمد و سریع، حتی برای گراف‌های بسیار بزرگ، محاسبه نمود که این امر کاربردهای گسترده‌ای در تحلیل شبکه‌های پیچیده دارد. در ادامه، ویژگی‌های ماتریس بی‌نظمی در گراف‌های خاصی مانند گراف کامل، مسیر، ستاره، چرخه‌ای، دوبخشی کامل و گراف‌های چند مولفه‌ای بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد گراف‌های منظم دارای ماتریس بی‌نظمی صفر و گراف‌های ناهمگن دارای ساختارهای مشخص و شاخص‌های بی‌نظمی قابل توجه هستند. در نهایت، اهمیت این ماتریس در شناسایی ناهمگنی‌های ساختاری و کاربردهای آن در علوم شبکه مورد بحث قرار می‌گیرد و زمینه‌ساز تحقیقات آتی در حوزه شاخص‌های بی‌نظمی می‌باشد.

کلمات کلیدی: ماتریس بی‌نظمی، شاخص آلبرستون، ناهمگنی ساختاری گراف‌ها، رتبه ماتریس، گراف‌های خاص

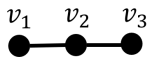
۱ مقدمه

فرض کنید G یک گراف ساده بدون جهت با مجموعه رأس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. شاخص بی‌نظمی آلبرستون به‌صورت $\mathrm{irr}(G) = \sum_{\{uv\}\in E(G)} |d(u) - d(v)|$ تعریف می‌شود که در آن $d(v)$ درجه رأس v است. در این جا، شاخص $\mathrm{irr}(G)$ همراه با ماتریس بی‌نظمی I (با درایه‌های $I_{ij} = |d(v_i) - d(v_j)|$ برای یال‌های موجود)، و رتبه $\mathrm{rank}(I)$ را برای گراف‌های خاص شامل مسیر (P_n)، کامل (K_n)، ستاره‌ای (S_n)، چرخ (W_n)، دو بخشی کامل $(K_{m,n})$، و گراف‌های چندمؤلفه‌ای تحلیل می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. برای گراف G، ماتریس بی‌نظمی $I = [i_{ij}]_{n\times n}$ با درایه‌های زیر تعریف می‌شود:

$$I_{ij} = \begin{cases} |d(v_i) - d(v_j)| & \{v_iv_j\} \in E \\ ۰ & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

[1] Khakbaz.rahele2000@email.com
[2] Javadbahadori2000@email.com



شکل ۱: گراف $P_۳$

که $d(v_k)$ درجه رأس v_k است.

مثال ۱.۱. ماتریس بی‌نظمی گراف $P_۳$ زیر را بدست آورده ایم.

- درجه‌ها:

$$d(v_۱) = ۱, d(v_۲) = ۲, d(v_۳) = ۱$$

- محاسبه درایه‌ها:

$$i_{۱۲} = |۱ - ۲| = ۱, \quad i_{۲۱} = |۲ - ۱| = ۱, \quad i_{۲۳} = |۲ - ۱| = ۱, \quad i_{۳۲} = |۱ - ۲| = ۱$$

سایر درایه‌ها صفر

ماتریس بی‌نظمی:

$$I = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

لم ۱.۱. فرض می‌کنیم G یک گراف ساده بدون جهت همبند با n رأس و ماتریس بی‌نظمی $I(G)$ باشد، در این‌صورت:

خاصیت ۱.۱. I ماتریسی متقارن است:

$$i_{ij} = i_{ji} \quad \forall ۱ \leq i, j \leq n$$

خاصیت ۲.۱. درایه‌های قطر اصلی همگی صفرند:

$$i_{ii} = ۰ \quad \forall ۱ \leq i \leq n$$

خاصیت ۳.۱. مجموع تمام درایه‌های ماتریس دو برابر شاخص آلبرستون است:

$$\sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} i_{ij} = ۲ \cdot \mathrm{irr}(G)$$

خاصیت ۴.۱. رنک ماتریس همیشه زوج است (به جز رنک صفر):

$$\mathrm{rank}(I) \in \{۰, ۲, ۴, \dots\}$$

خاصیت ۵.۱. تعداد درایه‌های غیرصفر حداکثر $۲|E|$ است:

$$|\{(i,j) \mid i_{ij} \neq ۰\}| \leq ۲|E|$$

قضیه ۱.۱. شرط صفر شدن ماتریس گراف‌های همبند

$$I = ۰_{n\times n} \iff G \text{گراف منظم است}$$

ماتریس بی‌نظمی برای گراف کامل K_n

ویژگی‌های گراف: گراف کامل K_n با n رأس دارای:

- تعداد یال‌ها: $|E| = \binom{n}{۲}$
- درجه هر رأس: $d(v_i) = n - ۱$ برای همه i
- گراف $n - ۱$ـ منظم

ماتریس بی‌نظمی: برای هر یال $\{i,j\} \in E$:

$$|d(v_i) - d(v_j)| = |(n-۱) - (n-۱)| = ۰$$

بنابراین:

$$I_{ij} = \begin{cases} ۰ & \{i,j\} \in E \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \implies \boxed{I = ۰_{n\times n}}$$

Rank:

$$\operatorname{rank}(I) = ۰$$

ماتریس بی‌نظمی برای گراف ستاره‌ای S_m

ویژگی‌های گراف:

- تعداد رأس‌ها: $n = m + ۱$
- رأس مرکزی (c): $d(c) = m$
- رأس‌های حاشیه‌ای (l_i): $d(l_i) = ۱$
- یال‌ها: فقط بین c و l_i

ماتریس بی‌نظمی: برای هر یال $\{c, l_i\}$:

$$|d(c) - d(l_i)| = |m - ۱| = k$$

ساختار ماتریس:

$$I = \begin{bmatrix} ۰ & k & k & \cdots & k \\ k & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ k & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}$$

Rank:

$$\text{rank}(I) = ۲$$

برای

$$m \geq ۲$$

شاخص آلبرستون:

$$\text{irr}(S_m) = \sum_{i=۱}^{m} |m - ۱| = m|m - ۱|$$

ماتریس بی‌نظمی برای گراف مسیر P_n

ویژگی‌های گراف:

- رأس‌ها: $v_۱, v_۲, \ldots, v_n$
- یال‌ها: $\{v_i, v_{i+۱}\}$ برای $i = ۱, ۲, \ldots, n - ۱$
- درجه رأس‌ها:

$$d(v_۱) = ۱, \quad d(v_n) = ۱$$
$$d(v_i) = ۲ \quad \text{برای} i = ۲, ۳, \ldots, n - ۱$$

ماتریس بی‌نظمی:

$$I_{ij} = \begin{cases} |d(v_i) - d(v_j)| & \{ij\} \in E \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

- برای یال‌های انتهایی: $|d(v_۱) - d(v_۲)| = |۱ - ۲| = ۱$
- برای یال‌های میانی: $|d(v_i) - d(v_{i+۱})| = |۲ - ۲| = ۰$

ساختار ماتریس:

$$I = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

Rank:

$$\operatorname{rank}(I) = \begin{cases} ۰ & n = ۱ \\ ۱ & n = ۲ \\ ۲ & n \geq ۳ \end{cases}$$

شاخص آلبرستون:

$$\operatorname{irr}(P_n) = \begin{cases} ۰ & n = ۱ \\ ۰ & n = ۲ \\ ۲ & n \geq ۳ \end{cases}$$

ماتریس بی‌نظمی برای گراف چرخ W_n

ویژگی‌های گراف:

- رأس‌ها: $n + ۱$ (۱ رأس مرکزی + n رأس روی حلقه)
- درجه رأس مرکزی: $d(c) = n$
- درجه رأس‌های حلقه: $d(v_i) = ۳$
- اختلاف درجه: $|d(c) - d(v_i)| = |n - ۳| = k$

ماتریس بی‌نظمی:

$$I = \begin{bmatrix} ۰ & k & k & \cdots & k \\ k & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ k & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}$$

Rank:

$$\text{rank}(I) = ۲ \qquad \text{برای} \qquad n \neq ۳$$

شاخص آلبرستون:

$$\text{irr}(W_n) = \sum_{i=۱}^{n} |n - ۳| = n|n - ۳|$$

حالت خاص $(n = ۳)$:

$$k = |۳ - ۳| = ۰ \implies I = ۰, \quad \mathcal{E}(I) = ۰$$

ماتریس بی‌نظمی برای گراف دو بخشی کامل $K_{m,n}$

ویژگی‌های گراف:

- دو بخش A (با m رأس) و B (با n رأس)
- درجه رأس‌های A: $d(a_i) = n$
- درجه رأس‌های B: $d(b_j) = m$
- اختلاف درجه: $|d(a_i) - d(b_j)| = |n - m| = k$

ماتریس بی‌نظمی:

$$I = \begin{bmatrix} ۰_{m\times m} & k \cdot ۱_{m\times n} \\ k \cdot ۱_{n\times m} & ۰_{n\times n} \end{bmatrix}$$

Rank:

$$\text{rank}(I) = ۲ \qquad \text{برای} \qquad m \neq n$$

۲ دست‌آوردهای پژوهش

- معرفی **ماتریس بی‌نظمی** به‌عنوان ابزاری نوین برای کمّی‌سازی ناهمگنی ساختاری گراف‌ها و محاسبه‌ی کارآمد شاخص‌های بی‌نظمی حتی در گراف‌های بزرگ.
- کشف رابطه‌ی جبری بین ماتریس بی‌نظمی و شاخص آلبرستون: $\sum_{i,j} I_{ij} = ۲ \cdot \mathrm{irr}(G)$.
- محاسبه‌ی صریح رتبه‌ی ماتریس و شاخص بی‌نظمی برای گراف‌های کلاسیک (مسیر، ستاره، چرخ، دو بخشی کامل).
- ارائه‌ی کاربردهای مفهومی در شناسایی ناهمگنی‌های ساختاری و زمینه‌سازی برای پژوهش‌های آینده در تحلیل شبکه‌های پیچیده.

مراجع

[1] Albertson, M. O., *The irregularity of a graph*, Ars Combin. **46** (1997), 219–225.

[2] Brouwer, A. E. and Haemers, W. H., *Spectra of Graphs*, Springer, New York, 2012.

[3] Das, K. C., Gutman, I. and Zhou, B., *New upper bounds on the Albertson index*, Discrete Appl. Math. **234** (2018), 47–54.

[4] Gutman, I., *Topological indices and irregularity measures*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **70** (2013), 781–790.

[5] West, D. B., *Introduction to Graph Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

مدل خودبازگشتی صحیح مقدار مرتبه اول با عملگر دوجمله‌ای و با نوآوری‌های پیچش پواسون-α تا هندسی در صفر تعدیل‌یافته

مریم شالباف [۱] غلامعلی پرهام [۲]

[۱] گروه آمار و ریاضی، واحد شوشتر، دانشگاه آزاد اسلامی، شوشتر، ایران
[۲] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

در سری‌های زمانی شمارشی اغلب پدیده بیش پراکنشی مشاهده می‌شود. در این مقاله، یک فرایند خودبازگشتی صحیح مقدار مرتبه اول براساس عملگر رقیق کننده دوجمله‌ای معرفی می‌شود. توزیع حاشیه‌ای مدل توزیع دلاپورت می‌باشد. بر این اساس توزیع نوآوری ها پیچشی از توزیع پواسون با تعداد α تا توزیع هندسی تعدیل‌یافته در صفر خواهد شد. برخی از خواص مدل نمایش داده می‌شود. برای برآورد پارامترها از روش‌های یول-والکر، حداقل مربعات شرطی و حداکثر درستنمایی شرطی استفاده می‌شود و خواص مجانبی آنها بررسی می‌شود. با انجام یک شبیه‌سازی عملکرد این برآوردگرها مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در نهایت این مدل به یک مجموعه داده واقعی برازش داده می‌شود.

کلمات کلیدی: توزیع دلاپورت، مدل خودبازگشتی صحیح مقدار مرتبه اول، α تا توزیع هندسی تعدیل‌یافته، عملگر رقیق کننده دوجمله‌ای

۱ مقدمه

در طول چند دهه گذشته، علاقه‌ی رو به رشدی در مدل‌سازی سری‌های زمانی گسسته مقدار در مقالات صورت گرفته است. به عنوان مثال، تعداد تولدها در یک بیمارستان در ماه‌های متوالی، تعداد تصادفات جاده‌ای و تعداد بیماری‌ها در یک منطقه خاص در ماه‌های متوالی از جمله مواردی است که با آن مواجه می‌شویم. مدل‌های سری زمانی گسسته مقدار (INAR) معمولاً براساس عملگر رقیق کننده دوجمله‌ای که توسط استیوتل و ون هارن [۱] به‌صورت $\rho \circ X = \sum_{i=1}^{X} Y_i$ تعریف شده است، ساخته می‌شوند، به‌طوری‌که $\{Y_t\}_{t\in Z}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع برنولی با احتمال موفقیت $\rho \in [0, 1]$ می‌باشد و X یک متغیر تصادفی صحیح مقدار غیرمنفی و مستقل از Y می‌باشد. مک‌کنزی [۲] و آل‌اوش و آلزاید [۳] مدل INAR(1) را به‌صورت زیر معرفی کردند:

$$X_t = \rho \circ X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

[1] Maryamshal@iau.ac.ir
[2] Parham_g@scu.ac.ir

که در آن $0 \leq \rho < 1$ و ε_t دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با مقادیر صحیح غیرمنفی ناهمبسته با میانگین μ_ε و واریانس متناهی σ_ε^2 است. اگر $\varphi_X(s)$ و $\varphi_\varepsilon(s)$ به ترتیب نشان‌دهنده تابع مولد احتمال $\{X_t\}_{t\in Z}$ و $\{\varepsilon_t\}_{t\in Z}$ باشند، آنگاه توزیع حاشیه‌ای $\{X_t\}_{t\in Z}$ را می‌توان به‌صورت $\varphi_X(s) = \varphi_X(1-\rho+\rho s)\varphi_\varepsilon(s)$ نوشت.

متداول‌ترین فرایند برای مدل‌بندی این نوع از داده‌ها، مدل پواسون خودبازگشتی گسسته مقدار مرتبه اول (PINAR(1)) است. بیش پراکنشی (یعنی حالتی که واریانس از میانگین بزرگتر است) پدیده‌ای است که معمولا در سری‌های شمارشی مشاهده می‌شود. چون توزیع پواسون هم پراکنش است (یعنی میانگین با واریانس برابر است) فرایند PINAR برای مدل‌سازی داده‌های با بیش پراکنشی مناسب نیست. رویکردهای مختلفی برای مقابله با بیش پراکنشی پیشنهاد شده است. یک رویکرد معمول برای برخورد با بیش پراکنشی در داده‌های شمارشی استفاده از توزیع‌های پواسون آمیخته است که توسط بارتو–سوآزا [۴] بررسی شده است. توزیع‌های پواسون آمیخته بوسیله معرفی یک اثر تصادفی پنهان روی میانگین توزیع پواسون به‌دست می‌آیند. رویکرد ما استفاده از توزیع دلاپورت به‌عنوان توزیع حاشیه‌ای فرایند است که بتوان از آن به‌عنوان مدلی برای داده‌های شمارشی با بیش پراکنش استفاده کرد. توزیع دلاپورت یک توزیع احتمالی گسسته است که می‌توان آن را پیچش توزیع دوجمله‌ای منفی با توزیع پواسون تعریف کرد که در برخی داده‌های علمی و زیستی به‌کار می‌روند. همان‌طور که توزیع دوجمله‌ای منفی می‌تواند به‌عنوان یک توزیع پواسون در نظر گرفته شود که در آن پارامتر میانگین خود یک متغیر تصادفی با توزیع گاما است، توزیع دلاپورت می‌تواند به‌عنوان توزیع مرکب براساس توزیع پواسون تعریف شود که در آن دو مؤلفه برای پارامتر میانگین وجود دارد: مؤلفهٔ ثابت که دارای پارامتر λ است و یک مؤلفه متغیر گاما که دارای پارامترهای α و β است. این توزیع به نام پیر دلاپورت نامگذاری شده است که اولین بار آن را در رابطه با تعداد تلفات تصادفات خودرو در سال ۱۹۵۹ به‌کار برد [۵].

در این مقاله ما در جهت کمک به تحلیل سری‌های زمانی گسسته مقدار، یک فرایند خودبازگشتی صحیح مقدار مرتبه اول با توزیع حاشیه‌ای دلاپورت (DELINAR(1)) را معرفی می‌کنیم. این مدل برای مدل‌سازی سری‌های زمانی با مقدار صحیح غیر منفی و با بیش پراکنشی مناسب است. بر این اساس مدل در بخش ۴ معرفی شده است. همچنین برخی از ویژگی‌های مدل بیان شده است. در بخش ۴، روش‌های برآورد پارامترهای مدل و توزیع مجانبی برای برخی از پارامترها مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش ۶ برخی از نتایج شبیه‌سازی برای روش‌های برآورد مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش ۵، مدل بر روی یک مجموعه داده واقعی اعمال می‌شود. در نهایت در بخش ۶ نتایج بیان شده است.

۲ فرایند INAR(1) با توزیع حاشیه‌ای دلاپورت

در این بخش، ویژگی‌های ساختاری این فرایند، مانند توزیع‌های حاشیه‌ای و نوآوری، میانگین و واریانس این توزیع‌ها، امید شرطی و واریانس شرطی متغیر تصادفی حاشیه‌ای و احتمالات انتقال را بررسی می‌کنیم.

۱.۲ توزیع دلاپورت

متغیر تصادفی X دارای توزیع دلاپورت با پارامترهای λ، α و β است و آن را با نماد $DEL(\lambda,\alpha,\beta)$ نشان می‌دهند اگر تابع مولد احتمال آن به‌صورت زیر باشد [۵]:

$$G_X(S)=e^{-\lambda(1-s)}\left(\frac{1}{1+\beta(1-s)}\right)^{\alpha}$$

به‌طوری‌که $|s|\leq 1$، $\lambda>0$ و $\alpha,\beta>0$. با دوبار مشتق گرفتن از تابع مولد احتمال توزیع دلاپورت می‌توان نشان داد که:

$$\mu=E(X_t)=\lambda+\alpha\beta \qquad \sigma^2=Var(X_t)=\lambda+\alpha\beta(1+\beta)$$

با توجه به اینکه واریانس بزرگ‌تر از میانگین است، می‌توان گفت این توزیع بیش پراکنشی دارد.

۲.۲ فرایند خودبازگشتی صحیح مقدار مرتبه اول با توزیع حاشیه‌ای دلاپورت (DELINAR(1))

در این بخش فرایند خودبازگشتی مرتبه اول معرفی شده در (۱) با توزیع حاشیه‌ای دلاپوریت معرفی می‌شود. فرض کنید $\Phi_X(s)$ و $\Phi_\varepsilon(s)$ به‌ترتیب تابع مولد احتمال جایگزین[1] برای متغیرهای تصادفی X_t و ε_t باشند، از رابطه (۱) و ایستایی فرایند $\{X_t\}$، تابع مولد احتمال جایگزین برای ε_t را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\Phi_{\varepsilon_t}(s)=\frac{\Phi_{X_t}(s)}{\Phi_{X_{t-1}}(\rho s)}=e^{-\lambda(1-\rho)S}\left[\rho+(1-\rho)\frac{1}{1+\beta s}\right]^{\alpha}.$$

بنابراین، دنباله نوآوری $\{\varepsilon_t\}$ دارای ساختار پیچشی به‌صورت $\varepsilon_t=Y_1+Y_2$ است که در آن Y_1 دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda(1-\rho)$ و Y_2 پیچش α تا توزیع هندسی تعدیل یافته در صفر است. بنابراین امید ریاضی و واریانس ε_t به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\mu_\varepsilon:=E(\varepsilon_t)=(1-\rho)(\lambda+\alpha\beta)=(1-\rho)\mu_X$$
$$\sigma_\varepsilon^2:=Var(\varepsilon_t)=(1-\rho)[\lambda+\alpha\beta(1+(1+\rho)\beta)]=(1-\rho^2)\sigma_X^2-\rho(1-\rho)\mu_X.$$

[1] Alternate Probabiloty Generating Function

احتمال شرطی X_t بشرط X_{t-1} به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$p_{ij} = P(X_t = j|X_{t-1} = i) = P(\rho \circ X_{t-1} + \varepsilon_t = x_t|X_{t-1} = x_{t-1}).$$

اکنون فرض کنید

$$B^{\rho}_{X_{t-1}} := \rho \circ X_{t-1}|X_{t-1} \sim \text{Binomial}(X_{t-1}, \rho)$$

همچنین ε_t مستقل از X_{t-1} می‌باشد و دارای ساختار پیچشی از دو متغیر تصادفی $P_{(\lambda,\rho)} \sim \text{Po}(\lambda(1-\rho))$ (ρ و پیچش α تا توزیع هندسی تعدیل‌یافته در صفر با پارامترهای $p = \frac{1}{1+\beta}$ و p_0 می‌باشد که $p_0 = \frac{(1+\rho\beta)}{1+\beta}$ میزان جرم احتمال در صفر می‌باشد. بنابراین احتمال شرطی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} P(X_t = x_t|X_{t-1} = x_{t-1}) =& P(B^{\rho}_{X_{t-1}} + P_{(\lambda,\rho)} + \alpha\text{FZMG}(p, p_0) = x_t) \\ =& \sum_{s=0}^{x_t} P(\alpha\text{FZMG} = s) \sum_{d=0}^{\min\{x_t-s, x_{t-1}\}} P(B^{\rho}_{X_{t-1}} = d) P(P_{(\lambda,\rho)} \\ =& x_t - s - d), \end{aligned} \quad (2)$$

به‌طوری‌که

$$P(P_{(\lambda,\rho)} = u) = \frac{e^{-\lambda(1-\rho)}[\lambda(1-\rho)]^u}{u!}, \qquad u = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$P(B^{\rho}_{X_{t-1}} = i) = \binom{x_{t-1}}{i} \rho^i (1-\rho)^{X_{t-1}-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, x_{t-1},$$

و $\alpha\text{FZMG}(p, p_0) = \sum_{i=1}^{\alpha} Z_i$ همچنین تابع احتمال متغیر Z به‌فرم زیر است:

$$P(Z_i = k) = \begin{cases} p_0 & k = 0 \\ (1-\rho)\frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}} & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

و $p_0 = \rho + (1-\rho)\frac{1}{1+\beta}$ جرم احتمال در نقطه صفر می‌باشد. همچنین امیدریاضی و واریانس شرطی نیز به‌صورت زیر محاسبه و نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} E(X_t|X_{t-1}) &= \rho X_{t-1} + (1-\rho)\mu_X \\ Var(X_t|X_{t-1}) &= \rho(1-\rho)X_{t-1} + (1-\rho^2)\sigma_X^2 - \rho(1-\rho)\mu_X. \end{aligned}$$

۳ برآورد پارامترها

فرض کنید $X_n, \ldots, X_2, X_1$ یک نمونه از فرایند DELINAR(1) باشند. در این فرایند ما ۴ پارامتر داریم، فرض می‌کنیم پارامتر α معلوم است پس ۳ پارامتر دیگر باید برآورد شوند. در ادامه روش‌های

یول والکر، حداقل مربعات شرطی و حداکثر درستنمایی شرطی و برخی از نتایج تحلیلی و مجانبی برآوردگرها را معرفی و توضیح می‌دهیم.

۱.۳ برآورد یول والکر

فرض کنید $\gamma(k) = \sum_{t=۲}^{n-k}(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})$ و $۰ \leq k < n$ تابع خودکواریانس نمونه‌ای باشد. چون $\rho = \frac{\gamma(۱)}{\gamma(۰)}$، $E(X_t) = \lambda + \alpha\beta$ و $Var(X_t) = \lambda + \alpha\beta(۱+\beta)$، برآوردهای یول والکر پارامترها به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{\rho}_{YW} = \frac{\sum_{t=۲}^{n}(X_t - \bar{X})(X_{t-۱} - \bar{X})}{\sum_{t=۱}^{n}(X_t - \bar{X})^۲}$$

$$\hat{\beta}_{YW} = \sqrt{\frac{S^۲ - \bar{X}}{\alpha}} \qquad \hat{\lambda}_{YW} = \bar{X} - \alpha\sqrt{\frac{S^۲ - \bar{X}}{\alpha}},$$

به‌طوری که $\bar{X}$ و $S^۲$ بترتیب نشان‌دهنده میانگین نمونه‌ای و واریانس نمونه‌ای می‌باشد.

۲.۳ برآورد حداقل مربعات شرطی

روش حداقل مربعات شرطی را در دو مرحله اجرا می‌کنیم [۶]. در گام اول معادله حداقل مربعات شرطی برای پارامترهای ρ و μ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$S_{۱CLS}(\rho,\mu) = \sum_{t=۲}^{n} e_{۱t}^۲ = \sum_{t=۲}^{n}(X_t - E[X_t|X_{t-۱}])^۲ = \sum_{t=۲}^{n}(X_t - \rho X_{t-۱} - (۱-\rho)\mu)^۲$$

به کمک مشتق گیری جزئی نسبت به پارامترهای ρ و μ از رابطه فوق و کمینه کردن آن داریم:

$$\hat{\mu}_{cls} = \frac{\sum_{t=۲}^{n} X_t - \hat{\rho}_{cls}\sum_{t=۲}^{n} X_{t-۱}}{(n-۱)(۱-\hat{\rho}_{cls})},$$
$$\hat{\rho}_{cls} = \frac{(n-۱)\sum_{t=۲}^{n} X_t X_{t-۱} - \sum_{t=۲}^{n} X_t \sum_{t=۲}^{n} X_{t-۱}}{(n-۱)\sum_{t=۲}^{n} X_{t-۱}^۲ - (\sum_{t=۲}^{n} X_{t-۱})^۲}.$$

در گام دوم، برای برآورد پارامتر $\sigma^۲$، یک متغیر تصادفی جدید به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_t = (X_t - E(X_t|X_{t-۱}))^۲ = (X_t - \rho X_{t-۱} - (۱-\rho)\mu)^۲$$

با توجه به اینکه

$$E(V_t|X_{t-۱}) = Var(X_t|X_{t-۱}) = \rho(۱-\rho)X_{t-۱} + (۱-\rho^۲)\sigma^۲ - \rho(۱-\rho)\mu.$$

معادله حداقل مربعات شرطی برای پارامتر $\sigma^۲$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S_{۲CLS}(\sigma^۲) = \sum_{t=۲}^{n}(V_t - E(V_t|X_{t-۱}))^۲ = \sum_{t=۲}^{n}(V_t - \rho(۱-\rho)(X_{t-۱}-\mu) - (۱-\rho^۲)\sigma^۲)^۲.$$

بنابراین برآورد کمترین مربعات شرطی برای پارامتر $\sigma^۲$ بوسیله کمینه کردن مجموع مربعات فوق به‌دست می‌آید:

$$\hat{\sigma}^۲_{cls} = \frac{\sum_{t=۲}^{n}(X_t - \hat{\rho}_{cls}X_{t-۱} - (۱-\hat{\rho}_{cls})\hat{\mu}_{cls})^۲ - \hat{\rho}_{cls}(۱-\hat{\rho}_{cls})\sum_{t=۲}^{n}(X_{t-۱}-\hat{\mu}_{cls})}{(n-۱)(۱-\hat{\rho}^۲_{cls})}$$

سرانجام با حل دستگاه و فرض معلوم بودن α، برآورد کمترین مربعات شرطی برای پارامترهای λ و β به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\lambda}_{cls} = \hat{\mu}_{cls} - \alpha\hat{\beta}_{cls}. \qquad \hat{\beta}_{cls} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^۲_{cls} - \hat{\mu}_{cls}}{\alpha}}.$$

قضیه ۳.۱. برآوردگرهای $\hat{\rho}_{cls}$ و $\hat{\mu}_{cls}$ برای پارامترهای ρ و μ قویا سازگار هستند و وقتی که $n \to \infty$ از توزیع مجانبی زیر پیروی می‌کنند:

$$\sqrt{n}[(\hat{\rho}_{cls}, \hat{\mu}_{cls})^T - (\rho, \mu)^T] \xrightarrow{d} N_۲((۰,۰)^T, V^{-۱}WV^{-۱})$$

به‌طوری‌که $V^{-۱} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{\sigma^۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{(۱-\rho)^۲} \end{pmatrix}$ و W یک ماتریس متقارن ۲ × ۲ به‌صورت زیر است:

$$W = (۱-\rho)\begin{pmatrix} \rho\mu^۳_* & \rho(۱-\rho)\sigma^۲ \\ \rho(۱-\rho)\sigma^۲ & (۱-\rho)(۱-\rho^۲)\sigma^۲ \end{pmatrix}$$

که در آن $\mu^۳_*$، گشتاور سوم مرکزی X_t می‌باشد.

اثبات. طبق قضایای (۳-۱) و (۳-۲) در [۷] می‌توان نشان داد که شرایط نظم برای مدل DELINAR(1) برقرار است و $(\hat{\rho}_{cls}, \hat{\mu}_{cls})$ دارای توزیع مجانبی نرمال است. □

۳.۳ برآورد حداکثر درستنمایی شرطی

برآوردگرهای حداکثر درستنمایی شرطی با بیشینه کردن تابع لگاریتم درستنمایی به‌دست می‌آیند. تابع لگاریتم درستنمایی شرطی به‌صورت $CL(\rho, \lambda, \beta) = \sum_{t=۲}^{n} \log P(X_t = x_t|X_{t-۱} = x_{t-۱})$

می‌باشد، به‌طوری‌که $P(X_t = x_t|X_{t-1} = x_{t-1})$ در (۲) تعریف شده است. مقادیر برآورد حداکثر درستنمایی شرطی با بیشینه کردن تابع فوق به‌دست می‌آید. چون $CL(\rho, \lambda, \beta)$ یک تابع غیرخطی است، برآوردهای حداکثر درستنمایی شرطی باید به کمک روش‌های عددی محاسبه شوند.

جدول ۱: میزان اریبی و میانگین مربعات خطا (در داخل پرانتز) برآوردگرها برای $\rho = ۰/۱$ و $\beta = ۲$ و $\lambda = ۶$.

	برآورد پارامتر λ			برآورد پارامتر β			برآورد پارامتر ρ		
n	$\hat{\lambda}_{CMLn}$	$\hat{\lambda}_{CLS}$	$\hat{\lambda}_{YW}$	$\hat{\beta}_{CML}$	$\hat{\beta}_{CLS}$	$\hat{\beta}_{YW}$	$\hat{\rho}_{CML}$	$\hat{\rho}_{CLS}$	$\hat{\rho}_{YW}$
۱۰۰	۰/۱۸۱	۰/۱۴۷	۰/۰۹۹	−۰/۱۱۰	−۰/۰۹۳	−۰/۰۶۹	−۰/۰۰۱	−۰/۰۱۲	−۰/۰۱۵
	(۰/۸۸۱)	(۰/۶۵۰)	(۰/۶۲۶)	(۰/۲۵۰)	(۰/۱۸۰)	(۰/۱۷۳)	(۰/۰۰۶)	(۰/۰۱۰)	(۰/۰۱۰)
۲۰۰	۰/۰۱۸	۰/۰۳۴	۰/۰۰۹	−۰/۰۰۵	−۰/۰۱۳	−۰/۰۰۲	−۰/۰۸	۰/۰۱۱	−۰/۰۱۲
	(۰/۲۸۶)	(۰/۳۰۰)	(۰/۲۹۸)	−۰/۰۱۴	(۰/۰۷۷)	(۰/۰۷۷)	(۰/۰۰۴)	(۰/۰۰۵)	(۰/۰۰۵)
۴۰۰	۰/۰۲۴	۰/۰۳۵	۰/۰۲۴	−۰/۰۱۴	−۰/۰۱۹	−۰/۰۱۴	−۰/۰۰۶	−۰/۰۰۷	−۰/۰۰۷
	(۰/۱۴۳)	(۰/۱۴۵)	(۰/۱۴۵)	(۰/۰۳۶)	(۰/۰۳۷)	(۰/۰۳۶)	(۰/۰۰۲)	(۰/۰۰۲)	(۰/۰۰۲)
۸۰۰	۰/۰۰۷	۰/۰۱۰	۰/۰۰۴	−۰/۰۰۶	−۰/۰۰۷	−۰/۰۰۵	−۰/۰۰۳	−۰/۰۰۲	−۰/۰۰۲
	(۰/۰۶۱)	(۰/۰۶۶)	(۰/۰۶۵)	(۰/۰۱۶)	(۰/۰۱۸)	(۰/۰۱۸)	(۰/۰۰۱)	(۰/۰۰۱)	(۰/۰۰۱)

۴ شبیه‌سازی

برای مقایسه کارایی براوردگرهای به‌دست آمده از سه روش ذکر شده از آزمایش مونت کارلو به‌منظور محاسبه اریبی و میانگین مربع خطای نمونه‌ی متناهی استفاده می‌کنیم. بدین منظور نمونه‌هایی به اندازه ۱۰۰، ۲۰۰، ۴۰۰ و ۸۰۰ از فرایند خودبازگشتی صحیح مقدار مرتبه اول دلاپورت تولید می‌کنیم. همچنین ۱۰۰۰ سری زمانی برای هر اندازه نمونه تکرار می‌کنیم. در این شبیه‌سازی مقادیر واقعی پارامترها در چهار حالت مختلف بررسی شده است. این شبیه‌سازی‌ها به کمک نرم افزار R به‌دست آمده است. جداول ۱، ۲ و ۳ نتایج این شبیه‌سازی را براساس اریبی و میانگین مربعات خطا (MSE) برآوردگرها نشان می‌دهد. این جداول نشان می‌دهد که مقادیر اریبی و میانگین مربعات خطای برآورد پارامترها با افزایش حجم نمونه برای همه موارد به صفر می‌رسد. همان‌طور که از جداول مشاهده می‌شود، روش حداقل مربعات شرطی و روش یول والکر، رفتارهای مشابهی را نشان می‌دهند. با توجه به جداول، برآوردگرهای حداکثر درستنمایی شرطی مقادیر کمتری از اریبی (مقادیر قدرمطلق) و میانگین مربعات خطا در مقایسه با برآوردگرهای یول والکر و حداقل مربعات شرطی را نشان می‌دهند، چون هم اریبی و هم میانگین مربعات خطا برای برآوردگرهای حداکثر درستنمایی شرطی از روش‌های دیگر کوچک‌تر هستند. با توجه به اینکه اریبی پارامترهای ρ و β برای همه روش‌های برآورد منفی است، بنابراین تمایل به کم برآوردی پارامترها دارند و از آنجایی که اریبی برآوردگرهای λ برای همه روش‌های برآورد مثبت است، می‌توان استنباط کرد که تمایل به بیش برآورد کردن پارامتر دارد.

جدول ۲: میزان اریبی و میانگین مربعات خطا (در داخل پرانتز) برآوردگرها برای $\rho = ۰/۲$ و $\beta = ۳$ و $\lambda = ۱$.

	برآورد پارامتر λ			برآورد پارامتر β			برآورد پارامتر ρ		
n	$\hat{\lambda}_{CMLn}$	$\hat{\lambda}_{CLS}$	$\hat{\lambda}_{YW}$	$\hat{\beta}_{CML}$	$\hat{\beta}_{CLS}$	$\hat{\beta}_{YW}$	$\hat{\rho}_{CML}$	$\hat{\rho}_{CLS}$	$\hat{\rho}_{YW}$
۱۰۰	۰/۰۹۶	۰/۱۵۶	۰/۱۱۳	−۰/۰۴۸	−۰/۰۷۹	−۰/۰۵۷	−۰/۰۰۸	−۰/۰۱۸	−۰/۰۲۲
	(۰/۳۲۹)	(۰/۵۶۷)	(۰/۵۵۲)	(۰/۱۴۶)	(۰/۱۹۸)	(۰/۰۹۳)	(۰/۰۰۵)	(۰/۰۰۹)	(۰/۰۰۹)
۲۰۰	۰/۰۴۷	۰/۰۷۷	۰/۰۵۷	−۰/۰۲۸	−۰/۰۴۳	−۰/۰۳۳	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۴	−۰/۰۰۶
	(۰/۱۵۵)	(۰/۲۸۶)	(۰/۲۸۴)	(۰/۰۶۸)	(۰/۰۹۷)	(۰/۰۹۶)	(۰/۰۰۲)	(۰/۰۰۴)	(۰/۰۰۴)
۴۰۰	۰/۰۱۸	۰/۰۲۵	۰/۰۱۳	−۰/۰۰۹	−۰/۰۱۲	−۰/۰۰۷	−۰/۰۰۲	−۰/۰۰۴	−۰/۰۰۵
	(۰/۰۷۴)	(۰/۱۴۰)	(۰/۱۳۹)	(۰/۰۳۶)	(۰/۰۵۱)	(۰/۰۵۱)	(۰/۰۰۱)	(۰/۰۰۲)	(۰/۰۰۲)
۸۰۰	۰/۰۱۳	۰/۰۲۰	۰/۰۱۶	−۰/۰۰۵	−۰/۰۰۹	−۰/۰۰۷	−۰/۰۰۰	−۰/۰۰۲	−۰/۰۰۲
	(۰/۰۳۷)	(۰/۰۷۴)	(۰/۰۷۴)	(۰/۰۱۷)	(۰/۰۲۶)	(۰/۰۲۶)	(۰/۰۰۰)	(۰/۰۰۱)	(۰/۰۰۱)

جدول ۳: میزان اریبی و میانگین مربعات خطا (در داخل پرانتز) برآوردگرها برای $\rho = ۰/۵$ و $\beta = ۱$ و $\lambda = ۳$.

	برآورد پارامتر λ			برآورد پارامتر β			برآورد پارامتر ρ		
n	$\hat{\lambda}_{CMLn}$	$\hat{\lambda}_{CLS}$	$\hat{\lambda}_{YW}$	$\hat{\beta}_{CML}$	$\hat{\beta}_{CLS}$	$\hat{\beta}_{YW}$	$\hat{\rho}_{CML}$	$\hat{\rho}_{CLS}$	$\hat{\rho}_{YW}$
۱۰۰	۰/۰۷۸	۰/۱۳۲	۰/۰۹۱	−۰/۰۳۶	−۰/۰۶۲	−۰/۰۴۲	−۰/۰۰۸	−۰/۰۱۴	−۰/۰۲۳
	(۰/۴۶۳)	(۰/۵۳۲)	(۰/۴۹۶)	(۰/۱۰۱)	(۰/۱۱۵)	(۰/۱۰۷)	(۰/۰۰۵)	(۰/۰۰۷)	(۰/۰۰۸)
۲۰۰	۰/۱۰۰	۰/۱۳۰	۰/۱۰۸	−۰/۰۴۲	−۰/۰۵۷	−۰/۰۴۵	−۰/۰۰۶	−۰/۰۰۹	−۰/۰۱۳
	(۰/۲۳۶)	(۰/۲۹۳)	(۰/۲۸۰)	(۰/۰۵۶)	(۰/۰۶۹)	(۰/۰۶۷)	(۰/۰۰۲)	(۰/۰۰۳)	(۰/۰۰۴)
۴۰۰	۰/۰۲۶	۰/۰۴۵	۰/۰۳۷	−۰/۰۰۹	−۰/۰۱۹	−۰/۰۱۴	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۳	−۰/۰۰۵
	(۰/۱۰۶)	(۰/۱۴۵)	(۰/۱۴۳)	(۰/۰۲۴)	(۰/۰۳۴)	(۰/۰۳۳)	(۰/۰۰۱)	(۰/۰۰۱)	(۰/۰۰۱)
۸۰۰	۰/۰۱۱	۰/۰۳۰	۰/۰۲۵	−۰/۰۰۷	−۰/۰۱۶	−۰/۰۱۴	−۰/۰۰۰	−۰/۰۰۳	−۰/۰۰۴
	(۰/۰۵۳)	(۰/۰۷۰)	(۰/۰۶۹)	(۰/۰۱۲)	(۰/۰۱۷)	(۰/۰۱۷)	(۰/۰۰۰)	(۰/۰۰۱)	(۰/۰۰۱)

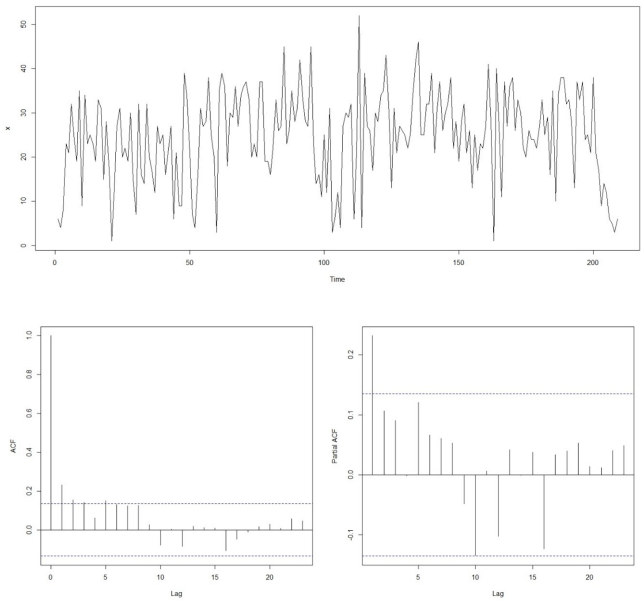
۵ داده واقعی

در این بخش کاربرد مدل با یک مجموعه داده واقعی نشان داده شده است. این مجموعه داده شامل ۲۰۹ مشاهده از موارد سفلیس هفتگی در ایالات متحده، از سال ۲۰۰۷ تا ۲۰۱۰ در ایالت آتلانتیک میانی است. این داده‌ها در فایل (syphillis) در بسته tsinteger در نرم‌افزار R موجود می‌باشند. میانگین نمونه ۲۴/۶۳ و واریانس نمونه ۱۰۵/۶۸ می‌باشد. بنابراین این داده‌ها دارای خاصیت بیش پراکنشی هستند. نمودار سری زمانی و تابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزیی این داده‌ها در شکل ۱ نشان داده شده است. نمودار خودهمبستگی، وابستگی مرتبه اول را نشان می‌دهد. جدول ۴ برآورد پارامترها به روش ماکزیمم درستنمایی شرطی (با میانگین مربع خطا)، معیار اطلاع آکائیک (AIC) و معیار اطلاع بیزی (BIC) را برای مدل‌های PINAR(1) و DELINAR(1) نشان می‌دهد. همان‌طور که از جدول پیداست، مدل DELINAR(1) مقادیر AIC و BIC کوچک‌تری نسبت به مدل PINAR(1) دارد. نتایج به‌دست آمده در جدول ۴ نشان می‌دهد که مدل خودبازگشتی صحیح

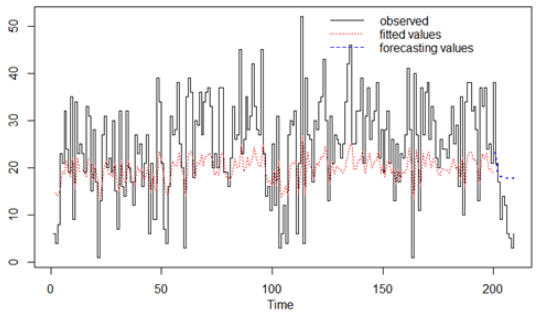
مقدار مرتبه اول دلاپورت بهتر از مدل خودبازگشتی با مقادیر صحیح غیرمنفی مرتبه اول پواسون می‌باشد. مدل برازش شده با برآورد ماکزیمم درستنمایی شرطی به‌صورت $X_t = ۰/۲۷ \circ X_{t-۱} + \varepsilon_t$ می‌باشد به‌طوری‌که X_t دارای توزیع دلاپورت با پارامترهای $\alpha = ۲$، $\beta = ۶/۰۷$ و $\lambda = ۵/۶۳$ می‌باشد. همچنین ε_t دارای ساختار پیچشی از توزیع پواسون با پارامتر ۴/۱۱ و مجموع دو متغیر تصادفی هندسی در صفر تعدیل یافته با پارامترهای $p = ۰/۳۷$ و $p. = ۰/۱۴$ می‌باشد.

به‌منظور بررسی عملکرد پیش‌بینی مدل DELINAR(1)، داده‌های واقعی سری زمانی و مقادیر پیش‌بینی آن‌ها در نمودار رسم شده است. در این پیش‌بینی مقادیر $\hat{\rho}$، $\hat{\lambda}$ و $\hat{\beta}$ از جدول ۴ نوشته شده‌اند. همان‌طور که از روی نمودار مشاهده می‌شود مقادیر پیش‌بینی شده با مفادیر واقعی داده‌ها اختلاف زیادی ندارند و این موضوع نشان می‌دهد که مدل DELINAR(1)، توانسته است پیش‌بینی مناسبی بر روی داده‌ها داشته باشد.

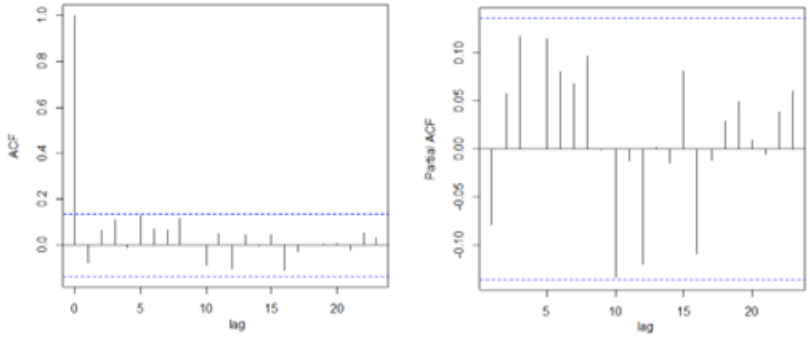
در شکل ۲ مقادیر مشاهده شده، مقادیر برازش و مقادیر پیش‌بینی به ترتیب با خطوط مشکی، قرمز و آبی نشان داده شده است. شکل ۳ نیز نشان‌دهنده تابع خودهمبستگی و تابع خودهمبستگی جزیی باقیمانده‌هاست و همان‌طور که مشاهده می‌شود هیچ همبستگی سریالی در باقیمانده‌ها دیده نمی‌شود و این بدین معنی است که مدل پیشنهادی برای برازش داده‌ها مناسب بوده است.



شکل ۱: نمودار سری زمانی و نمودار خود همبستگی و نمودار خودهمبستگی جزیی داده‌های هفتگی سفلیس از سال ۲۰۰۷ تا ۲۰۱۰ در ایالت متحده آمریکا



شکل ۲: نمودار سری زمانی مقادیر مشاهده شده، برازش شده و پیش‌بینی مربوط به داده‌های هفتگی سفلیس از سال ۲۰۰۷ تا ۲۰۱۰ در ایالت متحده آمریکا



شکل ۳: نمودار خودهمبستگی و خودهمبستگی جزیی باقیمانده‌ها

جدول ۴: پارامترهای برآورد شده (میانگین مربعات خطا) و مقادیر AIC و BIC

مدل	پارامتر	برآورد CML	AIC	BIC	μ_x	σ_x^2	FI_x
DELINAR(1)	ρ	۰/۲۷۰۴(۰/۰۰۰۸)	۱۶۴۲/۱۵۹	۱۶۵۲/۱۸۶	۱۷/۷۶۳۲	۹۱/۳۵۹۸	۵/۱۴۳
	β	۶/۰۶۶۰(۰/۰۰۳۳)					
	λ	۵/۶۳۱۲(۰/۰۰۳۹)					
PINAR(1)	ρ	۰/۱۴۸۰(۰/۰۲۶۱)	۲۰۱۶/۵۴	۲۰۲۳/۲۲	۲۴/۷۲	۲۴/۷۲	۱
	λ	۲۱/۰۶۳۱(۰/۷۰۸۷)					

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک فرایند خودبازگشتی مرتبه اول با توزیع حاشیه‌ای دلاپورت معرفی گردید که توزیع نوآوری مدل به‌صورت پیچشی از توزیع پواسون و α تا توزیع هندسی تعدیل یافته در صفر می‌باشد. در ادامه ویژگی‌های اصلی مدل مانند میانگین واریانس مورد بررسی قرارداده شد. برای برآورد پارامترها از روش‌های یول‌ـ والکر، حداقل مربعات شرطی و حداکثر درستنمایی شرطی استفاده شده و ویژگی‌های مجانبی آن‌ها بررسی گردید. همچنین به پیش‌بینی مدل پرداخته شده است. با انجام یک شبیه‌سازی در حجم نمونه‌های متناهی عملکرد این برآوردگرها مورد ارزیابی قرار گرفت. در نهایت این مدل به یک مجموعه داده واقعی، برازش داده شده و با با مدل خودبازگشتی پواسون مرتبه اول مورد مقایسه

قرار گرفت. این مدل براساس عملگر رقیق کننده دوجمله‌ای و برای مدل‌سازی سری‌های زمانی صحیح مقدار و با بیش پراکنش مناسب می‌باشد.

مراجع

[1] Steutel FW, Van Harn K. (1979), Discrete analogues of self-decomposability and stability, *Ann Probab.* 7(5), 893–899.

[2] McKenzie E. (1985), Some simple models for discrete variate time series, *J Am Water Resour Assoc*, 21(4), 645–650.

[3] Al-Osh MA, Alzaid AA. (1987), First-order interger-valued autoregressive (INAR(1)) process, *J. Time Ser Anal.* 8(3), 261–275.

[4] Barreto-Souza W. (2019), Mixed Poisson INAR(1) processes, *Stat Pap.* 60(3), 2119-2139.

[5] Delaporte P. (1959), Quelques problémes de statistiquemathématique posés par Ìassurance automobile et le bonus non sinistre, *Bulletin Trimestriel de l'lnstitut des Actuaires Frana uis.* 227, 87–102.

[6] Karlsen H, Tjøstheim D. (1988), Consistent estimates for the NEAR(2) and NLAR(2) time series models, *J R Stat Soc Series B Stat Methodol.* 50,313–320.

[7] Klimko LA, Nelson PI. (1978), On conditional least squares estimation for stochastic processes, *Ann Stat.* 6(3), 629–642.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

ارائه یک روش کلی برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید

جواد باولی [۱] هادی بصیر زاده [۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

در این مقاله، برای حل مسائل بهینه سازی نامقید، ابتدا یک روش جست و جوی تکراری ارائه کرده و سپس در مورد تعداد تکرارهای این روش و سرعت همگرایی آن برای رسیدن به جواب قابل قبول، صحبت کرده‌ایم. همچنین این روش معرفی شده را با روش‌های شناخته شده برای حل مسائل بهینه سازی نامقید، مقایسه کرده و نتایج را ارائه داده‌ایم. در آخر، یک مثال عددی (مساله آزمون) آورده‌ایم تا کارائی این روش را به صورت عملی نشان دهیم.

کلمات کلیدی: بهینه سازی نامقید، روش فیبوناچی، روش نسبت طلایی، روش دو بخشی

۱ مقدمه

بهینه‌سازی نامقید، به مساله ماکزیمم سازی یا مینیمم سازی یک تابع، در غیاب هر گونه قید یا محدودیت مربوط می‌شود. در اینجا به مینیمم سازی توابع یک متغیره پرداخته شده است. با وجود اینکه اغلب مسائل بهینه سازی در عمل دارای قید هستند، بررسی و مطالعه تکنیک‌های بهینه سازی نامقید به چندین دلیل اهمیت دارد. تعداد زیادی از الگوریتم‌ها، برای حل مسائل مقید، آن‌ها را به دنباله‌ای از مسائل نامقید (با استفاده از ضرایب لاگرانژ یا توابع مانعی یا جریمه‌ای) تبدیل می‌کنند. علاوه براین، بیشتر روش‌ها به دنبال پیدا کردن یک جهت و مینیمم سازی در راستای آن جهت هستند که با آن‌ها روش‌های جست و جوی خطی گویند. این جست و جوی خطی، معادل است با مینیمم سازی یک تابع یک متغیره نامقید یا با قیود ساده. در نهایت، چندین تکنیک بهینه سازی نامقید را می‌توان به طور طبیعی گسترش داد تا فرآیند حل مسائل مقید را فراهم کرده و ایجاد انگیزه کند.

[1] J-Bavali@stu.scu.ac.ir
[2] basirzad@scu.ac.ir

۲ جست و جوی خطی بدون استفاده از مشتق

جست و جوی یک بعدی، چهارچوب اغلب الگوریتم‌ها برای حل مسائل برنامه ریزی غیرخطی است. بیشتر الگوریتم‌های برنامه ریزی غیرخطی بصورت زیر عمل می‌کنند: برای تابع $f(x)$ و نقطه x_k، بردار بهبود دهنده d_k را پیدا می‌کنیم و سپس در راستای آن جهت، به محاسبه و یافتن طول گام مناسب و کافی λ_k پرداخته و به نقطه بهتر $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$، دست پیدا می‌کنیم. این فرآیند تکرار می‌شود تا به اندازه کافی به جواب بهینه نزدیک شویم و گام توقف برقرار شود. برای پیدا کردن طول گام مناسب و کافی λ_k، باید مساله فرعی $\min_{\lambda} f(x_k + \lambda d_k)$، که یک مساله جست و جوی یک بعدی است، حل شود. ممکن است $\lambda \in \mathbb{R}$، یا $\lambda \geq 0$ و یا λ به گونه‌ای تعریف شود که $x_k + \lambda d_k$، شدنی باشد.

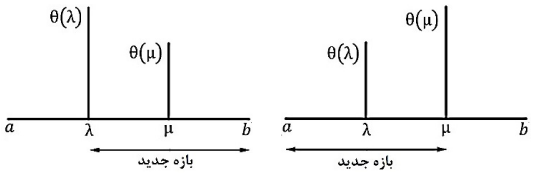
فرض کنید می‌خواهیم تابع یک متغیره $\theta(\lambda)$ را مینیمم کنیم. یک نگرش این است که θ' را مساوی صفر قرار داده و برحسب λ حل کنیم. توجه شود که در اغلب موارد تابع θ بر حسب تابع چند متغیره $f(x)$ تعریف می‌شود؛ یعنی برای نقطه و بردار داده شده x و d، تعریف می‌شود $\theta = f(x + \lambda d)$. اگر تابع f مشتق‌پذیر نباشد، تابع θ نیز مشتق‌پذیر نیست. اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\theta'(\lambda) = d^t \nabla f(x + \lambda d)$. از این رو، به منظور پیدا کردن مقدار λ، باید معادله $d^t \nabla f(x + \lambda d) = 0$ را که معمولا برحسب λ یک معادله غیر خطی است، حل کنیم. علاوه براین مقدار λ که از حل این معادله به دست می‌آید، لزوما مینیمم نیست و ممکن است مینیمم موضعی، ماکزیمم موضعی یا حتی یک نقطه زینی باشد. به این دلایل خاص و به جز در برخی موارد خاص، برای مینیمم سازی تابع θ، از قرار دادن مشتق آن مساوی با صفر، اجتناب می‌کنیم. در عوض، برای این کار به برخی تکنیک‌های عددی متوسل می‌شویم.

در ادامه چندین روش تکراری را که بدون استفاده از مشتق، به مینیمم سازی تابع یک متغیره $\theta(\lambda)$ روی یک بازه بسته و کراندار مانند $a \leq \lambda \leq b$ می‌پردازند، ارائه می‌دهیم. با توجه به اینکه مکان دقیق مینیمم تابع θ روی بازه $[a, b]$ مشخص نیست، استراتژی این روش‌ها به این صورت است که در حین فرآیند جست و جو، تشخیص می‌دهند که مینیمم در کدام بخش از بازه، قرار ندارد و سپس آن بخش را حذف کرده و بازه را کوچکتر می‌کنند.

تعریف ۱.۲. بازه $[a, b]$ را برای تابع $\theta(\lambda)$، **بازه عدم قطعیت** گویند، اگر مقدار مینیمم تابع θ، یعنی λ در این بازه واقع شده باشد.

قضیه زیر نشان می‌دهد که اگر تابع θ شبه محدب اکید باشد، آنگاه بازه عدم قطعیت را می‌توان با استفاده از ارزیابی θ در دو نقطه از بازه، کوچکتر کرد.

قضیه ۱.۲. فرض کنید که تابع $\theta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ روی بازه $[a, b]$، یک تابع شبه محدب اکید باشد. دو مقدار $\lambda, \mu \in [a, b]$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\lambda < \mu$. اگر $\theta(\lambda) > \theta(\mu)$ باشد، آنگاه $\theta(z) \geq \theta(\mu)$ برای هر $z \in [a, \lambda)$. همچنین اگر داشته باشیم $\theta(\mu) \leq \theta(\lambda)$، آنگاه



شکل ۱ : کاهش بازه عدم قطعیت

$\theta(z) \geq \theta(\lambda)$ برای هر $z \in (\mu, b]$.

از قضیه ۴ نتیجه می‌شود که تحت فرض شبه محدب اکید بودن θ، اگر $\theta(\lambda) > \theta(\mu)$ باشد، بازه جدید عدم قطعیت به صورت $[\lambda, b]$ و اگر $\theta(\lambda) \leq \theta(\mu)$ باشد، بازه جدید عدم قطعیت به صورت $[a, \mu]$ خواهد بود. این دو حالت را در شکل ۱ ببینید. حال چندین روش تکراری، برای مینیمم سازی یک تابع شبه محدب اکید روی یک بازه بسته و کراندار با استراتژی کاهش بازه عدم قطعیت، ارائه می‌دهیم.

۳ روش‌های جست و جوی تکراری

روش‌های کارآمدتری وجود که آن روش‌ها از اطلاعات تولید شده در تکرارهای قبل، برای قرار دادن در تکرار بعد، استفاده می‌کنند. سه روش جست و جوی تکراری که در اینجا به آن‌ها اشاره خواهیم کرد، عبارتند از: روش دو بخشی، روش نسبت طلایی و روش فیبوناچی.

۱.۳ روش دوبخشی

مینیمم سازی تابع $\theta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، روی بازه $[a_1, b_1]$، را در نظر بگیرید. در روش جست و جوی تکراری دو بخشی، در تکرار kام، دو مقدار λ_k و μ_k را با فاصله یکسان $\varepsilon > 0$ از مرکز بازه $[a_k, b_k]$ انتخاب می‌کنیم، یعنی به صورت زیر:

$$\lambda_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon, \quad \mu_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon, \qquad (1)$$

که در اینجا $\varepsilon > 0$ یک اسکالر دلخواه، ثابت در کل الگوریتم و به اندازه کافی کوچک، انتخاب می‌شود. بسته به مقدار تابع θ در λ_k و μ_k، طبق قضیه ۴، بازه جدید عدم قطعیت، بدست می‌آید؛ یعنی اگر $\theta(\lambda_k) < \theta(\mu_k)$ باشد، $a_{k+1} = a_k$ و $b_{k+1} = \mu_k$ قرار دهید و در غیر اینصورت، $a_{k+1} = \lambda_k$ و $b_{k+1} = b_k$ قرار دهید. این فرآیند با دو مشاهده و مقدار جدید، تکرار شده تا اینکه شرط توقف $l_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} < l$، برقرار شود؛ یعنی طول بازه عدم قطعیت در شروع تکرار $k+1$ام، از مقدار قابل قبول و تعریف شده $l > 0$ کمترباشد.

در روش دو بخشی، برای تخمین طول بازه عدم قطعیت در شروع تکرار $k+1$ام، با توجه به رابطه بازگشتی $l_{k+1} = \frac{1}{2}l_k + \varepsilon$، خواهیم داشت:

$$l_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2^k}l_1 + 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right),$$

که در اینجا $l_1 = b_1 - a_1$ طول اولیه بازه عدم قطعیت است.

تذکر ۱.۳. در روش دو بخشی، طول بازه عدم قطعیت جدید $b_{k+1} - a_{k+1}$، به خروجی تکرار kام، وابسته نیست؛ با این ضعف که در هر تکرار، دو مشاهده و ارزیابی اضافه، نیاز هست. به وضوح هر چه میزان محاسبات و ارزیابی‌ها بیشتر باشد، سرعت پردازش الگوریتم در رسیدن به جواب پایین می‌آید. به این ترتیب دنبال روش‌هایی هستیم که مجهز به دو ویژگی زیر باشند:

(الف) در آن‌ها، طول بازه عدم قطعیت جدید $b_{k+1} - a_{k+1}$، به خروجی تکرار kام، وابسته نباشد.

(ب) این مزیت را داشته باشند که در هر تکرار، تنها یک مشاهده و ارزیابی اضافه، انجام شود.

در ادامه به دو روش اشاره شده است که دارای این ویژگی‌ها هستند.

۲.۳ روش نسبت طلایی

در روش نسبت طلایی، برای برآورده شدن ویژگی (الف) در توجه ۱.۳ ، نقاط λ_k و μ_k، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

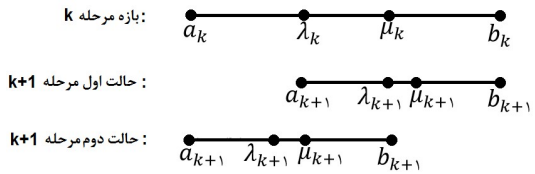
$$\lambda_k = a_k + (1 - \alpha)(b_k - a_k) \qquad (۲)$$

$$\mu_k = a_k + \alpha(b_k - a_k) \qquad (۳)$$

که در اینجا مقدار ثابت $\alpha \in (0, 1)$ می‌باشد. برای دارا بودن ویژگی (ب)، دو حالت وجود دارد:

حالت اول: اگر $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$ باشد، $a_{k+1} = \lambda_k$ و $b_{k+1} = b_k$ قرار دهید. نظر به برآورده شدن ویژگی (ب) یعنی تساوی $\lambda_{k+1} = \mu_k$ و با اعمال کردن رابطه ۲ برای $k+1$ به جای k، به معادله درجه دوم $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ برحسب α می‌رسیم.

حالت دوم: اگر $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$ باشد، $a_{k+1} = a_k$ و $b_{k+1} = \mu_k$ قرار دهید. نظر به برآورده شدن ویژگی (ب) یعنی تساوی $\mu_{k+1} = \lambda_k$ و با اعمال کردن رابطه ۳ برای $k+1$ به جای k، به معادله درجه دوم $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ برحسب α می‌رسیم. با حل این معادله درجه دوم و شرط $\alpha \in (0, 1)$، مقدار $\alpha = 0/618$ بدست می‌آید.



شکل ۲: نحوه تقسیم بازه باقیمانده در تکرار $k+1$

این دو حالت، در شکل ۲ نشان داده شده است. این فرآیند، تکرار شده تا اینکه شرط توقف $l_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} < l$ برقرار شود. طول بازه عدم قطعیت در شروع تکرار $k+1$ام، با توجه به رابطه بازگشتی $l_{k+1} = \alpha l_k$، به این صورت بدست می‌آید که $l_{k+1} = \alpha^{k-1} l_1$؛ به این ترتیب تعداد مشاهدات لازم k، برای برقراری شرط توقف، از رابطه $\alpha^{k-1} \leq \frac{l}{l_1}$، حاصل خواهد شد.

۳.۳ روش فیبوناچی

در روش فیبوناچی، همان استراتژی روش نسبت طلایی به کار می‌رود با این تفاوت که به جای در نظر گرفتن مقدار ثابت α برای تمام مراحل تکرار، از نسبت متغیر $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$ در هر تکرار، برای کاهش بازه عدم قطعیت، استفاده می‌شود که در اینجا مقدار n، تعداد کل تکرارهای مدنظر و مجموعه مقادیر $\{F_v\}$، دنباله اعداد فیبوناچی، تعریف شده به صورت زیر هستند:

$$F_{v+1} = F_v + F_{v-1} v = 1, 2, \ldots, \quad F_0 = F_1 = 1$$

که این دنباله بصورت مجموعه $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots\}$ خواهد بود. به این ترتیب نقاط λ_k و μ_k، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\lambda_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k), \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{۴}$$

$$\mu_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k), \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{۵}$$

به سادگی می‌توان دید که در تکرار $k+1$، با توجه به روابط ۴ و ۵، ویژگی (ب) در توجه ۱.۳، در هر دو حالت ارزیابی تابع، برآورده خواهد شد؛ یعنی اگر $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$ باشد، $\lambda_{k+1} = \mu_k$ و اگر $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$ باشد، $\mu_{k+1} = \lambda_k$ رخ خواهد داد. این فرآیند، تکرار شده تا اینکه شرط توقف $l_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} < l$ برقرار شود. در هر دو حالت، طول بازه عدم قطعیت در شروع تکرار $k+1$ام، از رابطه بازگشتی $l_{k+1} = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} l_k$، به دست می‌آید که برای آن می‌توان نوشت $l_{k+1} = \frac{l_1}{F_n}$. به این ترتیب تعداد مشاهدات لازم n برای برقراری شرط توقف، از رابطه $F_n \geq \frac{l_1}{l}$ محاسبه می‌شود.

جدول ۱: خلاصه محاسبات روش جست و جوی کلی

k	a_k	b_k	λ_k	μ_k	$\theta(\lambda_k)$	$\theta(\mu_k)$
۱	−۳/۰۰۰۰	۵/۰۰۰۰	۰/۱۶۰۰	۱/۸۴۰۰	۰/۳۴۵۶	۷/۰۶۵۶
۲	−۳/۰۰۰۰	۱/۸۴۰۰	−۱/۳۲۰۰	۰/۱۶۰۰	−۰/۸۹۷۶	۰/۳۴۵۶
۳	−۳/۰۰۰۰	۰/۱۶۰۰	−۱/۵۲۰۰	−۱/۳۲۰۰	−۰/۷۲۹۶	−۰/۸۹۷۶
۴	−۱/۵۲۰۰	۰/۱۶۰۰	−۱/۳۲۰۰	−۰/۰۴۰۰	−۰/۸۹۷۶	−۰/۰۷۸۴
۵	−۱/۵۲	−۰/۰۴۰۰	−۰/۲۴۰۰	−۱/۳۲۰۰	−۰/۴۲۲۴	−۰/۸۹۷۶
۶	−۰/۲۴۰۰	−۰/۰۴۰۰				

۴ روش جست و جوی کلی

۱.۴ استراتژی روش کلی

مینیمم سازی تابع شبه محدب اکید (تک مدی) $\theta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را روی بازه $[a_1, b_1]$، در نظر بگیرید. در اینجا یک روش جست و جوی تکراری موسوم به روش کلی ارائه می‌دهیم، به این صورت که در تکرار kام، برای کاهش بازه عدم قطعیت، از ضرایب α_k که اعدادی بین صفر و یک هستند، استفاده می‌شود؛ علاوه براین، α_kها باید به گونه‌ای باشند که ویژگی‌های توجه ۱.۳ برآورده کنند.

۵ دست‌آوردهای پژوهش

۱.۵ حل یک مساله بهینه سازی با روش کلی و دقت محاسبات روش

مثال ۱.۵. مساله زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{-۳\leq\lambda\leq۵} \lambda^۲ + ۲\lambda.$$

می‌دانیم که تابع هدف، یک تابع شبه محدب اکید است و مینیمم دقیق آن در $\lambda = -۱$ رخ می‌دهد. اگر مقدار نهایی طول بازه عدم قطعیت برابر ۰/۲ در نظر گرفته شود، تعداد تکرارهای لازم در روش فیبوناچی برابر است با $n = ۹$؛ این در حالی است که تعداد تکرارهای روش کلی برابر ۵ تکرار خواهد بود. خلاصه محاسبات روش کلی، را می‌توانید در جدول ۱ ببینید:

مراجع

[1] Bazaraa, M.S., Sherali, H.D. and Shetty, C.M. (2005), *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, New Jersey.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

آموزش ریاضی بر اساس واقعیت افزوده

ندا توانایی [۱] شهریار ارم [۲]

[۱] دانشجوی دکترای آموزش ریاضی، دانشگاه آزاد تهران مرکز
[۲] کارشناس ارشد آموزش ریاضی، دبیر ریاضی شهرستان بهبهان

چکیده

فناوری مدرن راه‌های متعددی برای ارتقای فرآیند آموزش و یادگیری ارائه می‌دهد که در نتیجه آن، ابزارهای متنوعی برای فعالیت‌های آموزشی درون و بیرون کلاس درس توسعه یافته‌اند. امروزه بسیاری از برنامه‌های آموزشی از فناوری واقعیت افزوده بهره می‌برند تا منابع مکملی برای یادگیری دانش‌آموزان فراهم کنند. نرم‌افزار جئوجبرا این امکان را می‌دهد تا اشیاء هندسی ترسیم شده و سپس با استفاده از نرم‌افزارها یا اپلیکیشن‌های واقعیت افزوده در تلفن‌های همراه یا تبلت‌ها به صورت سه‌بعدی مشاهده شوند. این ابزار می‌تواند به‌عنوان منابعی برای آموزش ریاضیات در مدارس یا دانشگاه‌ها استفاده شود. واقعیت افزوده امکان درک مفاهیم پیچیده ریاضی، بخصوص هندسه را فراهم می آورد که به طور معمول و با روشهای مرسوم قابل یادگیری و فهم نیستند. این مقاله به معرفی واقعیت افزوده نرم‌افزار جئوجبرا در آموزش ریاضی می‌پردازد؛ به‌ویژه در حوزه‌ای که دانش‌آموزان می‌توانند اشیاء هندسی سه‌بعدی را مشاهده کرده تا ساختار آن‌ها را بهتر درک کنند، همچنین بر روی دانش آموزان پایه هشتم مدرسه ای در بهبهان اجرا گردید که تا حد زیادی ضعف دانش آموزان را در مفاهیم سطح و حجم برطرف نمود و افزایش علاقمندی دانش آموزان را در پی داشت. توصیه می شود مولفین کتب درسی، در جهت بهبود درک و فهم دانش آموزان، کیوآر کدهایی در کنار فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های مباحث هندسه ایجاد کنند بطوریکه دبیران و دانش‌آموزان بتوانند شکل مربوط به آن سوال را با استفاده از واقعیت افزوده مشاهده کنند.

کلمات کلیدی: هندسه، نرم افزار جئوجبرا، واقعیت افزوده، آموزش ریاضی، پایه هشتم

۱ مقدمه

در حال حاضر، فناوری به‌سرعت در حال پیشرفت است. یکی از عناصر این پیشرفت، ظهور صنعت ۴/۰ است که بر یادگیری دیجیتال تأکید دارد. به همین دلیل، فناوری‌های گوناگونی در حال توسعه هستند که یکی از آن‌ها فناوری واقعیت افزوده (AR) است. اگرچه استفاده از واقعیت افزوده در آموزش هنوز نسبتاً نوپا است، اما با سرعت زیادی در حال پیشرفت می‌باشد. مفاهیم ریاضی، به‌ویژه در زمینه هندسه، گاهی برای دانش‌آموزان دشوار هستند؛ زیرا مستلزم تجسم سه‌بعدی مفاهیم هستند. بنابراین، واقعیت مجازی (VR) می‌تواند به‌صورت مؤثری در بهبود فرآیند یادگیری از طریق تحریک

[1] neda.tavanaie@gmail.com
[2] shariyareram@email.com

کنجکاوی و افزایش انگیزه دانش‌آموزان به کار رود. آزوما (۱۹۹۷) تعریف دقیقی از واقعیت افزوده ارائه می‌دهد و آن را شکلی از دگرگونی واقعیت مجازی توصیف می‌کند. واقعیت افزوده به کاربران اجازه می‌دهد دنیای واقعی را در کنار اشیاء مجازی مشاهده کنند.

به علت ظهور فناوری های نوین و رقابتهای جهانی در قرن حاضر، فرآیند آموزش قادر خواهد بود پیچیدگی دنیای واقعی را هرچه واقعی تر و ساده تر در محیط های یادگیری منعکس کند. این امر زمانی امکان پذیر است که محیط یادگیری به یادگیرنده اجازه دهد وظایفش را در زمینه ای که بیشتر شبیه زندگی واقعی اوست یاد بگیرد. واقعیت افزوده محیطی همه جانبه است که با ترکیبی از ابزارهای شبیه سازی و حس غوطه‌وری فرصت‌هایی را برای این نوع از یادگیری فراهم می‌کند. همچنین بازنمودهایی از مسائل انتزاعی را امکان پذیر می‌کند و بدین ترتیب دانش آموز با استفاده از مشاهده های مستقیم آزمایش و تعامل در محیطی امن، الگویی ذهنی از نمادهای انتزاعی در ذهن خود می‌سازد. مقالاتی به بررسی پتانسیل ادغام نرم افزار جئوجبرا با فناوری واقعیت افزوده برای افزایش آموزش ریاضی می‌پردازد. این مطالعات نتایج امیدوارکننده‌ای را در استفاده از واقعیت افزوده نرم افزار جئوجبرا برای ارتقای مهارت‌های فضایی، درک مفهومی و مشارکت در زمینه‌هایی مانند هندسه، جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال نشان داده‌اند [۲].

در این پژوهش، از نرم‌افزار جئوجبرا در یک کلاس پایه هشتم یکی از مدارس شهرستان بهبهان، به‌منظور طراحی اشیای هندسی سه‌بعدی برای استفاده در اپلیکیشن‌های واقعیت افزوده مورد استفاده قرار گرفت که نگارندگان با استفاده از نرم افزار جئوجبرا به آموزش مفاهیم ریاضی و حل مسائل پرداختند. همچنین قابلیتهای برنامه واقعیت افزوده جئوجبرا معرفی می‌گردد.

۲ تعریف مفاهیم

دانش پایه‌ای موردنیاز این پژوهش، از جمله مفاهیم و اصول و روش‌هایی که با توسعه نرم‌افزارهای کاربردی مرتبط هستند، ارائه می شود همچنین تعاریف متفاوتی که محققان حوزه‌های مختلف از جمله علوم، رایانه و فناوری آموزشی ارائه داده‌اند، بیان می گردد.

۱.۲ پروژه جئوجبرا

پروژه‌ی جئوجبرا یک پروژه بین المللی، عام‌المنفعه با هدف آموزش، تولید محتوا و انجام پژوهش‌های مرتبط با نرم‌افزار جئوجبرا است. جئوجبرا از بستر دانشگاه سالزبورگ اتریش به عنوان کار پژوهشی آقای مارکوس هوهن وارتر به وجود آمد و در پی حمایت‌های این دانشگاه و در ادامه ، حمایت دیگر دانشگاه‌ها مانند دانشگاه کمبریج و فلوریدا، بنیان علمی محکمی در این پروژه گذاشته شد. ماموریت این پروژه، توانمندسازی دانش‌آموزان و معلمین در تمام سطوح برای یادگیری و تدریس ریاضی با استفاده از نرم افزار و محتوای آموزشی تعاملی رایگان است. پروژه جئوجبرا در ایران از سال ۲۰۰۶



شکل ۱: طیف واقعیت_مجازی

مورد حمایت قرار گرفت. علاقمندان به توسعه آن در ایران، با انجام پژوهش‌های دانشگاهی، برگزاری کارگاه‌های آموزشی و تولید محتوا، در این امر مشارکت داشتند. آقای دکتر خسرو داوودی، آقاي دکتر سعید امین الرعایا، آقاي مهندس امیر قاضی میرسعید، آقاي میلاد افشین منش، آقاي سید مهدی بشارت و ... بنیانگذاران این پروژه در ایران هستند. اعضا و مدرسان انستیتو جئوجبرا ایران، خانم پروانه بهزادی آزاد_ استان تهران، آقای علیرضا غلامیان - استان فارس، آقاي ابوبکر ملازهی - استان سیستان و بوچستان، خانم کیمیا مهری - استان البرز، خانم هدی برناک - استان تهران، خانم لیلا طوفاني_ استان آذربایجان شرقي و آقای محمد رئوفی‌فر_ استان خراسان رضوی می‌باشند (سایت جامعه جئوجبرای ایران).

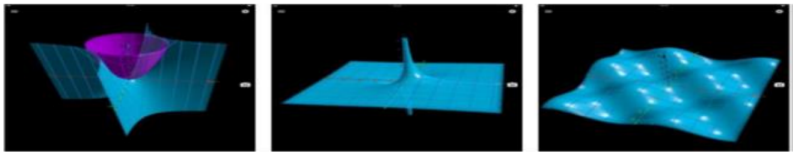
۲.۲ واقعیت افزوده

واقعیت افزوده فناوری نوینی است که دنیای واقعی و مجازی را با استفاده از تکنیک‌های جایگزینی اشیاء سه‌بعدی یا واسطهای انسان_ ماشین با یکدیگر ترکیب می‌کند. این فناوری تجربه‌ای شبیه‌سازی‌شده از دنیای واقعی را برای کاربران فراهم می‌سازد، به‌طوری‌که می‌توانند ببینند، بشنوند، بو کنند و احساس کنند. فناوری مجازی این امکان را می‌دهد که کاربران مستقیماً در فعالیت‌ها مشارکت داشته باشند. اساساً این فناوری لایه‌هایی از گرافیک و محرک‌های حسی دیگر را در زمان واقعی به دنیای واقعی اضافه می‌کند. واقعیت افزوده اشیاء مجازی را در محیط واقعی و لحظه‌ای قرار می‌دهد که از طریق دستگاه‌های نمایش مختلف قابل مشاهده‌اند و این محیط را به یک رابط دیجیتالی تبدیل می‌کند.

این طیف، تمامی ترکیبات ممکن بین اشیاء واقعی و مجازی را در بر می‌گیرد. در سمت چپ این طیف، محیط کاملاً واقعی بدون هیچ‌گونه ارائه رایانه‌ای وجود دارد و در سمت راست، محیطی کاملاً مجازی قرار دارد که تمامی عناصر آن توسط رایانه تولید شده‌اند.

۳.۲ واقعیت افزوده در نرم افزار جئوجبرا

واقعیت افزوده در نرم‌افزار جئوجبرا، نمودارها و اشیاء سه‌بعدی را در محیط واقعی به نمایش می‌گذارد و پیوندی میان دنیای واقعی و دنیای انتزاعی ریاضی برقرار می‌کند. این برنامه می‌تواند اشیاء ریاضی را روی هر سطحی قرار دهد، به کاربران اجازه دهد به اطراف آن‌ها حرکت کرده و از زوایای مختلف تصاویر را ثبت کنند. با این قابلیت، دانش‌آموزان می‌توانند اشیاء سه‌بعدی را مانند منشورها مدل‌سازی کرده و درک بهتری از آن‌ها داشته باشند. همچنین می‌توانند درون این اشیاء مجازی قدم بگذارند و از



شکل ۲: اپلیکیشن واقعیت افزوده جئوجبرا

زوایای گوناگون تصاویر بگیرند، که این تجربه‌ای منحصربه‌فرد برای یادگیرندگان محسوب می‌شود.

ویژگی‌های واقعیت افزوده در نرم‌افزار جئوجبرا عبارت‌اند از: ساخت اشیاء سه‌بعدی ریاضی و قرار دادن آن‌ها روی میز، زمین یا هر سطح صاف، انجام فعالیت‌هایی برای کشف ریاضیات در محیط واقعی با گرفتن اسکرین‌شات از زوایای مختلف، بررسی پتانسیل واقعیت افزوده در یادگیری و آموزش ریاضی. به طور کلی مزایای استفاده از واقعیت افزوده شامل:

تجسم بهتر و افزایش سرعت یادگیری، بهبود دید کلی نسبت به مفاهیم آموزشی پیچیده، افزایش تعامل و علاقه افراد به یادگیری، عدم نیاز به آموزشهای پیچیده کاهش تجهیزات آموزشی، ایجاد محیط آموزشی ایمن و کارامد، افزایش تعامل و علاقه افراد به آموزش، بهبود مهارت کار تیمی، قابلیت دسترسی بالا و رایگان بودن.

۴.۲ هندسه

هندسه یکی از دروس پایه در آموزش ریاضی است که بر توصیف و تحلیل اشکال دوبعدی و سه‌بعدی تمرکز دارد. در این درس، با استفاده از تجسم و استدلال فضایی، از مدل‌های ریاضی (مدل‌های هندسی) برای حل مسئله استفاده می‌شود. امروزه فناوری‌های متنوعی برای آموزش هندسه توسعه یافته‌اند که امکان مدیریت بهتر فرآیند یادگیری را فراهم می‌کنند. پژوهش‌ها نشان داده‌اند که استفاده مؤثر از فناوری می‌تواند درک مفاهیم جبری و هندسی را در میان دانش‌آموزان بهبود بخشد.

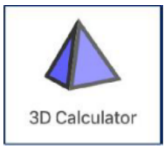
۵.۲ نرم‌افزار جئوجبرا

در پایان سال ۲۰۱۴، نسخه ۵.۰ نرم‌افزار جئوجبرا با قابلیت گرافیک سه‌بعدی معرفی شد تا مطالعه هندسه فضایی را با فراهم کردن امکان ایجاد، باز کردن، برش دادن و مشاهده اشکال از زوایای مختلف تسهیل کند. دوره‌های آموزشی طراحی و تولید محتوای درسی با استفاده از این نرم‌افزار برای معلمان و کارکنان آموزشی مناسب هستند؛ با این حال، معلمان باید همواره به این نکته توجه داشته باشند که هدف اصلی، ارتقای توانایی دانش‌آموزان در تحلیل ویژگی‌ها و ساختارهای عددی و هندسی است. در این مسیر، مهارت‌های تجسم فضایی دانش‌آموزان بهبود یافته و آنان توانایی استدلال و استفاده هدفمند از سیستم‌های مکان‌یابی را کسب می‌کنند. تقاضا برای تولید محتوای آموزشی با وضوح و کارآمدی بیشتر برای یادگیرندگان، روزبه‌روز در حال افزایش است.



شکل ۳: نسخه‌های آفلاین اپلیکیشن جئوجبرا

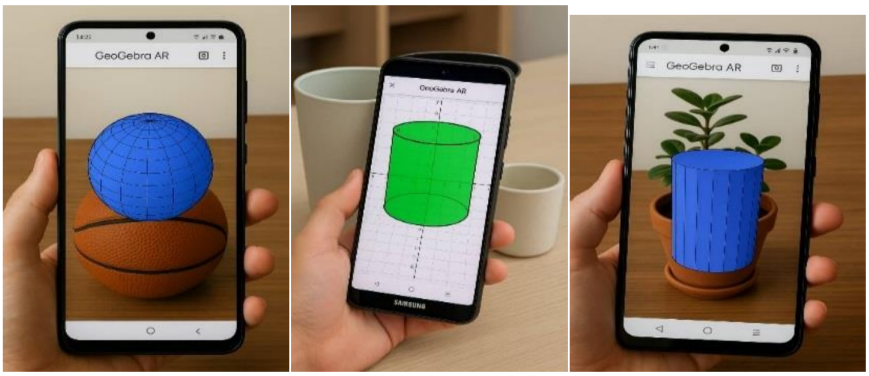
جئوجبرا یک نرم‌افزار ریاضی است که امکان ترسیم نمودارها و ایجاد اشکال هندسی متنوع را فراهم می‌کند، بیش از ۷۰ زبان را پشتیبانی کرده و قابلیت ذخیره‌سازی داده‌ها در گوگل درایو را داراست. این نرم‌افزار به‌صورت رایگان در دسترس تمامی سطوح آموزشی ریاضی قرار دارد و مباحثی نظیر هندسه، جبر، نمودار، حساب دیفرانسیل و انتگرال را پوشش می‌دهد.دانش فناوری، جزئی جدانشدنی از محتوای آموزشی است، و آموزش اثربخش ریاضی مستلزم درک رابطه متقابل میان فناوری، آموزش و مفاهیم ریاضی است. فناوری‌های نوین از جمله فناوری‌های ریاضی، بر کاربرد عملی دانش در حل مسائل واقعی و توسعه فرایندها یا محصولات نوآورانه تأکید دارند؛ فرآیندهایی که در زندگی حرفه‌ای کاربردی بوده و موجب تحول در نظام آموزش ریاضی در سطح جهانی می‌شوند. در گرافیک‌های رایانه‌ای، اشیای هندسی معمولاً شامل خطوط، چندضلعی‌ها و چندوجهی‌ها هستند که در فضای سه‌بعدی وجود داشته و ویژگی‌های آن‌ها از طریق مفاهیمی چون طول، زاویه و حجم قابل توصیف است. به‌طور کلی، در حوزه یادگیری هندسه فضایی، جئوجبرا به‌عنوان یک نرم‌افزار آموزشی قدرتمند و کاربرپسند در تمامی سطوح تحصیلی شناخته می‌شود. این نرم‌افزار علاوه بر آموزش هندسه، جبر، جداول عددی، محاسبات، نمودارها، حساب دیفرانسیل و انتگرال، و آمار، دارای این مزیت است که به‌صورت متن باز و رایگان در وب‌سایت رسمی خود به نشانی $www.geogebra.org$ برای اهداف آموزشی قابل استفاده است. ویژگی جدید این نرم‌افزار در زمینه مدیریت خودکار واقعیت‌های هندسی، زمینه‌ساز توسعه خودکار لایه‌های ریاضی بر روی تصاویری است که توسط تلفن‌های هوشمند در حین عبور از مکان‌های مختلف ثبت می‌شوند.کاربران می‌توانند از ابزارهای درون‌برنامه‌ای برای تولید تصاویر و مدل‌های سه‌بعدی استفاده کنند، یا از کاربرگ های طراحی‌شده توسط سایر کاربران که در سرور جئوجبرا به اشتراک گذاشته شده‌اند بهره ببرند. این کاربرگه‌ها برای استفاده آفلاین در برنامه‌های جئوجبرا بر روی سیستم‌عامل‌های آی او اس، اندروید، ویندوز، مک، کروم‌بوک و لینوکس به‌صورت رایگان قابل دانلود هستند. میلیون‌ها کاربر در سراسر جهان از جئوجبرا برای یادگیری ریاضیات و علوم بهره می‌برند.



شکل ۴: برنامه مناسب برای نصب در گوشی



شکل ۵: برنامه های مناسب برای نصب در گوشی های اندروید



شکل ۶: نمونه کار با برنامه اندروید

۳ روش استفاده از برنامه ها

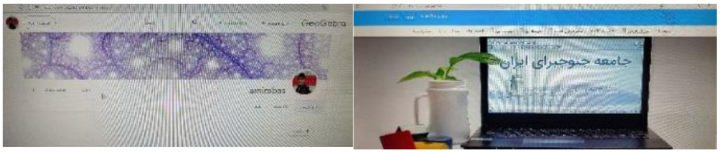
قابلیت واقعیت افزوده در نرم افزار جئوجبرا هم برای گوشی‌های دارای سیستم عامل «آی او اس» و هم برای گوشی‌های دارای سیستم عامل «اندروید» موجود است.

برنامه «ماشین حساب سه بعدی» که نگاره آن در شکل ۱ نمایش داده شده است را از «اپ استور» برای گوشی‌های آیفون یا از «پلی استور» یا «کافه بازار» برای گوشیهای اندروید دانلود و نصب کنید.

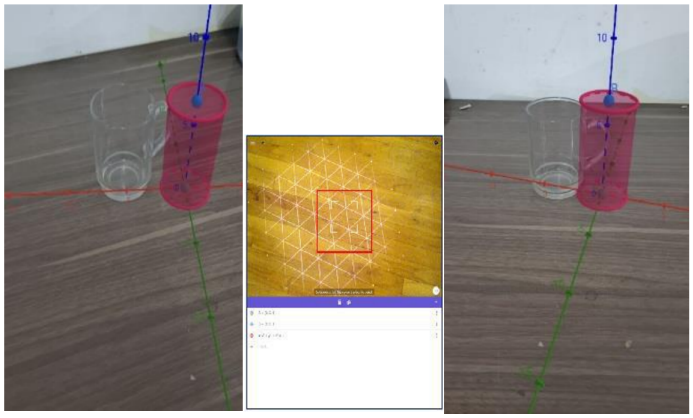
اگر از گوشی اندروید قدیمی استفاده می‌کنید ممکن است لازم باشد «سرویس گوگل برای واقعیت افزوده» که نگاره آن در شکل ۵ نشان داده شده است را نیز نصب کنید. این سرویس در نسخه‌های جدید اندروید وجود دارد.

برنامه «ماشین حساب سه بعدی »را باز کنید. به کمک ابزارهای آن در قسمت «ابزار» که در گوشه پایین سمت راست برنامه موجود است، می توانید محتوای مورد نظر خود را بسازید و به کمک ماشین حساب «جبر» که در گوشه پایین سمت چپ موجود است، ویژگی‌های اشیائی را که استفاده کرده‌اید تغییر داده یا اشیاء جدیدی را با نوشتن کد دستوری آنها وارد کنید.

در شکل ۶ با استفاده از ابزار رسم یک استوانه و یک کره ایجاد کرده‌ایم.



شکل ۷: ایجاد حساب کاربری شخصی و بارگذاری محتواهای تولید شده در وب سایت جئوجبرا



شکل ۸: فعال شدن حسگر تشخیص سطح در برنامه واقعیت افزوده در نرم افزار جئوجبرا

همچنین می‌توانید در نمای سه بعدی جئوجبرای کلاسیک که روی رایانه خود نصب کرده‌اید یک فایل بسازید و در حساب کاربری خود به صورت خصوصی یا عمومی ذخیره کنید؛ سپس فایل ایجاد شده را در گوشی خود باز کنید و دکمه واقعیت افزوده را که پائین سمت راست صفحه نمایش برنامه قرار دارد فشار دهید. شکل ۷ یک نمونه حساب کاربری شخصی و محتواهایی را نشان می‌دهد که در رایانه شخصی تولید شده و در وب سایت بارگذاری شده‌اند. تعدادی از تصاویر : $https$ $//www.googebra.org$ انتخاب شده در این مقاله به همین شیوه از حساب کاربری نمایش داده شده به واقعیت افزوده تبدیل شده‌اند.

مشاهده می‌کنید که همه چیز ناپدید می‌شود و محیط اطراف خود و اجسام حقیقی محیط را بر روی صفحه گوشی خواهید دید. دستگاه خود را افقی بگیرید تا زمین را ببینید، سپس به آرامی حرکت دهید. چند ثانیه صبر کنید تا شبکه‌هایی مانند شکل ۸ ظاهر شوند. سعی کنید به آرامی به زمین نزدیک شوید.

دستگاه خود را ثابت نگه دارید، به آرامی حرکت کنید تا زمانی که یک کادر مربعی در وسط صفحه ظاهر شود. سپس روی کادر ظاهر شده ضربه بزنید تا شکلی را که در نمای سه بعدی ایجاد کرده بودید را ببینید. از انگشتان خود برای نزدیک کردن جسم استفاده کنید؛ در اطراف جسم می توانید حرکت کنید؛ به آرامی انگشت خود را روی صفحه حرکت دهید شکل را بچرخانید یا وارد شکل شوید و از این تجربه لذت ببرید [۱].

۴ نتیجه‌گیری

با کمک برنامه‌های واقعیت افزوده، معلمان می‌توانند فرآیند یادگیری را به‌گونه‌ای ارتقا دهند که درک مفاهیم برای دانش‌آموزان ساده‌تر و جذاب‌تر شود و انگیزه آن‌ها برای یادگیری افزایش یابد. آموزش ریاضیات می‌تواند بسیار جذاب‌تر باشد، اگر معلم بتواند از صفحات کتاب‌ها یا برگه‌های تمرین برای ساخت مدل‌های هندسی در محیط واقعیت افزوده استفاده کند؛ به‌گونه‌ای که دانش‌آموز با استفاده از تلفن همراه یا تبلت، بتواند اشیاء سه‌بعدی را که از صفحات کتاب بیرون می‌آیند، مشاهده کرده و از زوایای مختلف به آن‌ها نگاه کند. این رویکرد، شیوه‌ای نوین در یادگیری و آموزش محسوب می‌شود و می‌تواند به‌طور خاص در تدریس ریاضیات در مدارس یا دانشگاه‌ها مورد استفاده قرار گیرد. در این شیوه‌ی آموزشی، دانش‌آموزان قادر هستند تا اشیاء سه‌بعدی را بسازند، آن‌ها را دستکاری کرده و رفتارشان را در مواجهه با پارامترهای مختلف بررسی کنند. بنابراین، یادگیری با استفاده از واقعیت افزوده در نرم افزار جئوجبرا می‌تواند آموزش را متحول کرده و آن را نسبت به آموزش دوبعدی، تعاملی‌تر، جذاب‌تر و لذت‌بخش‌تر کند.

توصیه می شود مولفین کتب درسی، کیوآر کد هایی در کنار فعالیت ها، کار در کلاس ها و تمرین های مباحث هندسه ایجاد کنند بطوریکه دبیران و دانش آموزان بتوانند شکل مربوط به آن سوال را با استفاده از واقعیت افزوده مشاهده کنند.

مراجع

[۱] مهری، کیمیا؛ بهزادی آزاد، پروانه(۱۴۰۱). قابلیت واقعیت افزوده نرم افزار جئوجبرا و کاربرد آن در آموزش ریاضی. چهارمین کنفرانس ملی آموزش و کاربرد ریاضیات. کرمانشاه

[2] K. Kalaphath, Sh. Yoonsik, K. Shin-Jin, K. Ho-Young, and K.Soo Kyun, “Learning Media on Mathematical Education based on Augmented Reality”. (2021, March 31). KSII Transactions on Internet and Information Systems. Korean Society for Internet Information (KSII). https://doi.org/10.3837/tiis.2021.03.011

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

بازطراحی جستجوی خطی در بهینه‌سازی چندهدفه با رویکردی نوین

نیلوفر صالحی‌مکاری [۱] هادی بصیرزاده [۲]

[۱,۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

این پژوهش با هدف کاستن از هزینه‌های محاسباتی ناشی از جستجوی خطی آرمیژو در بهینه‌سازی چندهدفه، رویکردی نوین ارائه می‌کند. در روش پیشنهادی، طول‌گام بهینه در هر تکرار به‌وسیله یک شبکه عصبی پیش‌خور چندلایه برآورد می‌شود که بر داده‌های حاصل از اجرای قاعده آرمیژو بر مجموعه‌ای از مسائل معیار پیوسته و ناپیوسته آموزش دیده است. این جایگزینی، انتخاب گام را شتاب می‌بخشد و تعداد ارزیابی‌های تابع هدف را کاهش می‌دهد. هرچند وابستگی به داده‌های آموزشی باکیفیت و پیچیدگی محاسباتی شبکه از محدودیت‌های اصلی این روش محسوب می‌شوند، اما نتایج اولیه نشان می‌دهد که با به‌کارگیری شبکه‌های سبک‌تر، بهره‌گیری از داده‌های نزدیک‌تر به مرز واقعی و تلفیق با الگوریتم‌های تکاملی، می‌توان کارایی و یکنواختی مرز پارتو را به‌طور معناداری بهبود داد.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی چندهدفه، جستجوی خطی، شبکه عصبی، پیش‌بینی طول گام، مرز پارتو

بهینه‌سازی چند هدفه (MOO) شاخه‌ای مهم در علوم رایانه و مهندسی است که به حل مسائلی با چندین هدف گاهاً متضاد می‌پردازد. چنین مسائلی در حوزه‌هایی مانند طراحی سامانه‌های مهندسی، مدیریت زنجیره‌ی تأمین و برنامه‌ریزی انرژی پایدار به‌وفور دیده می‌شود [۱]. هدف اصلی در MOO، یافتن مجموعه‌ی جواب‌های غیرمغلوب است؛ یعنی جواب‌هایی که بهبود یک هدف، موجب کاهش عملکرد اهداف دیگر نباشد.

روش‌های گرادیانی (مانند الگوریتم تندترین کاهش) برای انتخاب طول گام مناسب از جستجوی خطی بهره می‌گیرند. قاعده‌ی آرمیژو [۲] یکی از روش‌های رایج است که با اعمال «شرط کاهش کافی» گام‌ها را تنظیم می‌کند. بااین‌حال در مسائل چندهدفه، این قاعده با چالش‌هایی روبه‌روست: مثل ارزیابی‌های پرتکرار و پرهزینه‌ی توابع هدف، گیر کردن در گام‌های بسیار کوچک در ساختارهای پیچیده، و دشواری در تولید مرز پارتوی متنوع.

پیشرفت‌های اخیر در یادگیری ماشین–به‌ویژه شبکه‌های عصبی–به بهبود رویه‌های MOO کمک کرده‌اند [۳]. برای نمونه، شبکه‌ها می‌توانند با پیش‌بینی نقاط بهینه یا ساده‌سازی تقریبی مسائل، کارایی

[1] N-SalehiMokari@stu.scu.ac.ir
[2] h.basirzadeh@scu.ac.ir

را ارتقا دهند [۴، ۵]. با این همه، تمرکز اغلب پژوهش‌ها بر بهبود کلی الگوریتم‌ها بوده و کمتر به ریزگام حیاتی «جستجوی خطی» پرداخته شده است.

این مقاله جایگزینی داده‌محور برای قاعده‌ی آرمیژو پیشنهاد می‌کند: یک شبکه‌ی عصبی چندلایه که طول گام مناسب را مستقیماً برآورد می‌کند. برآیند این جایگزینی، کاهش تعداد ارزیابی‌های تابعِ هدف و بهبود سرعت همگرایی به مرز پارتو است؛ ضمن آن‌که انعطاف‌پذیری بیشتری در مواجهه با ساختارهای مسئله‌ی پیچیده فراهم می‌آورد. ساختار مقاله بدین ترتیب است: بخش بعد روش پیشنهادی را توضیح می‌دهد؛ بخش ۳ نتایج تجربی را گزارش می‌کند؛ و در بخش ۳ جمع‌بندی و مسیرهای آتی ارائه می‌شود.

۱ روش‌شناسی

در این بخش، چارچوب «الگوریتم تندترین کاهش چندهدفه» به‌همراه یک شبکه‌ی عصبی چندلایه تشریح می‌شود که با هدف کاستن از ارزیابی‌های تابع هدف و بهبود همگرایی، نقش جستجوی خطی سنتی را بر عهده می‌گیرد.

الگوریتم تندترین کاهش چند هدفه برای مسئله‌ی زیر به‌کار می‌رود [۱]:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)).$$

در هر تکرار k، جهت کاهشی d_k از ترکیب گرادیان‌های توابع هدف با ضرایب لاگرانژ λ_i محاسبه می‌شود:

$$d_k = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x_k)$$

ضرایب λ_i با حل کمینه‌سازی زیرمسئله مربعی زیر و تحت قیود ساده‌ی احتمال به‌دست می‌آیند:

$$\min_{\lambda} \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x_k) \right\|^2, \text{s.t.} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

پس از محاسبه‌ی d_k، باید طولِ گامِ مناسب α_k تعیین شود. در روش کلاسیک، قاعده‌ی آرمیژو [۲] با ارزیابی‌های پیاپی تابع هدف، α_k را می‌یابد که در مسائل پیچیده هزینه‌زا است. در این پژوهش، یک شبکه‌ی عصبی چندلایه جایگزین به‌کار می‌رود تا α_k را سریع‌تر تخمین بزند. الگوریتم تا برقراری شرط توقف (برای مثال $\|d_k\| < 10^{-6}$) ادامه می‌یابد.

برای جایگزینی جستجوی خطی و کاهش هزینه‌ی محاسباتی، یک شبکه‌ی پیش‌خور چندلایه طراحی شد که طول‌گام مناسب را با دقت و سرعت مناسب برآورد می‌کند. معماری شبکه شامل ورودی (بردار

x_k و جهت کاهشی d_k)، سه لایه‌ی پنهان با تعداد نورون‌های متفاوت و یک لایه‌ی خروجی است. مجموعه‌ی آموزشی با ۱۰۰۰۰ نمونه از مسائل معیار $ZDT1$، $DTLZ1$–6، $kw2$ و $Hill$ ساخته شد. در فرایند یادگیری، از بهینه‌ساز Adam و تابع خطای MSE استفاده شده است.

۱.۰.۱ فرایند تولید داده و آموزش

نمونه‌های آموزشی از مسائل معیار چندهدفه گردآوری شده‌اند: $DTLZ1$–4 (۷ تا ۱۲ متغیر، ۳ هدف)، $kw2$ (۲ متغیر، ۲ هدف) و $Hill$ (۲ متغیر، ۲ هدف). تنوع ابعادی و پیچیدگی مرز پارتو، معیار انتخاب این خانواده بوده است [۱]. مراحل تولید داده به‌صورت زیر است:

- انتخاب x_k با نمونه‌برداری لاتین هایپرکیوب از دامنه‌ی مسئله برای پوشش یکنواخت.
- محاسبهٔ d_k با مشتقات اهداف و حل مسئله‌ی مربعی بالا.
- محاسبه‌ی طول‌گام با قاعده‌ی آرمیژو و تحدید آن به بازه‌ی $[0.01, 1]$.

ورودی‌ها استانداردسازی شده‌اند تا میانگین صفر و واریانس واحد داشته باشند. آموزش با Adam و نرخ یادگیری مناسب انجام شد [۳]. برای مهار بیش‌برازش، توقف زودهنگام پس از ۱۰ دوره اعمال شد.

۱.۱ پیاده‌سازی شبکه‌ی عصبی در الگوریتم

شبکه‌ی عصبی به‌عنوان جایگزین جستجوی خطی در الگوریتم تندترین کاهش چندهدفه پیاده‌سازی شده است. برای اطمینان از کیفیت طول‌گام‌ها، شرط کاهش کافی به فرآیند پیش‌بینی اضافه شده است.

این رویه با حذف جستجوی خطی کامل و تکیه بر پیش‌بینی طول‌گام، تعداد ارزیابی‌های تابع هدف را به‌طور محسوسی کاهش می‌دهد [۳].

۲ نتایج

روش پیشنهادی (شبکه‌ی عصبی) در کنار قاعده‌ی آرمیژو بر روی مسائل $DTLZ1$–4، $kw2$، kur و $Hill$ آزموده شد. معیارهای سنجش شامل زمان همگرایی، تعداد نقاط غیرمغلوب، شمار تکرارها و تعداد ارزیابی‌های تابع هدف است. هر آزمایش با چند نقطه‌ی شروعِ تصادفی و پنج بار تکرار اجرا شد. نتایج در جدول ۲ آمده است.

در مسائل ساده‌تر مانند $DTLZ1$، روش پیشنهادی زمان کمتری صرف کرده است، حال آن‌که در مسائل پیچیده‌تری مانند $DTLZ3$ زمان اجرا افزایش یافته است. تعداد نقاط غیرمغلوب به ماهیت مسئله وابسته بوده و در برخی موارد افزایش یافته است. به‌طور کلی، روش عصبی شمار تکرارها و

الگوریتم ۱ الگوریتم تندترین کاهش چندهدفه با شبکهٔ عصبی

ورودی: نقطه‌ی اولیه x_0، توابع هدف $f_1, \dots, f_m$، شبکه‌ی عصبی NN، مقیاس‌ساز Scaler، تعداد تکرار N_{iter}
خروجی: مرز پارتوی تقریبی P، $P \leftarrow \emptyset$
for $k = 0$ تا $N_{\text{iter}} - 1$ **do**
  محاسبه‌ی $g_i \leftarrow \nabla f_i(x_k)$ برای $i = 1, \dots, m$
  حل (۱) و به‌دست‌آوردن λ_i؛ سپس محاسبه‌ی d_k
  if $\|d_k\| < 10^{-6}$ یا x_k مشابه x_{k+1} **then**
    توقف
  if end
  $z \leftarrow [x_k,\ d_k]$، $z_{\text{scaled}} \leftarrow \text{Scaler.transform}(z)$
  $\alpha_k \leftarrow \text{NN}(z_{\text{scaled}})$
  while شرط آرمیژو برقرار نیست و $\alpha_k \geq 0.01$ **do**
    $\alpha_k \leftarrow \rho\, \alpha_k$ (پس‌روی؛ $0 < \rho < 1$)
  while end
  $x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k d_k$ با اعمال قیود دامنه
  $P \leftarrow P \cup \{\mathbf{f}(x_{k+1})\}$
for end
return استخراج نقاط غیرمغلوب از P

جدول ۱: مقایسهٔ قاعدهٔ آرمیژو و روش مبتنی بر شبکه‌ی عصبی

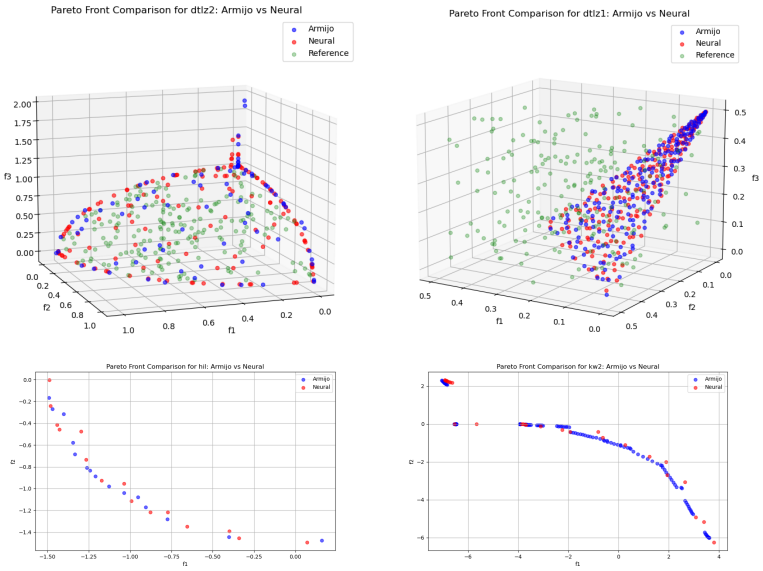
مسئله	آرمیژو				شبکه‌ی عصبی			
	زمان (ثانیه)	نقاط	تکرارها	ارزیابی‌ها	زمان (ثانیه)	نقاط	تکرارها	ارزیابی‌ها
$DTLZ1$	۱٫۰۸	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰۰	۰٫۷۹	۲۰۰	۶۰	۱۲۰
$DTLZ2$	۲۴٫۹۰	۸۴	۳۰۰	۳۰۰۰	۱۳۴٫۴۶	۱۷۰	۹۰	۱۸۰
$DTLZ3$	۴۷٫۰۹	۷	۵۰۰	۵۰۰۰	۴۲۸٫۹۸	۱۰۲	۱۵۰	۳۰۰
$DTLZ4$	۳٫۷۸	۲۶	۲۵۰	۲۵۰۰	۳۲٫۱۹	۲۳	۸۰	۱۶۰
kur	۶۲٫۲۲	۲۲	۳۵۰	۳۵۰۰	۲۲۱٫۱۳	۱۶	۱۰۰	۲۰۰
$kw2$	۳۷٫۱۲	۱۱۹	۴۵۰	۴۵۰۰	۱۹۷٫۶۸	۲۷	۱۲۰	۲۴۰
$Hill$	۴۰٫۸۹	۱۵	۳۰۰	۳۰۰۰	۱۰۰٫۵۹	۱۵	۹۰	۱۸۰

ارزیابی‌های تابع هدف را (به‌ترتیب تا حدود 70% و 94%) کاهش داده است؛ چراکه بخش عمده‌ی جستجوی خطی حذف شده است.

۳ بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، جایگزینی مبتنی بر شبکه‌ی عصبی پیش‌خور برای جستجوی خطی در الگوریتمِ تندترین کاهش چندهدفه معرفی شد. پیش‌بینی مستقیم طول‌گام، نیاز به ارزیابی‌های بازگشتی قاعده‌ی آرمیژو را تا حد زیادی برطرف کرده و کارایی روش را در مجموعه‌ای از مسائل معیار (DTLZ1–4، kw2، kur و Hill) بهبود داده است (جدول ۲ و شکل ۱).

نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی می‌تواند مرزهای پارتو با پوشش و کیفیت مناسب تولید کند؛ به‌ویژه در مسائل با ساختارهای پیچیده مانند DTLZ3 با قله‌های موضعی و kw2 با مرز ناپیوسته، عملکرد قابل قبولی مشاهده شد. همچنین با حذف بخش عمده‌ی جستجوی خطی، تعداد تکرارها و



شکل ۱: مرزهای پارتو برای DTLZ1، DTLZ2، kw2، و Hill

ارزیابی‌ها به‌طور محسوسی کاهش یافت.

۱.۳ محدودیت‌ها و مسیرهای آتی

هرچند مزایای روش آشکار است، چند محدودیت نیز وجود دارد: (۱) وابستگی به داده‌های آموزشی مصنوعی می‌تواند دقت برآورد α_k را در مسائل واقعی کاهش دهد (برخلاف آرمیژو که داده‌محور نیست)؛ (۲) سربار محاسباتی شبکه‌ی عصبی در ابعاد بالا می‌تواند مقیاس‌پذیری را محدود کند؛ و (۳) افزایش زمان اجرا در برخی مسائل پیچیده، نیاز به بهینه‌سازی بیشتر پیاده‌سازی را گوشزد می‌کند.

برای آینده، تولید داده‌های آموزشی نزدیک‌تر به مرزهای واقعی، استفاده از شبکه‌های سبک‌تر یا کاهش ابعاد، و طراحی نسخه‌های سازگار شونده از «شرط کاهش کافی» پیشنهاد می‌شود. همچنین ترکیب این رویکرد با الگوریتم‌های تکاملی می‌تواند یکنواختی نقاط روی مرزهای ناپیوسته را بهبود بخشد. بررسی کارایی در مسائل پویا و داده‌های واقعی نیز گام بعدی مهمی است.

مراجع

[1] K. Deb, *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, Wiley, 2001.

[2] L. Armijo, “Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives,” *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 16, no. 1, pp. 1–3, 1966.

[3] I. Goodfellow, Y. Bengio, and A. Courville, *Deep Learning*, MIT Press, 2016.

[4] K. Li, T. Zhang, and R. Wang, "Deep Reinforcement Learning for Multi-objective Optimization," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 51, no. 6, pp. 3103–3114, 2021.

[5] S. S. Hotegni, M. De Cauwer, and M. Pechenizkiy, "Multi-Objective Optimization for Sparse Deep Multi-Task Learning," *arXiv preprint arXiv:2308.12243*, 2023.

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC
Islamic World Science Citation Center
۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

بهینه‌سازی چندهدفه با الگوریتم ترکیبی $SA-CG$

نیلوفر صالحی‌مکاری [۱] هادی بصیرزاده [۲]

[۱,۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

بهینه‌سازی چندهدفه یکی از چالش‌برانگیزترین مسائل در علوم کامپیوتر و ریاضیات است که هدف آن تولید مرز پارتو با کیفیت بالا و هزینه محاسباتی پایین است. این پژوهش، الگوریتم ترکیبی $SA-CG$ را معرفی می‌کند که با ترکیب هوشمندانه شبیه‌سازی تبرید (SA) و گرادیان مزدوج (CG)، به جستجو در فضای سراسری و موضعی پرداخته و از جستجوی خطی غیریکنواخت برای بهبود کارایی استفاده می‌کند. نتایج نشان می‌دهند که الگوریتم پیشنهادی با انعطاف‌پذیری بالا در مسائل مختلف، به ویژه در طراحی سیستم‌های مهندسی و مدیریت زنجیره تأمین چندمرحله‌ای، کارایی بهتری ارائه می‌دهد.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی چندهدفه، جستجوی خطی غیریکنواخت، مرز پارتو، الگوریتم ترکیبی، $Simulated-Annealing$، گرادیان مزدوج

۱ مقدمه

بهینه‌سازی چندهدفه (MOO) یکی از حوزه‌های پیچیده در علوم کامپیوتر و ریاضیات است که از دهه ۱۹۸۰ برای تولید مرز پارتو، مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه که بهبود یک هدف بدون بدتر شدن دیگر اهداف ممکن نباشد، مورد توجه قرار گرفته است. این مرز به گونه‌ای طراحی می‌شود که هیچ‌گونه بهبود در یک هدف بدون بدتر شدن دیگر اهداف ممکن نباشد. روش‌های کلاسیک مانند مجموع وزنی و ϵـقید در مسائل پیچیده محدودیت‌هایی داشته‌اند [۱].

الگوریتم‌های تکاملی مثل NSGA [۲] و روش‌های تجزیه‌ای مثل MOEA/D [۳] با مرتب‌سازی جواب‌های بهینه، کیفیت مرز پارتو را بهتر کردند، اما مشکلاتی مثل سرعت کم یا عملکرد ضعیف در مسائل خاص هنوز باقی است. در روش‌های گرادیانی، انتخاب طول گام مناسب یک چالش بزرگ است. میتا و همکاران در سال ۲۰۱۹ پیشنهاد کردند که جستجوی خطی غیریکنواخت می‌تواند به

[1] N-SalehiMokari@stu.scu.ac.ir
[2] h.basirzadeh@scu.ac.ir

جدول ۱: تنظیمات پارامترهای الگوریتم $SA-CG$

پارامتر	مقدار	توضیحات
T_0	۱۰۰	دمای اولیه، بر اساس آزمایش‌های اولیه انتخاب شده است.
γ	۰/۹۹ تا ۰/۹۵	نرخ خنک‌سازی، تنظیم می‌شود تا همگرایی بهینه حاصل شود.
δ	۰/۰۵	اندازه اختلال برای ایجاد تنوع در پاسخ‌ها.
ϵ	10^{-4}	آستانه همگرایی برای بهینه‌سازی گرادیان مزدوج.
$N_{\max}$	۵۰۰	حداکثر تعداد تکرارهای الگوریتم.
$T_{\min}$	۰/۱	حداقل دما برای توقف شبیه‌سازی تبرید.

بهبود عملکرد در مسائل چند هدفه کمک کند [۴]. همچنین، ترکیب روش‌های گرادیانی و تکاملی عملکرد بهتری در مسائل پیچیده داشته، ولی تنظیم پارامترها همچنان چالش دارد [۵].

این پژوهش الگوریتم $SA-CG$ را معرفی می‌کند که با ترکیب شبیه‌سازی تبرید، گرادیان مزدوج و جستجوی خطی غیریکنواخت، مرز پارتو با کیفیت بالا تولید می‌کند و هزینه محاسباتی را کم می‌کند. ساختار مقاله شامل روش پیشنهادی، نتایج تجربی، و نتیجه‌گیری و پیشنهادات است.

۲ روش پیشنهادی

الگوریتم ترکیبی $SA-CG$ [۱] برای حل مسائل بهینه‌سازی چند هدفه توسعه یافته است که با ترکیب شبیه‌سازی تبرید و گرادیان مزدوج، جستجوی سراسری و موضعی را به طور بهینه انجام می‌دهد. این الگوریتم با ترکیب شبیه‌سازی تبرید و گرادیان مزدوج، جستجوی سراسری و موضعی را به‌خوبی انجام می‌دهد و با استفاده از جستجوی خطی غیریکنواخت، مرز پارتو با کیفیت بالا و هزینه محاسباتی کم تولید می‌کند. الگوریتم کار خود را با تولید مرز پارتو از N جواب تصادفی در دامنه متغیرهای تصمیم شروع می‌کند و در طول اجرا به‌روزرسانی می‌شود. جواب‌های بهینه ذخیره می‌شوند. این پارامترها بسته به پیچیدگی مسئله تنظیم می‌شوند تا الگوریتم به بهترین عملکرد خود دست یابد. مقادیر پارامترهای استفاده شده در الگوریتم به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

۱.۲ جستجو سراسری با SA

در هر تکرار، یک جواب x_k به‌صورت تصادفی از مجموعه پارتو انتخاب می‌شود. سپس، یک جواب جدید x' با اعمال اختلال تولید می‌گردد:

$$x' = \text{clip}\left(x_k + \delta \cdot (۲ \cdot \text{rand}() - ۱)\right)$$

[۱] *Simulated Annealing with Conjugate Gradient*

که در آن δ اندازه اختلال است و تابع clip تضمین می‌کند که جواب در محدوده مجاز متغیرهای تصمیم باقی بماند.

جهت کاهشی از طریق حل یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم انجام می‌شود که نرم مجموع وزن‌دار گرادیان‌ها را کمینه می‌کند:

$$\min_{\lambda} \quad \frac{1}{2}\left\|\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \nabla f_i(x)\right\|^2 \quad \text{به شرط اینکه} \quad \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0$$

ضرایب لاگرانژ بهینه λ_i از این مسئله استخراج شده و جهت کاهشی به صورت $d = -\sum \lambda_i \nabla f_i(x)$ تعریف می‌شود. اگر $\|d\|$ کمتر از 10^{-6} باشد، بهینه‌سازی ناموفق تلقی می‌گردد.

در صورت ناموفق بودن حل مسئله درجه دوم و غیرمغلوب بودن x'، به مجموعه نقاط پارتو اضافه می‌شود. در غیر این صورت، تغییر در تابع هدف و احتمال پذیرش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta E = \sum \lambda_i (f_i(x') - f_i(x_k)), \quad p = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \Delta E < 0 \\ \exp\left(-\dfrac{\Delta E}{T}\right) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در صورت غیرمغلوب بودن x'، به مجموعه پارتو اضافه و دما با نرخ خنک‌سازی به‌روزرسانی می‌شود:

$$T = \gamma \cdot T$$

۲.۲ جستجوی موضعی با روش CG

الگوریتم در هر تکرار، برای بهبود جواب‌ها و سرعت بخشیدن به همگرایی، روی تعدادی از جواب‌های مرز پارتو که بیشترین فاصله تراکم را دارند، جستجوی موضعی با روش گرادیان مزدوج (CG) انجام می‌دهد.

جهت جستجوی اولیه با گرادیان ترکیبی توابع هدف محاسبه می‌شود. برای انتخاب اندازه گام، از جستجوی خطی غیریکنواخت با شرط زیر استفاده می‌شود:

$$f(x + \alpha d) \leq C_k + \delta \alpha \nabla f(x)^T d$$

که در آن C_k بیشینه مقدار تابع در M تکرار اخیر است، $\delta = 10^{-4}$ یک پارامتر کوچک، و مقدار اولیه $\alpha = 1.0$ در نظر گرفته شده که اگر شرط برقرار نشود، به‌صورت بازگشتی نصف می‌شود. پس از به‌روزرسانی جواب، گرادیان جدید محاسبه و جهت حرکت با فرمول $Polak - Ribire$ به‌روزرسانی می‌شود:

$$\beta_k = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \nabla f_i(x_k)\right)^T \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \nabla f_i(x_k)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \nabla f_i(x_{k-1})\right)^T \left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \nabla f_i(x_{k-1})\right)}, \quad d_{\text{new}} = -\sum \lambda_i \nabla f_i(x_{\text{new}}) + \beta d_k$$

جستجو تا وقتی ادامه دارد که نرم گرادیان به کمتر از آستانه همگرایی ($\epsilon = ۱۰^{-۴}$) برسد. در نهایت، اگر جواب به‌دست‌آمده غیرمغلوب باشد، به مجموعه پارتو اضافه می‌شود. الگوریتم در یکی از شرایط رسیدن به $N_{\max}$ تکرار، عدم بهبود مرز پارتو طی M تکرار متوالی، کاهش دما به کمتر از $T_{\min}$ متوقف می‌شود.

۳.۲ الگوریتم کلی $SA-CG$

شبه‌کد زیر جریان کلی الگوریتم $SA-CG$ را نشان می‌دهد و تعامل بین اجزای آن (SA، CG، بهینه‌سازی دوگان، و جستجوی خطی غیریکنواخت) را توضیح می‌دهد.

الگوریتم ۱ الگوریتم کلی $SA-CG$

۱: مقداردهی اولیه مجموعه پارتو، T، و پارامترها انجام می‌شود.
۲: **while** شرایط توقف برقرار نیست **do**
۳: یک جواب x_k به‌صورت تصادفی از مجموعه پارتو انتخاب می‌شود.
۴: جواب جدید x' با اعمال اختلال تولید می‌شود.
۵: جهت کاهشی با بهینه‌سازی دوگان محاسبه می‌شود.
۶: پذیرش x' با احتمال p انجام می‌شود.
۷: **if** تکرار بر ۲ بخش‌پذیر است **then**
۸: جواب‌ها با بیشترین فاصله تراکم انتخاب می‌شوند.
۹: جستجوی موضعی با گرادیان مزدوج و جستجوی خطی غیریکنواخت اعمال می‌شود.
۱۰: **if end**
۱۱: دما و مجموعه پارتو به‌روزرسانی می‌شوند.
۱۲: **while end**

۳ نتایج و بحث

در این بخش، عملکرد الگوریتم $SA\text{-}CG$ در حل مسائل استاندارد چند هدفه شامل مجموعه‌های ZDT (دو هدفه) و $DTLZ$ (سه هدفه) بررسی می‌شود. این مسائل ویژگی‌های متنوعی مانند مرز پارتو محدب، مقعر، ناپیوسته و با بهینه‌های محلی دارند. معیارهای ارزیابی شامل زمان اجرا و تعداد ارزیابی‌های تابع هدف است. مسائل $ZDT۱$ تا $ZDT۳$ و $DTLZ۱$ تا $DTLZ۶$ با ابعاد تصمیم به ترتیب ۱۰ و ۱۲ متغیر آزمایش شده‌اند. الگوریتم با پارامترهای گفته‌شده در بخش روش‌ها اجرا و هر آزمایش ۳۰ بار تکرار شده است. همه آزمایش‌ها روی سیستمی با پردازنده $Core\,i۷$ و $۱۶GB\ RAM$ انجام شده‌اند. نتایج در جدول ۲ شامل زمان اجرا (ثانیه) و تعداد ارزیابی‌های تابع هدف است. مقادیر میانگین ۳۰ تکرار هستند.

نتایج جدول ۲ نشان‌دهنده عملکرد الگوریتم $SA\text{-}CG$ در مسائل دو هدفه و سه هدفه است. در مسائل دو هدفه، $ZDT۱$ با زمان اجرای ۰٫۰۰۱۰ ثانیه و۲۷۲۰۰ ارزیابی، کمترین هزینه را دارد. در مسائل سه هدفه، $DTLZ۱$ با ۰٫۰۱۰۶ ثانیه و ۶۱۳۹۳ ارزیابی عملکرد بهتری نسبت به $DTLZ۶$

جدول ۲: نتایج کمی الگوریتم $SA\text{-}CG$

مسئله	زمان اجرا (ثانیه)	تعداد ارزیابی‌ها
۱ZDT	۰/۰۰۱۰	۲۷۲۰۰
۲ZDT	۰/۰۰۳۶	۲۴۱۵۶
۳ZDT	۰/۰۰۳۶	۲۶۸۴۰
۱DTLZ	۰/۰۱۰۶	۶۱۳۹۳
۲DTLZ	۰/۰۱۳۶	۶۳۵۲۳
۶DTLZ	۰/۰۱۶۷	۷۸۰۲۹

با۰/۰۱۶۷ ثانیه و ۷۸۰۲۹ ارزیابی دارد. این تفاوت به دلیل پیچیدگی بیشتر فضای جستجو در مسائل سه هدفه است.

مرز پارتو تولیدشده برای مسائل چندهدفه در شکل ۱ نشان داده شده است. در $ZDT۱$، مرز پارتو یکنواخت و محدب است و به مرز واقعی نزدیک شده است. در $DTLZ۱$، پراکندگی خوب است، اما نقاط در نواحی میانی کمی متراکم‌اند. در $DTLZ۶$، نقاط در نزدیکی $f_۱ \approx ۰$ خوشه‌بندی شده‌اند که نشان‌دهنده چالش در یکنواختی است. با این حال، همگرایی الگوریتم قابل قبول است.

۱.۳ جمع‌بندی

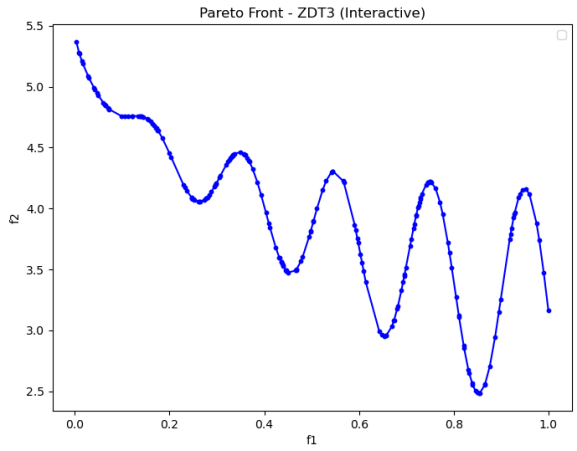
الگوریتم $SA-CG$ در مسائل با مرز پارتو محدب و پیوسته، مثل $ZDT۱$ و $DTLZ۱$، عملکرد خوبی دارد و مرز پارتو با پراکندگی مناسب تولید می‌کند. این به دلیل ترکیب جستجوی سراسری و موضعی و استفاده از جستجوی خطی غیریکنواخت است که هزینه محاسباتی را کم می‌کند. اما در مسائل مقعر یا ناپیوسته، پراکندگی نیاز به بهبود دارد. در نهایت، استفاده از تنظیمات تطبیقی برای بهینه‌سازی بهتر پارامترها می‌تواند در بهبود عملکرد الگوریتم در مسائل پیچیده کمک کند.

۲.۳ پیشنهادات و چالش‌ها

الگوریتم $SA-CG$ در مسائل پیچیده مثل $DTLZ۳$ و $DTLZ۶$ باید بهتر شود. تنظیم پارامترهای γ و δ یک چالش است و بهتر است به‌صورت تطبیقی انجام شود. ترکیب با الگوریتم‌های تکاملی و آزمایش روی مسائل واقعی، مثل زنجیره تأمین، می‌تواند عملکرد را تقویت کند.

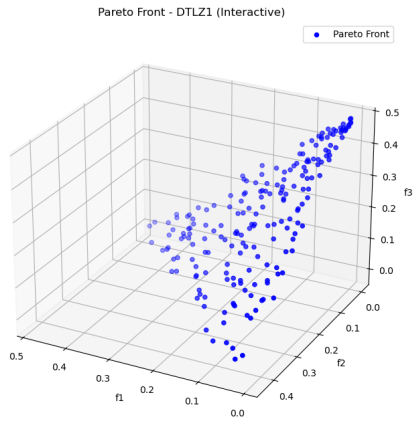
مراجع

[1] Schaffer, J. D. (1985). Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. In *Proceedings of the 1st International Confer-*

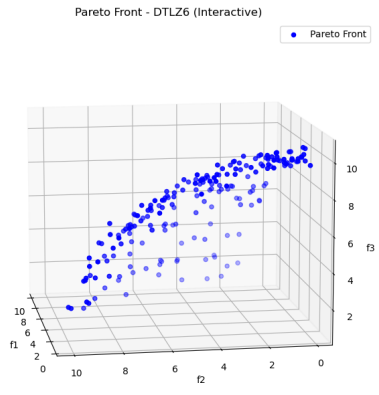


(آ) ZDT۱

(ب) ZDT۳



(ج) DTLZ۱



(د) DTLZ۶

شکل ۱: مرز پارتو تولیدشده توسط الگوریتم $SA\text{-}CG$ برای مسائل

ence on Genetic Algorithms (pp. 93–100).

[2] Srinivas, N., & Deb, K. (1994). Multiobjective optimization using non-dominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 2(3), 221–248.

[3] Zhang, Q., & Li, H. (2007). MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 11(6), 712–731.

[4] Mita, K., Fukuda, E. H., & Yamashita, N. (2019). Nonmonotone line searches for unconstrained multiobjective optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 75(1), 63–90.

[5] Cao, F., Tang, Z., Zhu, C., & Zhao, X. (2023). An efficient hybrid multiobjective optimization method coupling global evolutionary and local gradient searches for solving aerodynamic optimization problems. *Mathematics*, 11(18), 3844. https://doi.org/10.3390/math11183844

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

یک رویکرد بهینه‌سازی چندهدفه مبتنی بر الگوریتم کلونی مورچگان برای مسیریابی خودروهای الکتریکی

نیلوفر صالحی‌مکاری [۱] هادی بصیرزاده [۲]

[۱,۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

مسیریابی بهینه‌ی وسایل نقلیه‌ی الکتریکی با توجه به محدودیت‌های شارژ و پویایی شبکه‌ی حمل‌ونقل، چالشی مهم در سامانه‌های هوشمند است. در این پژوهش، یک رویکرد چندهدفه مبتنی بر الگوریتم کلونی مورچگان (MOACO) همراه با لایهٔ استنتاج فازی برای مسیریابی EV ارائه می‌شود که سه هدف کاهش مصرف انرژی سفر، کاهش زمان کل و افزایش ترجیح/قابلیت‌اتکای ایستگاه را به‌صورت هم‌زمان دنبال می‌کند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد روش پیشنهادی نسبت به NSGA-II حدود 91% کاهش در زمان محاسبات و حدود 53% کاهش در زمان شارژ به دست می‌دهد. در مقابل، در برخی سناریوها شاخص‌های انرژی و ترجیح ایستگاه نسبت به NSGA-II و MOPSO ضعیف‌تر گزارش شده‌اند که بیانگر مبادله‌ی سرعت در برابر کارایی انرژی/ترجیح است. الگوریتم با تولید 100 جواب پارتوی باکیفیت، پوشش مناسبی از جبهه‌ی پاسخ فراهم می‌آورد و قابلیت استفاده در کاربردهای زمان‌واقعی را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: مسیریابی وسایل نقلیه‌ی الکتریکی، بهینه‌سازی چندهدفه، الگوریتم کلونی مورچگان، MOACO، مدیریت انرژی

۱ مقدمه

امروزه با افزایش نگرانی‌های زیست‌محیطی و هزینه‌های سوخت‌های فسیلی، خودروهای الکتریکی (EVs) به عنوان یک جواب پایدار مورد توجه قرار گرفته‌اند. مطالعات نشان می‌دهد که تا سال 2030، سهم خودروهای الکتریکی در بازار جهانی به 30% خواهد رسید. با این حال، مسئله مسیریابی بهینه برای شارژ این خودروها یکی از چالش‌های اساسی در سیستم‌های حمل و نقل هوشمند است. این مسئله ترکیبی پیچیده از مشکلات مسیریابی، تخصیص منابع و مدیریت بارهاست که نیازمند استفاده از روش‌های پیشرفته بهینه‌سازی می‌باشد.

الگوریتم‌های مورچگان مبتنی بر رفتار هوشمند جمعی، توانایی‌های منحصر به فردی در حل مسائل مسیریابی پیچیده دارند. این الگوریتم‌ها با استفاده از مکانیزم فرومون و یادگیری جمعی، توانایی

[1] N-SalehiMokari@stu.scu.ac.ir
[2] h.basirzadeh@scu.ac.ir

جستجوی مؤثر در فضای جواب را دارا هستند. در این پژوهش، یک رویکرد نوآورانه ترکیبی از الگوریتم کلونی مورچگان و منطق فازی ارائه شده است که قادر است عدم قطعیت‌های محیطی و پویایی شبکه حمل و نقل را به طور مؤثر مدیریت کند. این ترکیب به الگوریتم کمک می‌کند تا ضمن حفظ کارایی بالا، قادر به تطبیق با تغییرات محیطی باشد و از تصمیم‌گیری‌های بهینه در برابر شرایط متغیر اطمینان حاصل کند.

مطالعات متعددی در حوزه مسیریابی بهینه خودروهای الکتریکی انجام شده است. Deb و همکاران (۲۰۰۲) با توسعه الگوریتم NSGA-II ، پایه‌های اصلی بهینه‌سازی چندهدفه را بنا نهادند که امروزه به عنوان یکی از مراجع اصلی این حوزه شناخته می‌شود [۱]. Dorigo و همکاران (۲۰۱۷) با معرفی الگوریتم‌های مورچگان، قابلیت یادگیری جمعی و به‌روزرسانی پویای مسیر را در مسائل مسیریابی نشان دادند [۲]. در تحقیقات اخیر، Zhang و همکاران (۲۰۱۸) یک رویکرد جامع برای مکان‌یابی و ظرفیت‌سنجی ایستگاه‌های شارژ سریع خودروهای برقی با در نظر گرفتن همزمان شبکه‌های حمل و نقل و توزیع برق ارائه کردند [۳]. در مطالعات پیشین، Meng و Zhang (۲۰۲۱) یک سیستم کنترل فازی تطبیقی بهینه برای تحلیل و مدیریت پویای توان شارژ و دشارژ خودروهای برقی ارائه کردند که قابلیت تطبیق با شرایط متغیر سیستم را دارد [۴]. اخیرا، Zhu و همکاران (۲۰۲۳) یک الگوریتم مسیریابی پویا برای مسئله کوتاه‌ترین مسیر خودروهای برقی با در نظر گرفتن اطلاعات لحظه‌ای وضعیت اشغال ایستگاه‌های شارژ ارائه کردند [۵].

بررسی ادبیات این حوزه نشان می‌دهد که شکاف‌های تحقیقاتی اصلی شامل:

- نیاز به مدل‌های چندهدفه با قابلیت مقیاس‌پذیری بالا
- ضرورت توسعه روش‌های تطبیقی هوشمند برای مدیریت عدم قطعیت‌های پویا
- لزوم ارائه راهکارهای یکپارچه برای بهینه‌سازی همزمان انرژی، زمان و هزینه

می‌باشند.

پژوهش حاضر با ارائه یک رویکرد ترکیبی نوین مبتنی بر الگوریتم کلونی مورچگان و منطق فازی تطبیقی، به دنبال پر کردن این شکاف‌های تحقیقاتی است. نوآوری‌های اصلی این پژوهش عبارتند از: (۱) ارائه یک مکانیزم تطبیقی جدید برای به‌روزرسانی فرومون، (۲) طراحی سیستم فازی هوشمند برای مدیریت عدم قطعیت‌ها، و (۳) توسعه یک چارچوب یکپارچه برای بهینه‌سازی همزمان مصرف انرژی، زمان سفر و انتخاب ایستگاه‌های شارژ.

در ادامه این مقاله، بخش دوم به تشریح مدل ریاضی و فرمول‌بندی مسئله و همچنین معرفی الگوریتم پیشنهادی و مکانیزم‌های نوآورانه آن می‌پردازد. در بخش سوم، به ارزیابی عملکرد و تحلیل نتایج شبیه‌سازی اختصاص دارد. در نهایت، بخش چهارم به نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای تحقیقات آتی پرداخته می‌شود.

۲ روش‌شناسی پژوهش

روش پیشنهادی یک سیستم یکپارچه برای مسیریابی بهینه خودروهای الکتریکی است که در سه لایه اصلی عمل می‌کند. ورودی‌های سیستم شامل نقشه دیجیتال، موقعیت ایستگاه‌های شارژ، داده‌های ترافیکی لحظه‌ای و وضعیت شارژ خودرو است. پردازش در لایه‌های فازی (مدل‌سازی عدم قطعیت)، $MOACO$ (جستجوی مسیر) و یکپارچه‌سازی انجام می‌شود.

مرحله اول - آماده‌سازی و مقداردهی اولیه: در این مرحله، گراف شبکه حمل و نقل به صورت $G(V, E)$ ساخته می‌شود که در آن V مجموعه گره‌ها شامل مبدأ، مقصد و ایستگاه‌های شارژ، و E مجموعه یال‌های شبکه است. برای هر یال، اطلاعات مربوط به مسافت، زمان سفر و مصرف انرژی ذخیره می‌شود. همچنین ماتریس فرومون τ_{ij} با مقدار اولیه τ_0 مقداردهی می‌شود.

مرحله دوم - تولید مسیرهای کاندید: در هر تکرار، m مورچه به طور همزمان از گره مبدأ شروع به حرکت می‌کنند. هر مورچه در هر گره، گره بعدی را بر اساس احتمال انتخاب مسیر p_{ij}^k انتخاب می‌کند. این احتمال تابعی از میزان فرومون و اطلاعات ابتکاری است که شامل فاصله، زمان سفر و وضعیت شارژ می‌شود. مورچه‌ها با در نظر گرفتن محدودیت شارژ باتری، مسیرهای خود را تا رسیدن به مقصد ادامه می‌دهند.

مرحله سوم - ارزیابی مسیرها: هر مسیر تولید شده با استفاده از سیستم فازی ارزیابی می‌شود. سیستم فازی سه معیار اصلی را در نظر می‌گیرد:

- مصرف انرژی کل مسیر
- زمان کل سفر شامل زمان‌های شارژ
- قابلیت اطمینان مسیر از نظر دسترسی به ایستگاه‌های شارژ

مرحله چهارم - به‌روزرسانی فرومون: پس از ارزیابی تمام مسیرها، ماتریس فرومون به‌روزرسانی می‌شود. این به‌روزرسانی شامل دو بخش است:

۱. تبخیر فرومون موجود با نرخ ρ

۲. اضافه کردن فرومون جدید متناسب با کیفیت مسیرهای یافت شده

این چرخه تا رسیدن به شرط توقف (تعداد تکرار مشخص یا همگرایی) ادامه می‌یابد. در نهایت، مجموعه‌ای از مسیرهای بهینه پارتو به عنوان خروجی ارائه می‌شود.

۱.۲ سیستم استنتاج فازی پیشرفته

سیستم فازی از سه تابع عضویت اصلی استفاده می‌کند:

۱. **تابع نمایی برای مصرف انرژی:**

$$\mu_E(x) = \exp(-\lambda(x - x_{\cdot})^{۲})$$

۲. **تابع لگاریتمی برای زمان شارژ:**

$$\mu_T(x) = \frac{\log(۱ + \alpha x)}{\log(۱ + \alpha)}$$

۳. **تابع ترکیبی برای اولویت ایستگاه‌ها:**

$$\mu_S(x) = \exp(-\beta x) \cdot \log(۱ + \gamma x)$$

پارامترهای λ، α، β و γ بر اساس داده‌های تجربی تنظیم می‌شوند.

۲.۲ الگوریتم MOACO بهبودیافته

الگوریتم MOACO با دو نوآوری اصلی بهبود یافته است:

- **احتمال انتخاب مسیر بهینه:**

$$p_{ij}^{k} = \frac{[\tau_{ij}]^{\alpha}[\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{l \in N_i^k}[\tau_{il}]^{\alpha}[\eta_{il}]^{\beta}}$$

- **به‌روزرسانی هوشمند فرومون:**

$$\tau_{ij} = (۱ - \rho)\tau_{ij} + \rho\Delta\tau_{ij}$$

در نهایت، در الگوریتم MOACO، سه تابعِ هدف وزن‌دار به‌صورت زیر بهینه می‌شوند. برای اختصار، وزن تطبیقی هر یال را به‌شکل $w_{ij} := \tau_{ij}^{\alpha}\,\eta_{ij}^{\beta}$ و مسیر را $\mathcal{P} \subseteq E$ در نظر می‌گیریم. آنگاه:

$$f_{۱} = \min \sum_{(i,j)\in\mathcal{P}} w_{ij}\,\mathrm{Energy}_{ij},$$
$$f_{۲} = \min \sum_{(i,j)\in\mathcal{P}} w_{ij}\,\mathrm{ChargingTime}_{ij},$$
$$f_{۳} = \max \prod_{(i,j)\in\mathcal{P}} w_{ij}\,\mathrm{StationPriority}_{ij}.$$

که در آن:

- Energy_{ij}: مصرف انرژی روی یال (i,j)
- ChargingTime_{ij}: زمان شارژ/انتظار متناظر با یال (i,j) یا ایستگاه پس از آن
- $\text{StationPriority}_{ij}$: ترجیح/قابلیت‌اتکای ایستگاه مرتبط با (i,j)
- τ_{ij}: مقدار فرومون بین گره‌های i و j
- η_{ij}: اطلاعات اکتشافی
- α, β: پارامترهای کنترلی الگوریتم

در این فرمول‌بندی، پارامترهای الگوریتمی τ, η از طریق وزن تطبیقی w_{ij} مستقیماً وارد تعریف توابع هدف می‌شوند و فرایند جست‌وجو را به یال‌های مطلوب‌تر بایاس می‌کنند. برای یک‌دست‌سازی گزارش و مقایسهٔ منصفانه با روش‌های مرجع، مقادیر انرژی/زمان/ترجیح در جدول‌ها برحسب کمیت‌های فیزیکی و بدون وزن‌دهی گزارش شده‌اند؛ بااین‌حال، بهینه‌سازی MOACO بر مبنای اهداف وزن‌دار انجام می‌شود.

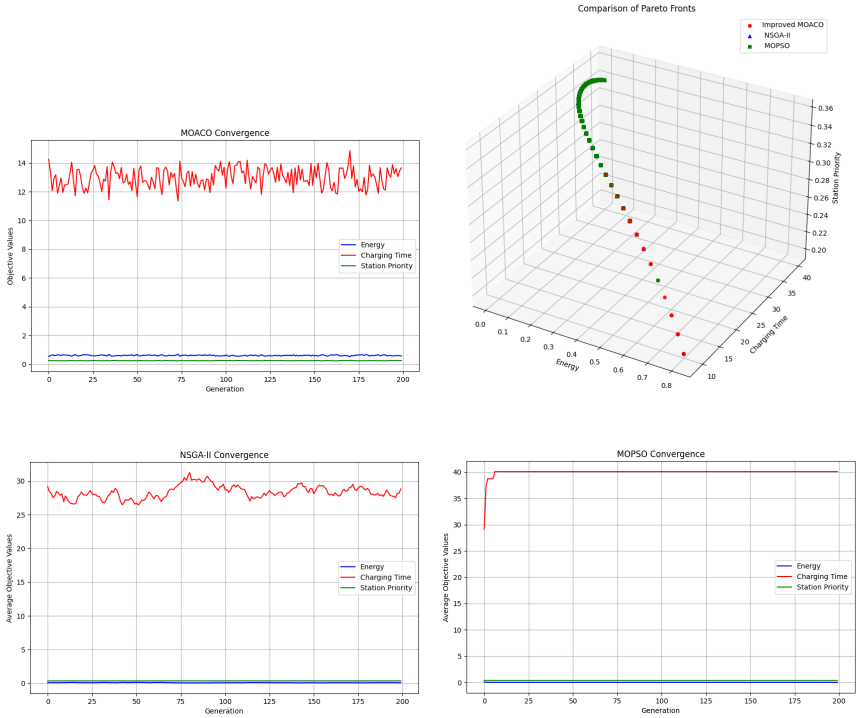
۳ نتایج شبیه‌سازی و ارزیابی

سیستم در محیط $Python - ۳/۹$ با استفاده از کتابخانه‌های NumPy و Pandas پیاده‌سازی شده و آزمایش‌ها روی یک سیستم با پردازنده $Core\ i۷$ و حافظه $۱۶GB$ RAM انجام شده‌اند. در این پژوهش، شبیه‌سازی مسیریابی بهینه وسایل نقلیه الکتریکی روی یک مسیر با ۱۰ ایستگاه شارژ انجام شده است. این مسیر به عنوان یک نمونه واقعی از شبکه حمل و نقل شهری در نظر گرفته شده که در آن وسیله نقلیه باید بهترین توالی ایستگاه‌ها را برای رسیدن به مقصد انتخاب کند.

در الگوریتم MOACO پارامترهای α (ضریب فرومون) و β (ضریب اکتشاف) به ترتیب ۱ و ۳ تنظیم شده‌اند. نرخ تبخیر فرومون (ρ) برابر ۰/۱ و تعداد مورچه‌ها ۲۰ در نظر گرفته شده است. این تنظیمات بر اساس آزمایش‌های اولیه و بهینه‌سازی پارامترها انتخاب شده‌اند. تعداد نسل‌های الگوریتم ۲۰۰ در نظر گرفته شده تا اطمینان حاصل شود که الگوریتم فرصت کافی برای همگرایی به جواب‌های بهینه را دارد. هر آزمایش ۳۰ بار تکرار شده تا پایداری و تکرارپذیری نتایج تضمین شود.

الگوریتم	زمان اجرا (ثانیه)	تعداد جواب‌های پارتو	میانگین انرژی	میانگین زمان شارژ	میانگین اولویت ایستگاه
Improved-MOACO	۰/۷۹	۱۰۰	۰/۵۶۳۷	۱۴/۱۵۵۲	۰/۲۷۱۸
NSGA-II	۹/۲۳	۱۰۰	۰/۰۷۱۴	۳۰/۰۴۶۴	۰/۳۵۱۲
MOPSO	۱/۴۱	۶	۰/۰۰۲۵	۴۰/۰۷۶۷	۰/۳۳۹۴

نتایج محاسباتی حاصل از پیاده‌سازی الگوریتم‌های چندهدفه نشان‌دهنده عملکرد متمایز الگوریتم Improved-MOACO در حل مسئله مسیریابی وسایل نقلیه الکتریکی است. این الگوریتم با زمان



شکل ۱: مقایسه مرزهای پارتو با استفاده از روش‌های عددی مختلف و نمودارهای همگرایی برای تمام روش‌ها

اجرای بسیار کوتاه ۰/۷۹ ثانیه، سریع‌ترین عملکرد را در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها ارائه می‌دهد. در بخش بهینه‌سازی مصرف انرژی، Improved-MOACO با مقدار ۰/۵۶۳۷ مصرف انرژی بیشتری نسبت به NSGA-II (۰/۰۷۱۴) و MOPSO (۰/۰۰۲۵) دارد. با این حال، در کاهش زمان شارژ، Improved-MOACO با مقدار ۱۴/۱۵۵۲، کاهش 52.89% نسبت به NSGA-II و 64.69% نسبت به MOPSO را نشان می‌دهد، که نشان‌دهنده توانایی آن در ارائه مسیرهای شارژ سریع‌تر است. در معیار اولویت‌بندی ایستگاه‌ها، Improved-MOACO با مقدار ۰/۲۷۱۸، در مقایسه با NSGA-II (۰/۳۵۱۲) و MOPSO (۰/۳۳۹۴) عملکرد ضعیف‌تری دارد، اما با توجه به برتری در زمان اجرا و زمان شارژ، همچنان گزینه‌ای مناسب برای کاربردهای زمان‌محور است.

الگوریتم پیشنهادی با تولید ۱۰۰ جواب پارتوی با کیفیت بالا، توانایی یافتن نقاط بهینه در فضای جستجو را دارد و می‌تواند تعادل مناسبی بین اهداف متضاد فراهم کند. این الگوریتم در مقایسه با NSGA-II و MOPSO به‌ویژه در کاربردهای عملی که نیاز به اجرا در زمان واقعی دارند، با توجه به سرعت بالای اجرا و کاهش زمان شارژ، برتری دارد.

۴ بحث و نتیجه‌گیری

این پژوهش با هدف ارائه راهکاری نوین در مسیریابی وسایل نقلیه الکتریکی، الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه مورچگان بهبودیافته (Improved-MOACO) را معرفی و پیاده‌سازی کرده است. نتایج حاصل از پیاده‌سازی نشان می‌دهد که این الگوریتم در بهینه‌سازی زمان اجرا و زمان شارژ عملکرد قابل توجهی دارد، اما در مصرف انرژی و اولویت‌بندی ایستگاه‌ها نسبت به الگوریتم‌های مرجع NSGA-II و MOPSO ضعیف‌تر عمل می‌کند.

مکانیزم فرومون و توابع فازی به‌کار رفته در الگوریتم Improved-MOACO، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر عدم قطعیت‌ها را فراهم کرده و به کاهش زمان شارژ کمک کرده است. با این حال، مصرف انرژی بالاتر این الگوریتم نشان می‌دهد که نیاز به بهبود در این زمینه وجود دارد. در مقابل، NSGA-II با مصرف انرژی کمتر و اولویت‌بندی بهتر ایستگاه‌ها، تعادل بهتری در اهداف مختلف ارائه می‌دهد، اما زمان اجرای طولانی‌تری دارد. MOPSO نیز با کمترین مصرف انرژی، برای کاربردهایی که صرفه‌جویی در انرژی اولویت دارد، مناسب است، اما تعداد کم جواب‌های پارتویی آن را محدود می‌کند.

با توجه به محدودیت‌های موجود، پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی، توسعه الگوریتم برای بهبود مصرف انرژی و اولویت‌بندی ایستگاه‌ها در Improved-MOACO مدنظر قرار گیرد. همچنین، آزمایش الگوریتم‌ها در شبکه‌های بزرگ‌تر و با عدم قطعیت‌های بیشتر می‌تواند به درک بهتری از عملکرد آن‌ها منجر شود.

در مجموع، این پژوهش نشان داد که استفاده از ترکیب الگوریتم‌های فراابتکاری چندهدفه به همراه توابع فازی می‌تواند راهکاری مؤثر برای بهینه‌سازی سیستم‌های حمل و نقل الکتریکی در کاربردهای زمان‌محور باشد. این رویکرد در کاربردهای عملی می‌تواند به بهبود کارایی و کاهش هزینه‌ها منجر شود. با این حال، در زمینه بهینه‌سازی انرژی، این روش نیاز به اصلاحات بیشتری دارد تا عملکرد بهتری ارائه دهد.

سپاس‌گزاری

از استاد گرانقدر خود برای راهنمایی‌ها، پشتیبانی‌های علمی و تشویق‌های ارزشمندشان قدردانی می‌کنم. همچنین، از برگزارکنندگان محترم کنفرانس و داوران عزیز برای بازخوردهای مفید و فرصت‌هایی که فراهم کرده‌اند، سپاسگزارم.

مراجع

[1] Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), 182–197.

[2] Dorigo, M., Birattari, M. (2017). "Ant colony optimization." Encyclopedia of Machine Learning.

[3] Zhang, Hongcai, Scott J. Moura, Zechun Hu and Yonghua Song. (2018) "PEV Fast-Charging Station Siting and Sizing on Coupled Transportation and Power Networks." IEEE Transactions on Smart Grid 9: 2595-2605.

[4] Meng, Fanzi and Yu Zhang.(2021) "Dynamic control analysis of charging and discharging power for electric vehicles with adaptive optimal fuzzy control." J. Intell. Fuzzy Syst. 41 : 4929-4936.

[5] Zhu, M., Liu, X. Y., Wang, X. (2023). "Dynamic Routing for the Electric Vehicle Shortest Path Problem with Charging Station Occupancy Information." IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 24(5), 5123-5134.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

برآورد گشتاور مثلثاتی پارامترهای توزیع ون میزس وزنی

فاطمه شاه سنایی [۱]

[۱] گروه برق، پردیس صنعتی شهدای هویزه، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

در این مقاله، به بررسی روش گشتاور مثلثاتی برای برآورد پارامترهای توزیع ون‌میزس در حالت وزنی پرداخته می‌شود. دو تابع وزن متفاوت شامل نمایی و نمایی چهارپارامتری بررسی می‌شوند. از آنجا که روش گشتاوری به‌طور مستقیم مبتنی بر ویژگی‌های نمونه‌ای است، نسبت به روش‌های مبتنی بر تابع درستنمایی ساده‌تر و از لحاظ محاسباتی سریع‌تر است. در ادامه، دستگاه معادلات مربوط به هر تابع وزن استخراج شده و نحوه حل آن‌ها تشریح می‌شود.

کلمات کلیدی: توزیع دایره‌ای، گشتاور مثلثاتی، تابع وزن، توزیع ون‌میزس.

۱ مقدمه

ون میزس در بررسی این‌که «آیا وزن‌های اتمی عددهای صحیح هستند؟» توزیع ون میزس را بر روی دایره معرفی کرد [۱]. مشخصات و ویژگی‌های توزیع معرفی شده توسط وی بسیار شبیه مشخصات توزیع نرمال است. توزیع ون‌میزس به‌عنوان یکی از توزیع‌های پایه در تحلیل داده‌های دایره‌ای، دارای کاربردهای فراوانی در علوم طبیعی، هواشناسی، و علوم زیستی است.

در بسیاری از موقعیت‌های واقعی، مشاهدات دایره‌ای با وزن‌های متفاوتی ثبت می‌شوند که لزوم استفاده از توزیع‌های دایره‌ای وزنی مانند توزیع ون‌میزس وزنی را مطرح می‌کند. رائو برای اولین بار توزیع‌های وزنی تحت تابع وزن با پارامتر مجهول را بررسی کرد [۲]. گاتو و جامالامادکا توزیع ون میزس تعمیم یافته را معرفی کردند که علاوه بر قابلیت مدل‌بندی داده‌های چوله، می‌تواند رفتار داده‌های دو مدی را نیز توصیف کند [۳].

گاتو و جامالاماداکا روش گشتاور مثلثاتی را برای برآورد پارامترهای توزیع‌های دایره‌ای معرفی کرده‌اند. این روش مبتنی بر برابری گشتاورهای تئوری و نمونه‌ای بوده و در حالت‌هایی که تابع چگالی دارای فرم پیچیده باشد، نسبت به روش‌هایی مانند ماکسیمم درستنمایی مزیت دارد. در این مقاله به برآورد پارامترهای توزیع ون میزس وزنی پرداخته می‌شود.

[1] f.shahsanaei@scu.c.ir

۲ روش گشتاور مثلثاتی برای توزیع ون‌میزس وزنی

فرض کنید $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ نمونهای تصادفی از متغیر دایرهای با توزیع ون‌میزس (vM) وزنی با تابع وزن $w(\theta)$ باشد. روش گشتاور مثلثاتی در پی آن است که گشتاورهای نظری توزیع را با گشتاورهای نمونهای برابر قرار داده و پارامترها را استخراج کند.

۱.۲ برآورد گشتاور مثلثاتی تحت توابع وزن مختلف

۱.۱.۲ تابع وزن نمایی

فرض کنید $\theta \sim vM(\mu, \kappa_1)$ و تابع وزن نمایی به صورت

$$w(\theta; \lambda_1, \lambda_2) = \exp\{\lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \sin\theta\}$$

با $\lambda_1 = \kappa_2 \cos\mu$ و $\lambda_2 = \kappa_2 \sin\mu$ مورد استفاده قرار گیرد، در این صورت $\theta^w \sim vM(\mu, \kappa_1 + \kappa_2)$.

برآورد گشتاور مثلثاتی پارامترهای μ و $\kappa_2 + \kappa_1 = \kappa_3$ به ازای $r = 1$ و با توجه به اینکه:

$$\gamma_r = \frac{I_r(\kappa_3)}{I_0(\kappa_3)} \cos(r\mu), \quad \sigma_r = \frac{I_r(\kappa_3)}{I_0(\kappa_3)} \sin(r\mu)$$

از حل دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \frac{I_1(\kappa_3)}{I_0(\kappa_3)} \cos\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos\theta_i \\ \frac{I_1(\kappa_3)}{I_0(\kappa_3)} \sin\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin\theta_i \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{n} \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} \cos\theta_i\right]^2 + \left[\sum_{i=1}^{n} \sin\theta_i\right]^2} = A(\kappa_1 + \kappa_2)$$

که در آن $A(\kappa) = \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}$ و $\overline{R} = \frac{1}{n}\sqrt{C^2 + S^2}$ به سادگی از مقادیر نمونه به دست می‌آیند.

اگر κ_2 معلوم باشد، $\widetilde{\kappa}_1 = A^{-1}(\overline{R}) - \kappa_2$. اگر κ_2 مجهول باشد، پارامترهای κ_1 و κ_2 از حل دستگاه معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} A(\kappa_1 + \kappa_2) \cos\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos\theta_i \\ A(\kappa_1 + \kappa_2) \sin\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin\theta_i \\ A_2(\kappa_1 + \kappa_2) \cos(2\mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \cos(2\theta_i) \\ A_2(\kappa_1 + \kappa_2) \sin(2\mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin(2\theta_i) \end{cases}$$

۲.۱.۲ تابع وزن نمایی چهار پارامتری

فرض کنید $\theta \sim vM(\mu_۱, \kappa_۱)$ و تابع وزن نمایی به صورت

$$w(\theta; \lambda_۱, \lambda_۲) = \exp\{\lambda_۱ \cos ۲\theta + \lambda_۲ \sin ۲\theta\}$$

با $\lambda_۱ = \kappa_۲ \cos ۲\mu_۲$ و $\lambda_۲ = \kappa_۲ \sin ۲\mu_۲$ مورد استفاده قرار گیرد، در این صورت θ^w دارای توزیع ون میزس تعمیم یافته $\theta^w \sim GvM(\mu_۱, \mu_۲, \kappa_۱, \kappa_۲)$.

برای محاسبه برآورد گشتاوری پارامترهای $\kappa_۱$، $\mu_۱$، $\delta = (\mu_۱ - \mu_۲) \mod (۲\pi)$ و $\kappa_۲$ باید تابع مشخصه (گشتاور rام مثلثاتی) توزیع ون‌میزس تعمیم‌یافته به دست آورده شود.

توابع زیر را به ازای $r = ۱, ۲, \ldots$ در نظر بگیرید:

$$G_r(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} \cos(r\theta) e^{\kappa_۱ \cos\theta + \kappa_۲ \cos(۲(\theta+\delta))} d\theta$$

$$H_r(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) = \frac{۱}{۲\pi} \int_۰^{۲\pi} \sin(r\theta) e^{\kappa_۱ \cos\theta + \kappa_۲ \cos(۲(\theta+\delta))} d\theta$$

$$A_r(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) = \frac{G_r(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲)}{G_۰(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲)}$$

$$B_r(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) = \frac{H_r(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲)}{G_۰(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲)}$$

گشتاورهای rام کسینوس به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\gamma_r = E[\cos(r\theta)] = \cos(r\mu_۱) A_r(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) - \sin(r\mu_۱) B_r(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲)$$

به طور مشابه:

$$\sigma_r = E[\sin(r\theta)] = \sin(r\mu_۱) A_r(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) + \cos(r\mu_۱) B_r(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲)$$

برای به دست آوردن پارامترهای توزیع ون‌میزس کافی است به ازای $r = ۱, ۲$ به جای γ_r و σ_r معادل نمونه‌ای آنها قرار داده شود. در این صورت از حل دستگاه معادلات زیر برآورد پارامترها محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} \cos\mu_۱ A_۱(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) - \sin\mu_۱ B_۱(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^n \cos\theta_i \\ \sin\mu_۱ A_۱(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) + \cos\mu_۱ B_۱(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^n \sin\theta_i \\ \cos(۲\mu_۱) A_۲(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) - \sin(۲\mu_۱) B_۲(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^n \cos(۲\theta_i) \\ \sin(۲\mu_۱) A_۲(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) + \cos(۲\mu_۱) B_۲(\delta, \kappa_۱, \kappa_۲) = \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^n \sin(۲\theta_i) \end{cases}$$

برآورد پارامترها محاسبه می‌شوند. در ادامه کار برآورد گشتاوری پارامتر $\mu_۲$ یعنی $\widehat{\mu}_۲$ از رابطه $\widehat{\mu}_۲ = (\widehat{\delta} - \widehat{\mu}_۱) \mod (۲\pi)$ به‌دست می‌آید.
از طرف دیگر بنا به گاتو [۴] با تعریف تابع امتیاز به صورت:

$$\psi(\theta;\delta,\mu_۱,\kappa_۱,\kappa_۲) = \begin{pmatrix} \cos\theta - \cos\mu_۱ A_۱(\delta,\kappa_۱,\kappa_۲) + \sin\mu_۱ B_۱(\delta,\kappa_۱,\kappa_۲) \\ \sin\theta - \sin\mu_۱ A_۱(\delta,\kappa_۱,\kappa_۲) - \cos\mu_۱ B_۱(\delta,\kappa_۱,\kappa_۲) \\ \cos(۲\theta) - \cos(۲\mu_۱) A_۲(\delta,\kappa_۱,\kappa_۲) + \sin(۲\mu_۱) B_۲(\delta,\kappa_۱,\kappa_۲) \\ \sin(۲\theta) - \sin(۲\mu_۱) A_۲(\delta,\kappa_۱,\kappa_۲) - \cos(۲\mu_۱) B_۲(\delta,\kappa_۱,\kappa_۲) \end{pmatrix}$$

داریم $E[\psi(\theta;\delta,\mu_۱,\kappa_۱,\kappa_۲)] = ۰$ و

$$\sum_{i=۱}^{n} \psi(\theta_i;\widehat{\delta},\widehat{\mu}_۱,\widehat{\kappa}_۱,\widehat{\kappa}_۲) = ۰$$

که نشان می‌دهد برآورد گشتاوری یک برآوردگر M سازگار فیشر است.

مراجع

[1] Von Mises, R. (1918). Über die “Ganzen Zahlen” der Atomgewichte und verwandte Fragen. *Physikalische Zeitschrift*, 19:490-500.

[2] Rao, C.R. (1985). Weighted distributions arising out of methods of ascertainment: what population does a sample represent? In: Atkinson, A.C. and Fienberg, S.E. editors, *A Celebration of Statistics*, Chap.24, ISI Centenary Volume. Springer-Verlag, New York, 543-569.

[3] Gatto, R., & Jammalamadaka, S. R. (2003). The generalized von Mises distribution. *Statistical Methodology*, 1(1), 105–121.

[4] Gatto, R. (2008). Some Computational Aspects of the Generalized von Mises Distribution. *Statistics and Computing*, 18(3):321–331.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

مقایسه و ارزیابی عملکرد برآورد لیو در مدل های آمیخته با استفاده از رویکرد یادگیری ماشین افراطی

مهتاب طلادزفولی [۱] عبدالرحمن راسخ [۲]

[۱,۲] گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

یادگیری ماشین افراطی (ELM) یکی از الگوریتم‌های قدرتمند در حوزه یادگیری ماشین است که به دلیل سرعت بالا و عملکرد قابل توجهش شناخته می‌شود. با این حال، دقت پیش‌بینی آن ممکن است در شرایط وجود هم‌خطی کاهش یابد. در این مقاله، رویکردی نوین برای پیش‌بینی در یک مدل آمیخته پیشنهاد می‌شود. هدف اصلی این مطالعه، ادغام روش‌های آماری و یادگیری ماشین در مدل‌های آمیخته و بهره‌گیری از برآوردگر لیو برای افزایش دقت پیش‌بینی مدل در حضور هم‌خطی است. برای این کار از برآوردگر لیو برای برآورد پارامترهای مدل یادگیری ماشین استفاده می‌شود و نتایج حاصل از آن با استفاده از دو فرم مختلف پارامتر اریب لیو مقایسه می‌شود. ارزیابی بر روی سه مجموعه داده انجام شده است. نتایج نشان می‌دهند که به‌کارگیری ELM می‌تواند دقت بسیار خوبی از پیش‌بینی مدل آمیخته را فراهم آورد. همچنین نتایج نشان داد به‌کارگیری فرم دوم پارامتر اریب می‌تواند نتایج بهتری را ایجاد کند. این یافته‌ها زمینه‌ای برای بهره‌گیری از تکنیک‌های یادگیری ماشین در بهینه‌سازی مدل‌سازی آماری فراهم می‌کنند.

کلمات کلیدی: یادگیری ماشین، مدل آمیخته، هم‌خطی، برآوردگر لیو

۱ مقدمه

در سال‌های اخیر، روش‌های تحلیل داده با سرعت زیادی در حال گسترش هستند. از طرفی الگوریتم‌های یادگیری ماشین مانند شبکه‌های عصبی مصنوعی (ANN) به دلیل توانایی‌هایشان در مدل‌سازی پدیده‌های پیچیده و غیرخطی، توجه بسیاری را به خود جلب کرده‌اند. یکی از چالش‌های اصلی در این روش‌ها، بهینه‌سازی پارامترهای شبکه است که معمولاً از طریق الگوریتم‌های مبتنی بر گرادیان، مانند الگوریتم پس انتشار (Backpropagation) انجام می‌گیرد. این الگوریتم‌ها ممکن است با مشکالتی مانند همگرایی کند، گرفتار شدن در مینیمم‌های موضعی و ناپایداری در برآوردها مواجه شوند.

برای غلبه بر این چالش‌ها، رویکردهای نوآورانه‌ای مانند الگوریتم یادگیری ماشین افراطی (ELM) توسط هوانگ و همکاران [۱] معرفی شده است. ELM نوعی شبکه عصبی با یک لایه پنهان است

[1] taladezfoli_mahtab@yahoo.com
[2] a.rasekh@scu.ac.ir

که در آن وزن‌های پرورى و اریب نورون‌های لایه پنهان به صورت تصادفی تعیین می‌شوند و وزن‌های خروجی به صورت تحلیلی محاسبه می‌گردند. این رویکرد منجر به یادگیری سریع‌تر و بهبود قابلیت تعمیم مدل می‌شود. با این حال، چالش‌هایی به‌ویژه هنگام مواجهه با ساختارهای داده‌های پیچیده‌تر همچنان باقی هستند. از زمان معرفی ELM، مطالعات متعددی با هدف بهبود عملکرد آن انجام شده است. به عنوان مثال، هوین و همکاران [۲] الگوریتم ELM را با استفاده از رگرسیون منظم برای بهبود کارایی محاسباتی در شرایطی که تعداد نورون‌های لایه پنهان زیاد است، توسعه دادند. دنگ و همکاران [۳] نیز یک الگوریتم ELM منظم شده را با تکیه بر مینیمم‌سازی ریسک ساختاری و رگرسیون وزنی کمترین مربعات معرفی کردند تا به مشکالتی مانند ناهمسانی و بیش‌برازش پاسخ دهند.

۲ مدل ELM

در اغلب مطالعات پیش‌بینی، تحلیل رگرسیونی به عنوان یکی از روش‌های پایه‌ای به کار می‌رود و هدف اصلی آن، پیش‌بینی متغیر پاسخ بر اساس متغیرهای توضیحی با بیشترین دقت ممکن و نزدیک به متغیر واقعی است. در این تحلیل، هر واحد مورد مطالعه بر اساس چندین متغیر اندازه‌گیری می‌شود که معمولاً به آن‌ها متغیرهای توضیحی یا متغیر پاسخ گفته می‌شود. در تحلیل رگرسیون سنتی، نتایج برآورد برای متغیر پاسخ به صورت ترکیب خطی از متغیرهای توضیحی فرض می‌شود. ضرایب جداگانه‌ای که با هر متغیر مرتبط هستند، شامل β می‌شوند.

اگر ما بردارهای ورودی را با X نشان دهیم که ستون‌های آن با بردارهای β مرتبط هستند، و بردار β شامل ضرایب باشد، آنگاه نتایج رگرسیون به صورت مجموع متغیرهای توضیحی که در ضرایب مربوطه ضرب شده‌اند، مدل می‌شود.

مدل ELM با استفاده از SLFN می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$\sum_{i=۱}^{\tilde{N}} \beta_i g(w_i \cdot x_j + b_i) = t_j, \quad i = ۱, ۲, \ldots, \tilde{N}, \quad j = ۱, ۲, \ldots, N$$

که در آن $x_j = [x_{j۱}, x_{j۲}, \ldots, x_{jn}]^T$ بردار ورودی و $t_j = [t_{j۱}, t_{j۲}, \ldots, t_{jm}]^T$ مقادیر هدف متناظر را نشان می‌دهند. $w_i = [w_{i۱}, w_{i۲}, \ldots, w_{in}]^T$ وزن‌های اتصال بین نورون ورودی و نورون پنهان است، $\beta_i = [\beta_{i۱}, \beta_{i۲}, \ldots, \beta_{im}]$ بردار وزن متصل کننده نورون پنهان به نورون خروجی است، b_i بایاس برای نورون لایه پنهان است، و $g(.)$ تابع فعال‌ساز است. $\tilde{N}$ تعداد نورون‌های لایه مخفی را نشان می‌دهد.

این معادله ساختار کلی ماشین یادگیری افراطی (ELM) را نشان می‌دهد. تعداد نورون‌ها در لایه ورودی معمولاً برابر با تعداد n متغیرهای توضیحی است و تعداد نورون‌ها در لایه خروجی برابر با m (تعداد متغیرهای پاسخ) در نظر گرفته می‌شود. در اغلب کاربردهای عملی، مقدار m برابر با ۱ است.

این مدل را می‌توان به صورت ماتریسی نیز بازنویسی کرد:

$$H\beta = T \qquad (۱)$$

به طوری که:

$$H = H(W, B, X) = \begin{bmatrix} g(w_۱x_۱ + b_۱) & \cdots & g(w_{\tilde{N}}x_۱ + b_{\tilde{N}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(w_۱x_N + b_۱) & \cdots & g(w_{\tilde{N}}x_{\tilde{N}} + b_{\tilde{N}}) \end{bmatrix}$$

که H توسط هوانگ و همکاران ماتریس خروجی لایه پنهان در شبکه عصبی نامیده شد.

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_۱^T \\ \vdots \\ \beta_N^T \end{bmatrix}$$

به طوری که β وزن بین لایه پنهان و لایه خروجی را نشان می‌دهد.

$$T = \begin{bmatrix} t_۱ \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix}$$

ماتریس مقادیر خروجی است.

در شبکه عصبی ابتدا وزن‌های بین لایه ورودی و لایه پنهان (w_i) و همچنین مقادیر بایاس (b_i) را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. سپس وظیفه ما یافتن وزن بین لایه پنهان و لایه خروجی (β) خواهد بود. بنابراین این وزن‌ها به گونه‌ای به دست می‌آید که عبارت زیر صدق می‌کند:

$$\|H\hat{\beta} - T\| = \min_{\beta} \|H\beta - T\|$$

اگر ماتریس H بر رتبه ستونی باشد، β از طریق عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\beta} = (H'H)^{-۱}(H'T)$$

اگر ماتریس H بر رتبه ستونی نباشد، محاسبه معکوس معمولی آن به‌صورت مستقیم امکان‌پذیر نیست. در چنین شرایطی، معکوس مورد پتروز (Pseudoinverse) (Moore-Penrose راه‌حل

جایگزین به‌شمار می‌آید. با استفاده از این شبکه معکوس، می‌توان مقدار تخمینی بردار ضرایب β را به‌صورت تحلیلی محاسبه کرد. در نتیجه، مقدار β به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\hat{\beta} = H^{+}T$$

که در آن H^{+} نشان‌دهنده شبکه معکوس ماتریس H و T ماتریس هدف یا بردار مقادیر واقعی خروجی است.

۱.۲ روش‌های محاسبه معکوس پتروز

روش‌های متعددی برای محاسبه H^{+} وجود دارد، از جمله:

- روش تصویر متعامد $(Orthogonal\ Projection\ Method)$
- روش‌های تکراری $(Iterative\ Techniques)$
- تجزیه مقادیر منفرد $(Singular\ Value\ Decomposition)$

در این میان، روش تصویر متعامد از جمله روش‌های رایج و کاربردی است. در این روش، نحوه محاسبه شبه معکوس بر اساس رتبه (rank) ماتریس H تعیین می‌شود:
اگر رتبه‌ی H برابر با $\tilde{N}$ (تعداد نورون‌های لایه پنهان) باشد، برای محاسبه شبه معکوس از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$H^{+} = (H^{T}H)^{-1}H^{T}$$

اگر رتبه‌ی H برابر با N (تعداد نمونه‌ها) باشد، از رابطه زیر بهره می‌گیرند:

$$H^{+} = H^{T}(HH^{T})^{-1}$$

این روابط امکان تخمین تحلیلی و دقیق پارامترها را فراهم می‌سازند، حتی در شرایطی که ماتریس H معکوس‌پذیر به صورت معمول نیست. در الگوریتم معمول ELM وزن‌های بین لایه پنهان و لایه خروجی معمولاً با استفاده از شبه معکوس مورد محاسبه قرار می‌گیرد. با این حال، در شرایطی که هم‌خطی شدید وجود دارد، رتبه‌ی ماتریس H به کمتر از $\tilde{N}$ کاهش می‌یابد و در نتیجه، محاسبه معکوس $H^{T}H$ امکان‌پذیر نخواهد بود. علاوه بر این، در حضور هم‌خطی شدید تخمین کمترین مربعات β ممکن است واریانس بالایی داشته باشد که این موضوع منجر به اختلاف قابل توجه بین β و مقدار واقعی β می‌شود.

۳ رگرسیون لیو در مدل یادگیری ماشین افراطی آمیخته

در حوزه‌ی رگرسیون خطی، روش‌های جایگزین مختلفی در کنار روش کمترین مربعات (Least Squares) وجود دارند. یکی از برجسته‌ترین این تکنیک‌ها، برآوردگر رگرسیون لیو (Liu Re-gression Estimator) است. این روش که توسط لیو [۶] معرفی شد، به طور مؤثری با مشکلات

نظیر هم‌خطی چندگانه که معمولاً در مدل‌های رگرسیون خطی مشاهده می‌شوند، مقابله می‌کند. در زمینه‌ی ELM این هم‌خطی می‌تواند منجر به شرایط بیمارگونه (ill-conditioned) در ماتریس وزن خروجی یعنی ماتریس H شود، که در نهایت به برآوردهای ناپایدار و کاهش عملکرد تعمیم‌پذیری منجر خواهد شد.

برآوردگر رگرسیون لیو که در ابتدا توسط لیو معرفی شده بود، توسط بلدیریم و ارتکال [۷] برای استفاده در ELM به کار گرفته شد. این دو پژوهشگر بیان کردند که در مدل‌های خطی ساده، به منظور یافتن برآوردگری که مجموع مربعات خطا را کمینه می‌کند باید تابع هدف زیر را در نظر گرفت:

$$(H\beta - T)^T(H\beta - T) + (d\beta - \beta)^T(d\beta - \beta)$$

که در آن d عددی در بازه $(۰, ۱)$ است. از طریق مراحل ریاضی، برآوردگر را می‌توان به صورت زیر استخراج کرد:

$$\hat{\beta}_d = (H'H + I)^{-۱}(H'T + d\hat{\beta}), \quad ۰ < d < ۱ \qquad (۲)$$

آنها این برآوردگر را L-ELM نامیدند و بیان کردند که این برآوردگر را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{\beta}_d = (H'H + I)^{-۱}(H'H + dI)\hat{\beta} \quad ۰ < d < ۱ \qquad (۳)$$

۱.۳ مدل آمیخته با ELM

به طور مشابه، ما می‌خواهیم از این رویکرد در مدل‌های آمیخته استفاده کنیم. برای این منظور ابتدا فرم ماتریسی مدل‌های آمیخته را بیان می‌کنیم:

$$y = X\beta + Zu + \varepsilon \qquad (۴)$$

و داریم:

$$\begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma^۲G & ۰ \\ ۰ & \sigma^۲W \end{bmatrix} \right)$$

تخمین در مدل‌های آمیخته به دو فرآیند تخمین اثرات تصادفی و ثابت و تخمین پارامترهای واریانس بستگی دارد. با به حداقل رساندن عبارت زیر، تخمین‌های β و اثرات تصادفی به دست می‌آیند [۸]:

$$\left(\frac{u}{y - X\beta - Zu}\right)^T \begin{bmatrix} G & ۰ \\ ۰ & W \end{bmatrix}^{-۱} \left(\frac{u}{y - X\beta - Zu}\right) =$$

$$u'G^{-۱}u + (y - X\beta - Zu)^T W^{-۱}(y - X\beta - Zu)$$

برای این منظور به کمک شبکه عصبی ELM برآورد اثرات ثابت را به دست می‌آوریم و به دلیل عدم قطعیت و تصادفی بودن اثرات تصادفی آنها، آنها را با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی بدست می‌آوریم. ابتدا، فرم کلی مدل رگرسیونی آمیخته را به فرم یادگیری ماشین بازنویسی می‌کنیم:

$$T = H\beta + Zu$$

با دنبال کردن کار ارتکال و کرونا و کار ارتکال و بلدربوم برآورد گردد. مدل آمیخته به کمک شبکه ELM به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\beta}_{EM} = (H'R^{-1}H)^{-1}H'R^{-1}y \quad (1)$$

$$\hat{\beta}_{EMd} = (H'R^{-1}H + I)^{-1}(H'R^{-1}y + dI)\hat{\beta}_{EM} \quad 0 < d < 1 \quad (2)$$

تخمین اثرات تصادفی و σ^2 به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{u}_{EMd} = Z'R^{-1}(y - H\hat{\beta}_{EMd}) \quad (3)$$

$$\hat{\sigma}^2_{EM} = \frac{(y - H\hat{\beta}_{EM})'R^{-1}(y - H\hat{\beta}_{EM})}{n - p} \quad (4)$$

تخمین پارامتر اریب برآورد لیو را می‌توان با استفاده از یکی از فرمول‌های زیر به دست آورد:

$$d_{EM-1} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i + 1)} \quad (5)$$

$$d_{EM-2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i^2 + 1)} \quad (6)$$

به طوری که λ_i مقادیر ویژه ماتریس $H'R^{-1}H$ هستند.

۴ الگوریتم یادگیری ماشین در مدل آمیخته

۱. تعداد نورون‌های لایه پنهان را مشخص می‌کنیم.

۲. بر اساس تعداد نورون‌های لایه پنهان، وزن‌ها (w_i) و مقادیر اریب (b_i) بین لایه ورودی و لایه پنهان را محاسبه می‌کنیم.

۳. خروجی لایه پنهان، یعنی ماتریس H را محاسبه می‌کنیم.

۴. مقدار برآوردی σ^2 را از طریق فرمول (۴) محاسبه می‌کنیم.

۵. پارامتر اریب برآوردگر لیو را از طریق رابطه (۵) و (۶) به دست می‌آوریم.

۶. وزن‌های β را از طریق فرمول (۲) محاسبه می‌کنیم.

جدول ۱: نتایج مقایسه عملکرد بر روی مجموعه داده های مختلف

مجموعه داده	d	میانگین d	زمان آموزش (ثانیه)	RMSE		انحراف معیار
				آموزش	تست	
Housing Boston	$\widehat{d}_{EM-۱}$	۰/۱۲۰۲۶۶	۰/۰۰۰۲۴۷	۰/۰۶۳۴	۰/۲۴۵۹	۰/۱۴۶۱
	$\widehat{d}_{EM-۲}$	۰/۰۲۹۷۲۵	۰/۰۰۰۲۷۹	۰/۰۶۳۰	۰/۲۲۶۴	۰/۱۳۱۶
Data Pup Rat	$\widehat{d}_{EM-۱}$	۰/۳۲۴۱۷۰	۰/۰۰۰۰۵۱	۰/۰۱۳۸	۰/۰۱۷۳	۰/۰۰۸۹
	$\widehat{d}_{EM-۲}$	۰/۲۹۰۶۳۸	۰/۰۰۰۰۸۹	۰/۰۱۳۷	۰/۰۱۶۸	۰/۰۰۸۶
school_data	$\widehat{d}_{EM-۱}$	۰/۰۹۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۶۵	۰/۱۶۸۰	۰/۱۷۲۳	۰/۰۱۸۷
	$\widehat{d}_{EM-۲}$	۰/۰۰۰۰۱۰	۰/۰۰۰۱۴۱	۰/۱۶۷۹	۰/۱۷۲۰	۰/۰۱۸۷

۵ داده‌های واقعی و نتایج

به منظور نشان دادن عملکرد الگوریتم یادگیری ماشین افراطی در رگرسیون لیو آمیخته از سه مجموعه داده استفاده شده است. مجموعه داده‌ها از کتاب

(Third Software Statistical Using Guide Practical A Models: Mixed Linear Edition)

استخراج شده است.

نتایج نشان می‌دهد که به کارگیری الگوریتم ELM در چارچوب رگرسیون لیو آمیخته، علاوه بر کاهش قابل توجه زمان اجرا، موجب افزایش دقت پیش‌بینی نیز می‌گردد و در نتیجه عملکرد مدل را در مواجهه با داده‌های پیچیده و دارای هم‌خطی به طور مؤثری بهبود می‌بخشد. همچنین نتایج نشان دادند به کارگیری فرم دوم پارامتر اریب برآورد لیو می‌تواند نتایج بهتری را ایجاد کند.

۶ نتیجه‌گیری

این پژوهش نشان می‌دهد که ELM نه تنها در سرعت آموزش بلکه در عملکرد کلی نیز توانمند است. از سوی دیگر مدل‌های آمیخته یکی از قدرتمندترین ابزارهای آماری برای تحلیل داده‌های پیچیده، داده‌هایی با ساختار سلسله مراتبی یا دارای همبستگی درونی هستند. این مدل‌ها برای تحلیل داده‌های طولی یا خوشه‌ای بسیار مناسب ایجاد شده‌اند. مدل‌های آمیخته امکان ارزیابی هم‌زمان اثرات ثابت و تصادفی را فراهم می‌کنند تا پیچیدگی‌های موجود در داده‌ها را بهتر مدل‌سازی نمایند.

با ترکیب ELM و مدل‌های آمیخته، ابزارهای مدل‌سازی قدرتمندتری برای فرآیندهای پیچیده ایجاد می‌شود. با این حال، یکی از مشکلات رایج در این ترکیب، امکان وجود هم‌خطی چندگانه در مدل است که باعث ناپایداری در برآورد پارامترها می‌شود. در چنین شرایطی، روش‌های جایگزین مانند رگرسیون لیو می‌توانند عملکرد بهتری در حضور هم‌خطی چندگانه ارائه دهند.

مراجع

[1] Huang G-B, Zhu Q-Y, Siew C-K. (2006). Extreme learning machine: theory and applications. *Neurocomputing* 70, 489–501.

[2] Huynh HT, Won Y, Kim JJ (2008) An improvement of extreme learning machine for compact single hidden layer feedforward neural networks. *Int J Neural Syst* 18, 433–441.

[3] Deng W, Zheng Q, Chen L (2009) Regularized Extreme Learning Machine. *2009 IEEE Symposium on Computational Intelligence and Data Mining*. IEEE, Nashville, TN, USA, pp 389–395.

[4] Miche Y, Sorjamaa A, Bas P, Simula O, Jutten C, Lendasse A (2010) OP-ELM: optimally pruned extreme learning machine. *IEEE Trans Neural Netw* 21, 158–162.

[5] Li G, Niu P (2013) An enhanced extreme learning machine based on ridge regression for regression. *Neural Comput Appl* 22, 803–810.

[6] Liu, K. (1993). A new class of biased estimate in linear regression, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 22(2), 393–402.

[7] Yildirim H, Ozkale MR (2020) An enhanced extreme learning machine based on Liu regression. *Neural Process Lett* 52, 421–442.

[8] Robinson G. K. (1991). That BLUP is a Good Thing: The Estimation of Random Effects. *Statistical Science*, 6(1), 15-32.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

معرفی یک برآوردگر جدید برای آنتروپی رنی

ملیحه عباس نژاد [۱]

[۱] گروه آمار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

چکیده

در این مقاله به معرفی یک برآوردگر جدید برای آنتروپی رنی می‌پردازیم. این برآوردگر بر مبنای برآوردگر کرنل تابع چگالی معرفی می‌شود. نشان می دهیم برآوردگر پیشنهادی یک برآوردگر سازگار است. در ادامه، به کمک شبیه سازی مونت کارلو، برآوردگر ارائه شده با برآوردگرهای موجود از نظر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطا مقایسه می شود. نتایج نشان می‌دهند که برآوردگر جدید عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای رقیب دارد.

کلمات کلیدی: اریبی، برآوردگر کرنل تابع چگالی، شبیه سازی مونت کارلو، میانگین توان دوم خطا

۱ مقدمه

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ و تابع توزیع $F(x)$ باشد. آنتروپی شانون X به صورت

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln f(x)dx = -E[\ln f(X)],$$

تعریف می‌شود [۳]. با توجه به کاربردهای آنتروپی در روش‌های آماری از جمله آزمون‌های نیکویی برازش، برآورد آن مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. از جمله مهمترین برآوردگرهای آنتروپی می‌توان به برآوردگر واسیچک [۴] اشاره کرد که به خاطر سادگی در محاسبات و دقت بالا مورد توجه بسیاری قرار گرفته است.

آنتروپی رنی مرتبه θ به عنوان تعمیمی از آنتروپی شانون توسط [۲] به صورت

$$H_\theta(f) = -\frac{1}{\theta-1}\ln\int_{-\infty}^{+\infty} f^\theta(x)dx = -\frac{1}{\theta-1}\ln E[f^{\theta-1}(X)],\quad \theta>0(\neq 1) \quad (1)$$

[1] m.abbasnejad@hsu.ac.ir, ma.abbasnejad57@gmail.com

تعریف می‌شود . آنتروپی رنی نیز کاربردهای فراوانی در آزمون‌های نیکویی برازش، پردازش تصویر، اقتصاد و ... دارد. مساله برآورد آنتروپی رنی توسط [۵] مورد بررسی قرار گرفت و نویسندگان از روش‌های مشابه روش واسیچک و کوریا [۱] برای برآورد آنتروپی رنی استفاده کردند.
در بخش دوم مقاله یک برآوردگر جدیدبرای آنتروپی رنی معرفی نموده و سازگاری آن را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش سوم با استفاده از شبیه سازی به مقایسه برآوردگر پیشنهادی با برآوردگرهای معرفی شده در [۵] می‌پردازیم.

۲ برآوردگر جدید

فرض کنید $X_{(۱)},...,X_{(n)}$ آماره های ترتیبی یک نمونه تصادفی از توزیع پیوسته F با تابع چگالی f باشند. به کمک تبدیل $F(x)=p$ می توان نوشت

$$\begin{aligned} H_\theta(f) &= -\frac{۱}{\theta-۱}\ln\int_{-\infty}^{+\infty} f^\theta(x)dx = -\frac{۱}{\theta-۱}\ln\int_۰^۱ \left[\frac{d}{dp}F^{-۱}(p)\right]^{۱-\theta} dp \\ &\simeq -\frac{۱}{\theta-۱}\ln\sum_{i=۱}^{n}\left\{\left[\frac{d}{dp}F^{-۱}(p)\right]^{۱-\theta}|_{p=\frac{i}{n}}\right\}(p_{i+۱}-p_i). \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه

$$\frac{d}{dp}F^{-۱}(p) \simeq \frac{X_{(i+m)}-X_{(i-m)}}{F(X_{(i+m)})-F(X_{(i-m)})}$$

و تقریب

$$F(X_{(i+m)})-F(X_{(i-m)}) \simeq \frac{f(X_{(i+m)})+f(X_{(i-m)})}{۲}(X_{(i+m)}-X_{(i-m)}),$$

داریم

$$\begin{aligned} H_\theta(f) &\simeq -\frac{۱}{\theta-۱}\ln\left\{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left[\frac{X_{(i+m)}-X_{(i-m)}}{\frac{f(X_{(i+m)})+f(X_{(i-m)})}{۲}(X_{(i+m)}-X_{(i-m)})}\right]^{۱-\theta}\right\} \\ &= -\frac{۱}{\theta-۱}\ln\left\{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left[\frac{۲}{f(X_{(i+m)})+f(X_{(i-m)})}\right]^{۱-\theta}\right\}. \end{aligned}$$

حال می توانیم از برآوردگر کرنل تابع چگالی استفاده کنیم که به صورت زیر تعریف می شود

$$\hat{f}(X_i)=\frac{۱}{nh}\sum_{i=۱}^{n}k\left(\frac{X_i-X_j}{h}\right),$$

جدول ۱: اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی رنی توزیع یکنواخت استاندارد

		خطا دوم توان میانگین جذر			اریبی		
n	θ	$HV_{\theta,m,n}$	$HC_{\theta,m,n}$	$HA_{\theta,m,n}$	$HV_{\theta,m,n}$	$HC_{\theta,m,n}$	$HA_{\theta,m,n}$
۱۰	۰/۲۵	۱/۲۲۴۴	۰/۲۱۱۴	۰/۱۹۸۰	۱/۲۱۴۶-	۰/۱۳۹۵-	۰/۹۵۰
	۰/۵	۱/۲۶۰۰	۰/۲۳۶۳	۰/۱۹۸۰	۱/۲۵۰۰-	۰/۱۷۲۶-	۰/۹۴۰
	۱/۵	۱/۰۱۳۲	۰/۳۴۹۳	۰/۱۹۰۴	۰/۹۹۴۶-	۰/۲۹۳۰-	۰/۵۷۳
	۲	۱/۰۸۰۴	۰/۴۰۸۵	۰/۱۸۷۸	۱/۰۵۵۷-	۰/۳۴۲۵-	۰/۵۲۳
	۳	۱/۲۳۰۱	۰/۵۴۵۴	۰/۱۸۸۷	۱/۱۸۷۱-	۰/۴۴۹۸-	۰/۴۰۷
	۴	۱/۳۴۰۴	۰/۶۳۹۸	۰/۱۹۱۹	۱/۲۸۶۵-	۰/۵۲۹۲-	۰/۳۵۷
۲۰	۰/۲۵	۱/۰۷۸۷	۰/۸۴۶	۰/۱۵۳۵	۱/۰۷۶۱-	۰/۲۸۶-	۰/۱۱۶۳
	۰/۵	۱/۱۱۲۶	۰/۱۰۲۴	۰/۱۵۲۸	۱/۱۰۹۶-	۰/۶۰۵-	۰/۱۱۵۰
	۱/۵	۰/۵۴۱۵	۰/۱۹۷۹	۰/۱۳۴۳	۰/۵۳۱۱-	۰/۱۶۸۵-	۰/۷۹۰
	۲	۰/۵۹۶۰	۰/۲۴۵۰	۰/۱۳۲۴	۰/۵۸۰۴-	۰/۲۰۸۶-	۰/۶۹۰
	۳	۰/۷۲۲۱	۰/۳۵۳۴	۰/۱۳۰۸	۰/۶۹۰۸-	۰/۲۹۶۲-	۰/۵۲۰
	۴	۰/۸۴۰۴	۰/۴۵۲۷	۰.۱۳۰۶	۰/۷۹۳۲-	۰.۳۷۵۸-	۰/۳۸۷
۳۰	۰/۲۵	۱/۰۳۳۴	۰/۵۵۳	۰/۱۴۳۳	۱/۰۳۲۲-	۰۰۶۸/۰	۰/۱۲۴۲
	۰/۵	۱/۰۶۷۵	۰/۶۳۰	۰/۱۴۰۲	۱/۰۶۶۰-	۰/۲۶۶-	۰/۱۱۵۹
	۱/۵	۰/۲۵۰۵	۰/۱۴۳۷	۰/۱۱۹۰	۰/۲۲۹۶-	۰/۱۲۳۹-	۰/۸۶۲
	۲	۰/۲۹۶۵	۰/۱۸۲۱	۰/۱۱۵۱	۰/۲۸۰۷-	۰/۱۵۷۳-	۰/۷۴۸
	۳	۰/۴۰۴۷	۰/۲۶۸۷	۰/۱۱۰۴	۰/۳۷۳۲-	۰/۲۲۹۰-	۰/۵۸۱
	۴	۰/۵۱۰۹	۰/۳۵۲۹	۰/۱۰۷۳	۰/۴۶۲۹-	۰/۲۹۷۰-	۰/۴۱۴
۵۰	۰/۲۵	۰/۹۹۸۵	۰۴۹۱/۰	۰/۱۳۴۱	۰/۹۹۸۱-	۰۳۴۵/۰	۰/۱۲۵۱
	۰/۵	۱/۰۳۱۳	۰۳۷۴/۰	۰/۱۳۰۸	۱/۰۳۰۷-	۰۰۰۱/۰	۰/۱۲۱۴
	۱/۵	۰/۱۶۴۴	۰۹۹۴/۰	۰/۱۰۵۹	۰/۱۵۷۸	۰۸۸۰/۰-	۰/۸۸۷
	۲	۰/۱۴۱۰	۰/۱۲۶۵	۰۹۹۸/۰	۰/۱۲۷۳	۰/۱۱۲۳-	۰/۷۸۴
	۳	۰/۱۱۷۱	۰/۱۸۶۳	۰۹۱۰/۰	۰۵۹۵/۰	۰/۱۶۳۶-	۰/۵۸۶
	۴	۰/۱۴۷۵	۰/۲۵۰۲	۰۸۷۴/۰	۰۱۳۵/۰-	۰/۲۱۶۴-	۰/۴۵۳

که در آن h پارامتر هموارسازی نامیده می‌شود و K معمولا تابع چگالی نرمال استاندارد در نظر گرفته می‌شود. بنابراین برآوردگر آنتروپی رنی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$HA_{\theta,m,n} = -\frac{۱}{\theta - ۱} \ln \left\{ \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} \left[\frac{۲}{\hat{f}(X_{(i+m)}) + \hat{f}(X_{(i-m)})} \right]^{۱-\theta} \right\}, \qquad (۲)$$

که در آن

$$\hat{f}(X_i) = \frac{۱}{nh} \sum_{i=۱}^{n} k\left(\frac{X_i - X_j}{h} \right),$$

و تابع کرنل K چگالی نرمال استاندارد اختیار شده است و $h = ۱/۰۶sn^{-۱/۵}$ و s انحراف معیار نمونه است. همچنین $m \leq n/۲$ یک عدد صحیح مثبت است و اگر $i < ۱$، $X_{(i)} = X_{(۱)}$ و اگر

جدول ۲: اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی رنی توزیع نرمال استاندارد

		خطا دوم توان میانگین جذر			اریبی		
n	θ	$HV_{\theta,m,n}$	$HC_{\theta,m,n}$	$HA_{\theta,m,n}$	$HV_{\theta,m,n}$	$HC_{\theta,m,n}$	$HA_{\theta,m,n}$
۱۰	۰/۲۵	۱/۸۰۳۴	۰/۷۵۰۱	۰/۵۷۹۹	۱/۷۸۴۸-	۰/۷۰۱۷-	۰/۵۲۱۰-
	۰/۵	۱/۵۹۴۰	۰/۵۵۷۰	۰/۳۸۳۷	۱/۵۷۱۹-	۰/۴۸۷۸-	۰/۲۸۴۴-
	۱/۵	۱/۰۵۰۰	۰/۴۲۴۱	۰/۲۶۲۰	۱/۰۱۱۴-	۰/۳۱۷۰-	۰۵۱۷/۰-
	۲	۱/۰۴۵۲	۰/۴۲۳۴	۰/۲۵۵۷	۰/۹۹۹۳-	۰/۲۹۷۵-	۰۰۱۷/۰-
	۳	۱/۰۷۳۵	۰/۴۵۵۱	۰/۲۶۵۷	۱/۰۱۰۸-	۰/۲۹۳۲-	۰۵۷۹/۰
	۴	۱/۱۱۷۰	۰/۴۹۲۵	۰/۲۷۱۸	۱/۰۴۲۲-	۰/۳۱۱۳-	۰۸۶۵/۰
۲۰	۰/۲۵	۱/۵۶۴۹	۰/۵۲۵۵	۰/۵۰۹۸	۱/۵۵۴۱-	۰/۴۸۹۸-	۰/۴۷۹۳-
	۰/۵	۱/۳۷۲۲	۰/۳۵۱۳	۰/۳۰۷۲	۱/۳۶۰۶-	۰/۳۰۰۰-	۰/۲۵۵۵-
	۱/۵	۰/۵۲۲۱	۰/۲۲۷۲	۰/۱۷۵۹	۰/۴۸۸۵-	۰/۱۳۴۰-	۰۲۷۰/۰-
	۲	۰/۵۰۰۳	۰/۲۲۰۸	۰/۱۷۶۳	۰/۴۶۰۷-	۰/۱۰۹۳-	۰۱۴۶/۰
	۳	۰/۵۰۲۵	۰/۲۳۶۶	۰/۱۸۸۹	۰/۴۵۲۶-	۰/۱۰۴۵-	۰۵۵۲/۰
	۴	۰/۵۳۳۳	۰/۲۶۶۷	۰/۱۹۴۹	۰/۴۷۱۲-	۰/۱۲۲۱-	۰۷۰۹/۰
۳۰	۰/۲۵	۱/۴۷۰۲	۰/۴۳۴۸	۰/۴۷۹۵	۱/۴۶۲۳-	۰/۴۰۴۵-	۰/۴۵۴۸
	۰/۵	۱/۲۸۳۹	۰/۲۶۹۳	۰/۲۷۳۵	۱/۲۷۳۵-	۰/۲۲۲۸-	۰/۲۳۵۷-
	۱/۵	۰/۲۵۴۷	۰/۱۶۱۸	۰/۱۳۹۹	۰/۲۳۰۴	۰۷۵۱/۰-	۰۱۵۵/۰-
	۲	۰/۲۷۷۳	۰/۱۵۷۲	۰/۱۴۲۳	۰/۲۵۳۳	۰۵۳۳/۰-	۰۱۸۵/۰-
	۳	۰/۲۹۲۴	۰/۱۷۱۳	۰/۱۵۲۵	۰/۲۶۴۷	۰۵۲۴/۰-	۰۴۷۸/۰
	۴	۰/۲۹۱۷	۰/۱۹۶۸	۰/۱۶۰۸	۰/۲۵۷۰	۰۶۸۹/۰-	۰۶۰۰/۰
۵۰	۰/۲۵	۱/۳۷۴۸	۰/۳۴۲۹	۰/۴۴۶۴	۱/۳۶۹۲-	۰/۳۱۸۲-	۰/۴۳۳۴-
	۰/۵	۱/۲۰۱۶	۰/۱۹۱۶	۰/۲۳۸۴	۱/۱۹۶۱-	۰/۱۵۰۹-	۰/۲۱۳۷-
	۱/۵	۰/۲۳۱۳	۰/۱۱۱۹	۰/۱۰۶۶	۰/۱۸۱۵-	۰۲۵۸/۰-	۰۰۳۹/۰-
	۲	۰/۲۱۲۷	۰/۱۱۴۳	۰/۱۱۱۵	۰/۱۵۲۲-	۰۱۳۳/۰-	۰۱۹۲/۰
	۳	۰/۱۲۵۶	۰/۱۲۸۵	۰/۱۲۲۲	۰/۱۴۱۱-	۰۱۶۶/۰-	۰۴۲۵/۰
	۴	۰/۲۳۹۰	۰/۱۴۶۸	۰/۱۲۹۸	۰/۱۵۲۲-	۰۳۳۰/۰-	۰۵۲۴/۰

$X_{(i)} = X_{(n)}$ ،$i > n$ در نظر گرفته می‌شود.
در قضیه ۱.۳ نشان می‌دهیم که $HA_{\theta,m,n}$ یک برآوردگر سازگار است.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ آماره های ترتیبی یک نمونه تصادفی از توزیع پیوسته F با تابع چگالی f باشند. وقتی $n \to \infty$، $m \to \infty$ و $\frac{m}{n} \to 0$، آنگاه $HA_{\theta,m,n} \xrightarrow{Pr.} H_\theta(f)$.

اثبات. با استفاده از سازگاری برآورد کرنل و قانون اعدادبزرگ، وقتی $n \to \infty$، $m \to \infty$ و $\frac{m}{n} \to 0$،

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} HA_{\theta,m,n} &= -\frac{۱}{\theta-۱}\ln\left\{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left[\frac{۲}{\hat{f}(X_{(i+m)})+\hat{f}(X_{(i-m)})}\right]^{۱-\theta}\right\} \\ &\simeq -\frac{۱}{\theta-۱}\ln\left\{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left[\frac{۲}{f(X_{(i+m)})+f(X_{(i-m)})}\right]^{۱-\theta}\right\} \\ &\xrightarrow{Pr.} -\frac{۱}{\theta-۱}\ln E\left[\frac{۲}{f(X_{(i+m)})+f(X_{(i-m)})}\right]^{۱-\theta} \\ &= -\frac{۱}{\theta-۱}\ln E\left[\frac{X_{(i+m)}-X_{(i-m)}}{F(X_{(i+m)})-F(X_{(i-m)})}\right]^{۱-\theta}. \end{aligned}$$

چون $f(x)$ در بازه $(X_{(i-m)}, X_{(i+m)})$ پیوسته و مثبت است، پس مقداری مانند $X_i^* \in (X_{(i-m)}, X_{(i+m)})$ وجود دارد که

$$f(X_i^*) = \frac{F(X_{(i+m)})-F(X_{(i-m)})}{X_{(i+m)}-X_{(i-m)}}.$$

بنابراین

$$HA_{\theta,m,n} \xrightarrow{Pr.} -\frac{۱}{\theta-۱}\ln E[f(X_i^*)]^{\theta-۱} = H_\theta(f).$$

□

در قضیه ۲.۲ نشان می‌دهیم که تغییر مقیاس در اریبی و میانگین توان دوم خطای $HA_{\theta,m,n}$ تاثیری ندارد.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $H_\theta(X)$ و $H_\theta(Z)$ به ترتیب نشان دهنده آنتروپی رنی دو متغیر X و Z باشند و $Z = bX$ که در آن $b > ۰$. آنگاه

الف) $E\left[HA^Z_{\theta,m,n}\right] = E\left[HA^X_{\theta,m,n}\right] + \ln b$،

ب) $Var\left[HA^Z_{\theta,m,n}\right] = Var\left[HA^X_{\theta,m,n}\right]$،

ج) $MSE\left[HA^Z_{\theta,m,n}\right] = MSE\left[HA^X_{\theta,m,n}\right]$،

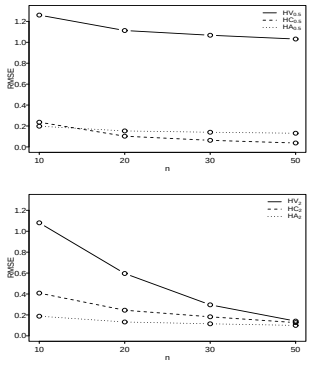
که در آن بالانویس‌های X و Z اشاره به توزیع متناظر دارند.

۳ شبیه سازی

در این بخش یک شبیه سازی مونت کارلو برای بررسی و مقایسه دقت برآوردگر پیشنهادی با برآوردگرهای معرفی شده در از نظر اریبی (Bias) و جذر میانگین توان دوم خطا (RMSE) انجام شده است. برای

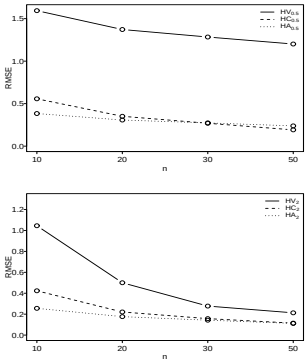
جدول ۳: اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی رنی توزیع نمایی با میانگین ۱

		خطا دوم توان میانگین جذر			اریبی		
n	θ	$HV_{\theta,m,n}$	$HC_{\theta,m,n}$	$HA_{\theta,m,n}$	$HV_{\theta,m,n}$	$HC_{\theta,m,n}$	$HA_{\theta,m,n}$
۱۰	۰/۲۵	۱/۹۳۹۰	۰/۹۶۷۱	۰/۸۳۰۳	۱/۸۵۸۰-	۰/۸۷۶۳-	۰/۷۴۲۳-
	۰/۵	۱/۸۰۱۳	۰/۶۱۹۹	۰/۴۶۵۵	۱/۷۶۰۸-	۰/۴۸۱۵-	۰/۲۷۷۱-
	۱/۵	۱/۱۳۷۶	۰/۴۱۲۸	۰/۴۴۷۴	۱/۰۷۵۳-	۰/۱۸۳۵-	۰/۲۵۲۲
	۲	۱/۱۸۰۸	۰/۴۵۳۰	۰/۵۰۶۸	۱/۱۰۷۱-	۰/۲۰۶۰-	۰/۳۵۱۰
	۳	۱/۳۰۳۱	۰/۵۶۲۵	۰/۵۹۷۴	۱/۲۰۲۲-	۰/۲۷۶۰-	۰/۴۷۱۹
	۴	۱/۳۶۱۸	۰/۶۰۸۷	۰/۶۵۸۵	۱/۲۴۹۷-	۰/۳۰۳۷-	۰/۵۴۷۲-
۲۰	۰/۲۵	۱/۹۲۶۴	۰/۷۱۵۸	۰/۷۵۳۹	۱/۸۰۴۰-	۰/۶۴۷۳-	۰/۷۰۶۶-
	۰/۵	۱/۵۷۲۶	۰/۴۰۵۷	۰/۳۶۳۷	۱/۵۵۰۰-	۰/۲۲۲۲-	۰/۲۶۱۱-
	۱/۵	۰/۶۸۸۱	۰/۲۷۱۲	۰/۳۶۱۶	۰/۶۳۶۸-	۰۹۱۳/۰-	۰/۲۵۷۶
	۲	۰/۷۳۸۰	۰/۳۱۰۰	۰/۴۲۸۴	۰/۶۷۸۲-	۰/۱۲۲۱-	۰/۳۴۸۱
	۳	۰/۸۷۷۴	۰/۴۱۵۳	۰/۵۱۱۱	۰/۷۹۲۵-	۰/۲۰۷۵-	۰/۴۴۵۳
	۴	۰/۹۷۷۷	۰/۴۸۵۲	۰/۵۶۷۱	۰/۸۸۰۱-	۰/۲۶۸۷-	۰/۵۱۱۷
۳۰	۰/۲۵	۱/۸۱۷۶	۰/۶۱۱۵	۰/۷۱۸۹	۱/۸۰۷۰-	۰/۵۵۳۰-	۰/۶۸۷۰-
	۰/۵	۱/۴۸۵۶	۰/۳۲۱۴	۰/۳۲۰۷	۱/۴۶۹۷-	۰/۲۳۰۹-	۰/۲۴۷۳-
	۱/۵	۰/۴۱۰۸	۰/۲۱۳۰	۰/۳۳۱۰	۰/۳۵۵۹-	۰۵۷۶/۰-	۰/۲۶۰۹
	۲	۰/۴۶۳۵	۰/۲۵۰۱	۰/۳۹۳۳	۰/۳۹۸۸-	۰۹۳۰/۰-	۰/۳۳۷۳
	۳	۰/۵۸۴۸	۰/۳۳۱۴	۰/۴۷۲۹	۰/۵۰۰۵-	۰/۱۶۵۷-	۰/۴۲۸۵
	۴	۰/۶۹۲۹	۰/۴۰۷۱	۰/۵۲۴۵	۰/۵۹۳۸-	۰/۲۳۰۹-	۰/۴۸۴۹
۵۰	۰/۲۵	۱/۷۰۶۷	۰/۵۰۳۶	۰/۶۸۱۲	۱/۶۹۴۳-	۰/۴۵۴۰-	۰/۶۶۲۰-
	۰/۵	۱/۴۰۲۷	۰/۲۴۱۵	۰/۲۸۰۰	۱/۳۹۱۹-	۰/۱۶۲۲-	۰/۲۲۹۹-
	۱/۵	۰/۱۵۸۶	۰/۱۵۸۳	۰/۲۹۴۸	۰۳۲۷/۰	۰۳۲۵/۰-	۰/۲۵۲۱
	۲	۰/۱۷۹۵	۰/۱۸۷۶	۰/۳۵۶۹	۰۰۳۶/۰-	۰۶۲۵/۰-	۰/۳۲۲۴
	۳	۰/۲۵۳۱	۰/۲۵۵۶	۰/۴۳۰۰	۰۹۹۱/۰-	۰/۱۲۹۸-	۰/۴۰۱۵
	۴	۰/۳۳۸۶	۰/۳۳۳۳	۰/۴۷۴۹	۰/۱۹۴۱-	۰/۱۹۵۲-	۰/۴۴۹۸

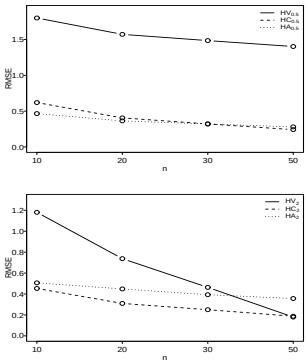


شکل ۱: جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی رنی بر حسب n به ازای $\theta = ۰/۵, ۲$ برای توزیع یکنواخت استاندارد

این منظور به ازای $n = ۱۰$، ۲۰، ۳۰، ۵۰، ۱۰۰۰۰ نمونه به اندازه n از توزیع‌های یکنواخت استاندارد، نرمال استاندارد و نمایی با میانگین ۱ تولید شده و مقادیر برآوردهای $HV_{\theta,m,n}$، $HA_{\theta,m,n}$



شکل ۲: جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی رنی بر حسب n به ازای $\theta = ۰/۵, ۲$ برای توزیع نرمال استاندارد



شکل ۳: جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی رنی بر حسب n به ازای $\theta = ۰/۵, ۲$ برای توزیع نمایی با میانگین ۱

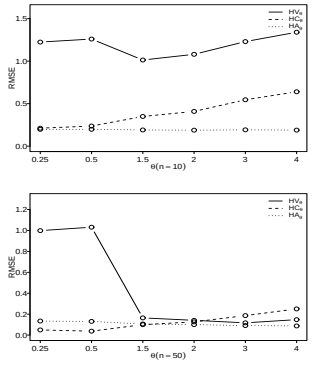
و $HC_{\theta,m,n}$ به ازای مقادیر مختلف θ و m محاسبه شده‌اند. مقادیر Bias و RMSE های به دست آمده در جدول‌های ۱ تا ۳ ارائه شده‌اند. انتخاب m بهینه همواره چالش برانگیز بوده است. در این جا نیز مقدار بهینه m به توزیع موردنظر، مقدار θ و حجم نمونه بستگی دارد. ما برای همه مقادیر $m \leq n/۲$ شبیه سازی را انجام داده و بر اساس نتایج آن مقادیر زیر را برای m پیشنهاد می کنیم. نتایج ارائه شده در جدول‌های ۱ تا ۳ نیز بر اساس همین مقادیر محاسبه شده‌اند.

برآوردگرهای $HV_{\theta,m,n}$ و $HC_{\theta,m,n}$

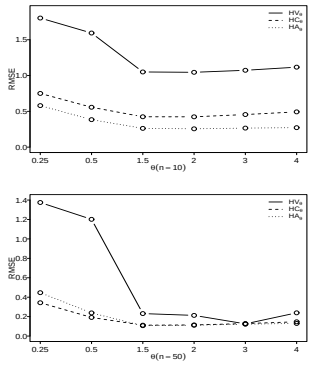
$$m = \begin{cases} ۲ & \theta < ۱ \\ [\sqrt{n} + ۰/۵] & \theta > ۱. \end{cases}$$

برآوردگر $HA_{\theta,m,n}$

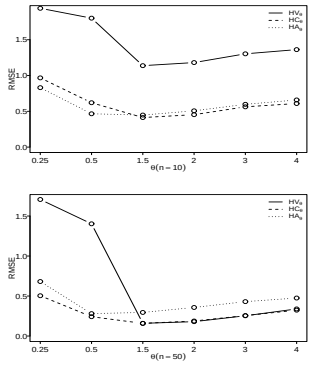
$$m = \begin{cases} [\sqrt{n} + ۰/۵] & \theta < ۱ \\ ۲ & \theta > ۱. \end{cases}$$



شکل ۴: جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی رنی بر حسب θ به ازای $n = ۱۰, ۵۰$ برای توزیع یکنواخت استاندارد



شکل ۵: جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی رنی بر حسب θ به ازای $n = ۱۰, ۵۰$ برای توزیع نرمال استاندارد



شکل ۶: جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی رنی بر حسب θ به ازای $n = ۱۰, ۵۰$ برای توزیع نمایی با میانگین ۱

با توجه به جدول های ۱ تا ۳ می توان گفت برآوردگر $HV_{\theta,m,n}$ عملکرد ضعیفی دارد. برآوردگر $HA_{\theta,m,n}$ نسبت به برآوردگر $HC_{\theta,m,n}$ برای توزیع‌های یکنواخت و نرمال به ویژه برای مقادیر $\theta > ۱$ عملکرد بهتری دارد. برای توزیع نمایی عملکرد دو برآوردگر به ازای $n = ۱۰, ۲۰$ تقریبا یکسان است هر چند برای مقادیر بزرگتر n عملکرد $HC_{\theta,m,n}$ بهتر است. برای مقایسه ساده‌تر، در ادامه نمودارهایی

رسم شده‌اند که رفتار جذر توان دوم خطای برآوردگرها را بر حسب n و θ نشان می‌دهند. شکل‌های ۱ تا ۳ همان نتایج جدول های ۱ تا ۳ را تایید می‌کنند. در شکل های ۴ تا ۶ رفتار جذر توان دوم خطای برآوردگرها نسبت به θ بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که برای هر سه توزیع در نظر گرفته شده، هر سه برآوردگر برای مقادیر θ نزدیک به یک عملکرد بهتری نسبت به مقادیر θ دورتر از یک دارند.

مراجع

[1] Correa, J.C. (1995), *A new estimator of entropy*, Comm. in Stat, Theo. and Meth., 24, 2439–2449.

[2] Renyi, A. (1961), *On measures of entropy and information*, Proc. of Fourth Berkeley Symp. of Math. Stat. and Prob., Vol I, University of California Press, Berkeley. 547–554.

[3] Shannon, C.E. (1948), *A mathematical theory of communication*, Bell Sys. Tech. J. 27, 379–423.

[4] Vasicek, O. (1976), *A test for normality based on sample entropy*, J. of Royal Stat. Soc., Series B. 38, 54–59.

[5] Wachowiak, M.P., Smolíková, R., Tourassi, G.D. and Elmaghraby, A.S. (2005), *Estimation of generalized entropies with sample spacing*, Patt. Anal. and Appl. 8, 95–101.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC
Islamic World Science Citation Center
۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

مقایسه چند معیار برای شکل توزیع

مهدی مهدی‌زاده [1]

[1] گروه آمار، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری

چکیده

گشتاورهای نمونه‌ای، کاربردهای زیادی در آمار دارند. بسیاری از آماره‌های توصیفی بر حسب گشتاورها بیان می‌شوند. به کمک این آماره‌ها می‌توان اطلاعات مهم درباره تمرکز، پراکندگی و شکل توزیع داده‌ها به دست آورد. این مقاله به مطالعه چند معیار شکل توزیع بر اساس گشتاورها می‌پردازد. اریبی و میانگین مربع خطای این معیارها از طریق شبیه‌سازی مقایسه شده‌اند.

کلمات کلیدی: آمار توصیفی، ضرایب چولگی و کشیدگی، گشتاورها

۱ مقدمه

بسیاری از روش‌های آماری بر مبنای فرض‌های توزیعی بنا شده‌اند. تحت شرایطی، این گونه روش‌ها نسبت به معادل ناپارامتری خود کاراتر هستند. به عنوان مثال می‌توان به توزیع‌های نرمال و نمایی اشاره کرد که شکل ریاضی انعطاف پذیری دارند و رویه‌های آماری بسیاری بر اساس آنها پیشنهاد شده‌اند. انتخاب توزیعی که برازش مناسب به داده‌ها دارد، یک گام مهم در استنباط آماری پارامتری است. به این منظور می‌توان از ابزارهای مختلف در آمار توصیفی استفاده کرد. یک دسته مهم از این ابزارها، معیارهای شکل توزیع هستند.

این مقاله به مطالعه چند معیار شکل توزیع بر اساس گشتاورها می‌پردازد. در بخش ۲، ابتدا گشتاورهای مختلف یک توزیع را معرفی کرده و قضیه‌ای درباره مشخصه‌سازی یک توزیع بر حسب گشتاورهای آن بیان می‌کنیم. سپس، ضرایب چولگی و کشیدگی گشتاوری ارائه می‌شوند. در بخش ۳، اریبی و میانگین مربع خطای این معیارها از طریق شبیه‌سازی مقایسه شده‌اند. در بخش ۴، نتایج مهم مرور می‌شوند.

[1] mahdizadeh.m@hsu.ac.ir

۲ معیارهای شکل توزیع

می‌دانیم اطلاع کامل درباره متغیر تصادفی X در تابع جرم یا چگالی احتمال آن وجود دارد. اما در برخی کاربردها، تنها آگاهی از چند مشخصه یا پارامتر در مورد X کافی است. گشتاورها یکی از مشخصه‌های مهم برای هر متغیر تصادفی هستند. تحت شرایطی، گشتاورها توزیع یک متغیر تصادفی را به طور یکتا مشخص می‌کنند. گشتاور مرتبه r ام متغیر تصادفی X حول مبدأ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu'_r = E(X^r),$$

که در آن r یک عدد طبیعی است. μ'_1 امید ریاضی متغیر تصادفی X نامیده می‌شود و آن را با μ نشان می‌دهیم. طبق قضیه زیر، هر توزیع به طور یکتا توسط μ'_r ها مشخص می‌شود (روهتگی و احسانز صالح [۴] ، ص ۸۹).

قضیه ۱.۲. فرض کنید μ'_r دنباله گشتاورهای متغیر تصادفی X حول مبدأ است. اگر برای یک t مثبت، سری

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu'_r}{r!}\, t^r$$

مطلقاً همگرا باشد، آنگاه توزیع X به طور یکتا توسط μ'_r ها مشخص می‌شود.

گشتاور مرکزی مرتبه r ام متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_r = E(X-\mu)^r,$$

که در آن r یک عدد طبیعی است. μ_2 واریانس متغیر تصادفی X نامیده می‌شود و آن را با σ^2 یا $Var(X)$ نشان می‌دهیم. به کمک بسط دو جمله‌ای می‌توان گشتاورهای مرکزی را بر حسب گشتاورهای حول مبدأ بیان کرد. برخی شاخص‌های مهم توزیعی بر حسب گشتاورها بیان می‌شوند. ضریب چولگی و ضریب کشیدگی دو شاخص مهم برای شکل توزیع هستند که به ترتیب عبارت‌اند از

$$\alpha = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

و

$$\beta = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

یک ضریب چولگی غیر صفر، عدم تقارن توزیع را نشان می‌دهد. ضریب کشیدگی، وزن دُم‌های توزیع را در مقایسه با توزیع نرمال اندازه می‌گیرد که برای آن، مقدار ضریب کشیدگی برابر است با ۳.

فرض کنید $x_1, \ldots, x_n$ مشاهدات یک نمونه تصادفی به حجم n از جامعه مورد نظر باشند. در این صورت، برآورد ضرایب فوق به ترتیب عبارت‌اند از

$$g = \frac{m_3}{m_2^{3/2}},$$

و

$$k = \frac{m_4}{m_2^2},$$

که در آن

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r, \quad r = 2, 3, 4, \ldots,$$

گشتاور مرکزی مرتبه r ام نمونه، و $\bar{x}$ میانگین نمونه است. تحت فرض نرمال بودن توزیع داده‌ها، می‌توان نشان داد که این معیارها توزیع مجانبی نرمال دارند (کندال و استیوارت [۳]).

می‌دانیم که m_r برآوردگری نااریب برای μ_r نیست. بنابراین، g و k نیز دارای اریبی هستند. برای کاهش این نقص، شکل اصلاح شده‌ای از معیارهای فوق پیشنهاد شده‌اند:

$$g^* = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-2}g,$$

و

$$k^* = \frac{n-1}{(n-2)(n-3)}\left[(n+1)k - 3(n-1)\right] + 3.$$

برای جزئیات بیشتر درباره این معیارها به جوآنز و گیل [۲] مراجعه کنید.

۳ شبیه‌سازی

در این بخش، نتایج یک مطالعه شبیه‌سازی برای مقایسه معیارهای مختلف چولگی و کشیدگی ارائه می‌شود. به این منظور، فرض می‌کنیم که جامعه دارای توزیع نرمال چوله است. این توزیع توسط آزالینی [۱] به عنوان تعمیمی از توزیع نرمال معرفی شد. تابع چگالی احتمال این توزیع در حالت استاندارد به صورت زیر است:

$$f_X(x) = 2\phi(x)\Phi(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}; \lambda \in \mathbb{R},$$

که در آن $\phi(.)$ و $\Phi(.)$ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع متغیر تصادفی نرمال استاندارد هستند. متغیر تصادفی X با توزیع فوق را به اختصار با $X \sim \mathrm{SN}(\lambda)$ نشان می‌دهیم. پارامتر شکل λ ، عدم تقارن توزیع را کنترل می‌کند. به راحتی می‌توان دید که توزیع نرمال استاندارد متناظر با حالت $\lambda = 0$ است.

میانگین و واریانس این توزیع عبارت‌اند از

$$\mu = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\delta,$$

و

$$\sigma^۲ = ۱ - \frac{۲}{\pi}\delta^۲,$$

که در آن $\delta = \lambda/\sqrt{۱+\lambda^۲}$. همچنین، ضرایب چولگی و کشیدگی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\alpha = \frac{(۴-\pi)\mu^۳}{۲\sigma^۳}, \qquad (۱)$$

و

$$\beta = \frac{۲(\pi-۳)\mu^۴}{\sigma^۴} + ۳, \qquad (۲)$$

که در آن μ و $\sigma^۲$ در بالا تعریف شده‌اند. می‌توان دید که با افزایش λ (از لحاظ قدر مطلق)، چولگی توزیع بیشتر و دم‌های آن نیز ضخیم‌تر می‌شود.

در مطالعه شبیه‌سازی، $\lambda = ۰, ۱/۵, ۶, ۵۰$ انتخاب شد. توزیع نرمال چوله به ازای $\lambda = ۱/۵$ چولگی اندک، و به ازای $\lambda = ۶$ چولگی زیاد دارد. همچنین، $\lambda = ۵۰$ حالت حدی $\lambda \to \infty$ را تقریب می‌کند. برای هر مقدار λ ، ۱۰۰۰۰۰ نمونه تصادفی به حجم‌های $n = ۱۵, ۳۰, ۶۰, ۹۰$ از توزیع $\mathrm{SN}(\lambda)$ تولید شد و بر اساس آنها، اریبی و میانگین مربع خطای هر معیار برآورد شد. به این منظور، مقادیر واقعی α و β از رابطه (۱) و (۲) محاسبه شد. اگر مقدار واقعی یک معیار را با t و مقدار محاسبه شده آن از نمونه i ام را با T_i نشان دهیم، آنگاه برآورد اریبی و میانگین مربع خطا عبارت‌اند از

$$\mathrm{Bias} = \frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}\sum_{i=۱}^{۱۰۰۰۰۰}(T_i - t),$$

و

$$\mathrm{MSE} = \frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}\sum_{i=۱}^{۱۰۰۰۰۰}(T_i - t)^۲.$$

نتایج شبیه‌سازی در جدول ۴ گزارش شده است. برای λ و n ثابت، قدر مطلق اریبی هر معیار اصلاح شده نسبت به معیار اصلی کمتر بوده، و میزان کاهش در حجم نمونه‌های کوچک محسوس‌تر است. این روند برای معیارهای چولگی وقتی $\lambda = ۰$ است نقض می‌شود. این موضوع به دلیل آن است که g و g^* تحت فرض $\lambda = ۰$ نااریب هستند. از طرف دیگر، میانگین مربع خطای هر معیار اصلاح شده نسبت به معیار اصلی بیشتر است. ملاحظه می‌شود برای λ ثابت، قدر مطلق اریبی و میانگین مربع

جدول ۱: برآورد اریبی و میانگین مربع خطای معیارهای مختلف چولگی و کشیدگی

		g		g^*		k		k^*	
λ	n	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE
0	15	0.001	0.271	0.001	0.337	-0.376	0.748	-0.002	1.251
	30	0.000	0.165	0.000	0.183	-0.195	0.525	-0.001	0.689
	60	0.000	0.090	0.000	0.095	-0.096	0.320	0.003	0.368
	90	0.000	0.062	0.000	0.064	-0.066	0.233	0.000	0.256
1.5	15	-0.106	0.292	-0.084	0.356	-0.499	0.956	-0.102	1.468
	30	-0.056	0.180	-0.043	0.198	-0.269	0.746	-0.056	0.955
	60	-0.028	0.102	-0.021	0.107	-0.138	0.507	-0.027	0.579
	90	-0.020	0.070	-0.015	0.073	-0.094	0.384	-0.019	0.420
6	15	-0.266	0.332	-0.194	0.362	-0.910	2.113	-0.441	2.843
	30	-0.143	0.197	-0.103	0.206	-0.539	1.835	-0.269	2.256
	60	-0.073	0.112	-0.052	0.115	-0.294	1.402	-0.146	1.580
	90	-0.050	0.080	-0.036	0.081	-0.201	1.120	-0.099	1.218
50	15	-0.283	0.334	-0.201	0.356	-0.999	2.449	-0.518	3.260
	30	-0.153	0.198	-0.108	0.206	-0.596	2.120	-0.315	2.595
	60	-0.079	0.113	-0.055	0.116	-0.328	1.617	-0.173	1.819
	90	-0.054	0.081	-0.038	0.082	-0.224	1.292	-0.117	1.403

خطای هر معیار نسبت به n نزولی است. این ویژگی برای قدر مطلق اریبی معیارهای چولگی به ازای $\lambda = ۰$ ، به دلیلی که قبلاً ذکر شد برقرار نیست. در پایان، با فرض ثابت بودن n و صرفنظر از چند مورد، قدر مطلق اریبی و میانگین مربع خطای هر معیار نسبت به λ صعودی است. به عبارت دیگر، با افزایش چولگی توزیع، دقت برآورد کاهش می‌یابد.

۴ نتیجه‌گیری

گشتاورها یکی از مشخصه‌های مهم برای هر توزیع هستند. تحت شرایطی، هر توزیع بر حسب گشتاورهای آن مشخصه‌سازی می‌شود. یک روش مطالعه توزیع‌های احتمالی، استفاده از معیارهای

توصیفی است که جنبه‌های مختلف یک توزیع را نشان می‌دهند. برای مثال می‌توان به معیارهای تمرکز، پراکندگی و شکل توزیع اشاره کرد. دسته‌ای از این معیارها بر حسب گشتاورهای توزیعی بیان می‌شوند. در عمل، توزیع جامعه مجهول بوده و این معیارها بر اساس گشتاورهای نمونه‌ای برآورد می‌شوند.

این مقاله به مطالعه چند معیار شکل توزیع می‌پردازد. ضرایب چولگی و کشیدگی گشتاوری و شکل اصلاح شده آنها با استفاده از شبیه‌سازی مقایسه شده‌اند. به این منظور، خانواده توزیع نرمال چوله به عنوان توزیع جامعه در نظر گرفته شد. نتایج نشان می‌دهد که ضرایب اصلاح شده از نظر قدر مطلق اریبی، عملکرد بهتری دارند در حالی که ضرایب اصلی از نظر میانگین مربع خطا برتری دارند.

مراجع

[1] Azzalini, A. (1985). *A class of distributions which includes the normal ones*. Scandinavian Journal of Statistics 12, 171-178.

[2] Joanes, D., and Gill, C. (1998). *Comparing measures of sample skewness and kurtosis*. Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician) 47, 183-189.

[3] Kendall, M., and Stuart, A. (1969). *The Advanced Theory of Statistics*. McGraw Hill, New York.

[4] Rohatgi, V.K., and Ehsanes Saleh, A.K.Md. (2015). *An Introduction to Probability and Statistics, 3rd Edition*. Wiley, New York.

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

بررسی جواب‌های دستگاه معادلات شکار و شکارچی لزلی- گاِور

محمدحسین رحمانی‌دوست [۱] نجمه توفیقی [۲]

[۱,۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه نیشابور

چکیده

در این مقاله، پویایی یک مدل لزلی–گاِور با برداشت غیرخطی و حضور شکارچی عمومی بررسی شده است. تحلیل نقاط تعادل نشان می‌دهد دستگاه قادر است تا سه حالت پایدار (شامل نقاط ثابت و دورهای حدی) را به صورت همزمان نمایش دهد. نتایج تأیید می‌کنند که برداشت غیرخطی پایداری محیط زیست را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد و دستگاه به شدت به شرایط اولیه حساس است. بررسی رفتار جواب‌ها وابستگی به پارامترهای برداشت و منابع غذایی جایگزین را نشان می‌دهد. افزایش برداشت باعث انقراض شکار می‌شود در صورتی که منابع غذایی با حفظ بقای شکارچی نقش حفاظتی در محیط زیست ایفا می‌کند. این نتایج ابزار تحلیلی برای مدیریت پایدار منابع زیستی ارائه می‌دهد.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل، مدل لزلی–گاِور، برداشت غیرخطی، شکارچی عمومی.

۱ مقدمه

مدل‌های شکار–شکارچی مانند مدل لوتکا–ولترا، با فرض رشد نامحدود شکار و نوسانات دوره‌ای، پایه‌های اولیه درک تعادل‌های اکولوژیکی را شکل دادند [۱، ۲]. با این حال، محدودیت‌های این مدل‌ها منجر به توسعه مدل‌هایی مانند لزلی– گاِور شد که رشد شکارچی را به صورت لجستیک و وابسته به تراکم شکار توصیف می‌کند. این مدل‌ها اثرات برداشت خطی را بررسی کرده‌اند و عواملی مانند برداشت منابع و اثرات ترس بر شکار به مدل‌ها افزوده شد، اما تأثیر برداشت غیرخطی بر دستگاه‌ها با وجود شکارچی عمومی به طور کامل بررسی نشده است [۳]. هدف این مقاله، برطرف کردن این این شکاف پژوهشی با معرفی مدل لزلی–گاِور اصلاح‌شده است به طوری که همزمان دو عامل را در نظر می‌گیرد. در محیط‌های واقعی، شکارچیان اغلب به منابع غذایی جایگزین دسترسی دارند که بقای آن‌ها را در شرایط کمبود شکار تضمین می‌کند [۴]. برداشت پایدار به عنوان فعالیتی که تعادل محیط زیست را حفظ می‌نماید، از طریق کنترل پارامترهای برداشت (مانند تلاش ماهیگیری یا ظرفیت محیطی) به جلوگیری از انقراض گونه‌ها کمک می‌کند. مدل لزلی گاور در شرایط خاصی به حالت‌های مشهور

[1] mh.rahmanidoust@neyshabur.ac.ir
[2] Najmeh.tofighi@neyshabur.ac.ir

مانند تعادل پایدار سراسری، یا حتی چند پایداری تبدیل می‌شود. به ویژه هنگامی که منابع غذایی جایگزین برای شکارچی وجود داشته باشد یا برداشت غیر خطی از آستانه بحرانی فراتر رود، دستگاه از حالت‌های ساده به پویایی‌های پیچیده تبدیل می‌شود. این نشان دهنده حساسیت محیط زیست‌ها به تغییرات پارامترهای انسانی و محیطی است و ابزارهایی برای طراحی استراتژی‌های مدیریتی پایدار ارائه می‌دهد.

۲ مدل‌سازی ریاضی

با در نظر گرفتن فرض‌های ذیل:

- $x(t)$ بیانگر تعداد جمعیت شکار در زمان t است.
- $y(t)$ بیانگر تعداد جمعیت شکارچی در زمان t است.
- r و k نرخ رشد ذاتی و ظرفیت محیطی شکار است.
- b نرخ شکارگری است.
- E، $\beta_۲$، $\beta_۱$، α پارامترهای برداشت غیر خطی به ترتیب عبارتند از تلاش برداشت، ثابت‌های مناسب و ضریب شکار.
- δ، n و c به ترتیب بیانگر منابع غذایی جایگزین، وابستگی به شکار و نرخ رشد شکارچی هستند.

مدل عبارت است از

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(۱-\frac{x}{K}) - bxy - \frac{\alpha E x}{\beta_۱ E + \beta_۲ x}\\ \frac{dy}{dt} &= \delta y(۱ - \frac{y}{nx+c})\end{aligned} \qquad (۱)$$

معادلات دیفرانسیل (۱) با کمک تغییر متغیر به دستگاه ساده شده ذیل تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = rx(۱-x) - axy - \dfrac{hx}{q+x}\\ \dfrac{dy}{dt} = sy(۱ - \dfrac{y}{x+K})\end{cases} \qquad (۲)$$

$$k = \frac{c}{nK},\quad s = \frac{\delta}{r},\quad a = \frac{bnK}{r},\quad h = \frac{\alpha E}{r\beta_۲ K},\quad q = \frac{\beta_۱ E}{\beta_۲ K}$$

که در آن K تراکم منابع غذایی جایگزین برای شکار، h نرخ برداشت، q پارامتر آستانه تراکم شکار برای برداشت و a نرخ حمله شکارچی است.

۳ نتایج اصلی

ابتدا نقاط تعادلی و سپس پایداری آن‌ها را بررسی می‌کنیم. برای پیدا کردن نقاط تعادلی دستگاه (۲) کافی است مختصات دستگاه $x - y$ را برابر صفر قرار دهیم.

۱.۳ نقاط تعادلی مرزی

الف) $E_{\cdot}(\cdot,\cdot)$:
اگر $h > q$، آنگاه $E_{\cdot}(\cdot,\cdot)$ نقطه زینی است.
اگر $h < q$، آنگاه $E_{\cdot}(\cdot,\cdot)$ نقطه گره است.
اگر $h = q < ۱$ (یا $h = q > ۱$)، آنگاه $E_{\cdot}$ یک گره زینی است که شامل یک سهمی ناپایدار در راستای مثبت (یا راستای منفی) است.
ب) $E_۱(\cdot,k)$:
اگر $ak < ۱$ و $h < (۱-ak)q$، آنگاه $E_۱$ نقطه زینی است.
اگر $ak \geq ۱$ یا $ak < ۱$ و $h > (۱-ak)q$، آنگاه $E_۱$ یک گره پایدار است.
اگر $ak < ۱$ و $h = (۱-ak)q$ و $q < \frac{۱-ak}{۱+a}$ (یا $q > \frac{۱-ak}{۱+a}$)، آنگاه $E_۱$ یک گره زینی است که شامل یک بخش سهمی پایدار در سمت چپ (یا سمت راست) است.
اگر $ak < ۱$ و $h = (۱-ak)q$ و $q = \frac{۱-ak}{۱+a}$ و $E_۱$ یک گره منحط پایدار با بعد ۲ است.

۲.۳ نقاط تعادلی ناپایدار

اگر $h < q < \frac{(q+۱)^۲}{۴}$ و $q < ۱$، آنگاه دستگاه دارای دو نقطه تعادلی مرزی مثبت ناپایدار $E_{۱\cdot}(x_{۱\cdot},۰)$ و $E_{۲\cdot}(x_{۲\cdot},۰)$ دارد.
اگر $h < q$ یا $h = q < ۱$، آنگاه دستگاه یک نقطه تعادلی مرزی مثبت ناپایدار $E_{۲\cdot}(x_{۲\cdot},۰)$ دارد.
اگر $h = \frac{(q+۱)^۲}{۴}$ و $q < ۱$، دستگاه دارای یک تعادل مرزی $E_*(\frac{۱-q}{۲},۰)$ با یک گره زینی شامل یک بخش سهموی ناپایدار در سمت چپ است.

۳.۳ نقاط تعادلی مثبت

برای بررسی نقاط تعادلی مثبت، با فرض $ak < ۱$ و برای راحتی فضای پارامترها را به ناحیه‌های زیر طبقه‌بندی می‌کنیم:

$$\Omega_۱ := \{(a,h,q,k) \in \mathbb{R}^۴_+ \mid h < h_۱ \text{ یا } h = h_۱,\ q < \frac{۱-ak}{a+۱}\},$$

$$\Omega_{۲} := \{(a,h,q,k) \in \mathbb{R}^{۴}_{+} \mid h_{۱} < h < h_{۲},\ h = h_{۱},\ q < \frac{۱ - ak}{a+۱}\},$$

$$\Omega_{*} := \{(a,h,q,k) \in \mathbb{R}^{۴}_{+} \mid h = h_{۲},\ q < \frac{۱ - ak}{a+۱}\},$$

$$\Omega_{۰} := \{(a,h,q,k) \in \mathbb{R}^{۴}_{+} \mid h > h_{۲},\ \text{یا}\ h_{۱} \le h \le h_{۲},\ q \ge \frac{۱ - ak}{a+۱}\},$$

۱. اگر $(a,h,q,k) \in \Omega_{۲}$، آنگاه دستگاه دو تعادل مثبت به صورت زیر دارد:
$E_{۱۱}(x_{۱۱}, x_{۱۱}+k)$ یک زینی هایپربولیک و $E_{۱۲}(x_{۱۲}, x_{۱۲}+k)$ یک تعادل ضد زینی و ابتدایی.

۲. اگر $(a,h,q,k) \in \Omega_{۱}$، آنگاه دستگاه یک تعادل مثبت غیر یکه $E_{۱۲}(x_{۱۲}, x_{۱۲}+k)$ دارد که یک تعادل ضد زینی و ابتدایی است.

۳. اگر $(a,h,q,k) \in \Omega_{*}$، آنگاه دستگاه یک تعادل مثبت یکه منحط $E_{*}(x_{*}, x_{*}+k)$ دارد.

۴. اگر $(a,h,q,k) \in \Omega_{۰}$، آنگاه دستگاه تعادل مثبت ندارد.

قضیه ۱.۳. اگر $(a,h,q,k) \in \Omega_{*}$، آنگاه دستگاه به تعادل مثبت منحط $E_{*}(x_{*}, y_{*})$ محدود است. بعلاوه،

۱. اگر $s > s_{*}$ (یا $۰ < s < s_{*}$)، E_{*} یک گره زینی است که شامل یک پایداری (یا یک ناپایداری) بخش سهموی در سمت چپ است.

۲. فرض کنید $s = s_{*}$.
الف) اگر $k \neq k_{*}$ و $q < q_{۱}$ یا $q \ge q_{۱}$، آنگاه E_{*} یک کاسپ با بعد ۲ است.
ب) اگر $q \neq q_{*}$ و $k = k_{*}$ و $q < q_{۱}$، آنگاه E_{*} یک کاسپ با بعد ۳ است.
پ) اگر $q = q_{*}$ و $k = k_{*}$، آنگاه E_{*} یک کاسپ با بعد ۴ است.

۴ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل شکار و شکارچی لزلی‌ـ گاِور با برداشت غیرخطی و شکارچی عمومی بررسی شد. مهم‌ترین نتایج در مورد نقاط تعادلی دستگاه عبارتند از:

۱. نقاط تعادلی مرزی، نقاطی است که به شدت تحت تأثیر پارامترهای h (برداشت) و q (ضریب برداشت) و ak (تعامل شکار و شکارچی) قرار دارد.

۲. نقاط تعادلی مثبت، نقاطی است که برای دستگاه تحت شرایطی و با فرض $ak < ۱$ برقرار است.

افزایش برداشت غیر خطی h، دستگاه را از حالت تعادل مثبت $E_{۱۲}$ به سمت تعادل مرزی پایدار $E_۱(۰,k)$ می‌برد که در چنین شرایطی $E_۱(۰,k)$ تعادل پایدار سراسری می‌شود (یعنی شکار منقرض شده ولی شکارچی به دلیل منبع غذایی جایگزین باقی می‌ماند).

وجود شکارچی عمومی $k > ۰$ از انقراض کامل شکارچی تحت شرایط برداشت زیاد جلوگیری می‌کند و باعث پایداری دستگاه در شرایط بحرانی است. کاهش و افزایش q (آستانه تراکم شکار)، احتمال تباهیدگی تعادل مثبت و انتقال به تعادل مرزی را افزایش می‌دهد.

مراجع

[1] Lotka, A.J. A natural population norm. J. Wash. Acad. Sci. 1913, 3, 241-248.

[2] Volterra, V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. *Nature*, 1926, 118, 558–560.

[3] Xu, Y.C.; Yang, Y.; Meng, F.W.; Ruan, S.G. Degenerate codimension-2 cusp of limit cycles in a Holling-Tanner model with harvesting and anti-predator behavior. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2024, 76, 103995.

[4] Aziz-Alaoui, M.A.; Okiye, M.D. Boundedness and global stability for a predator–prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes. *Appl. Math. Lett.*, 2003, 16, 1069-1075.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

شناسایی و اولویت بندی استراتژیهای تاب آوری در زنجیره تامین

ملیحه ابراهیمی [۱] الهام حسین زاده [۲]

[۱] گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد، ایران
[۲] گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد، ایران

چکیده

با توجه به تنوع محصولات و رشد تکنولوژی، رقابت بالایی بین شرکت‌ها وجود دارد. از طرفی خطرات بسیاری آنها را تهدید می‌کند. شرکت‌هایی که بتوانند این خطرات را مدیریت کنند می‌توانند در عرصه رقابتی موجود بسیار موفق و پیشرو باشند. موضوع تاب آوری، موضوعی است که می‌تواند در این امر کمک شایانی به شرکت‌ها کند. در این مقاله، شاخص‌ها و استراتژی‌های تاب آوری با توجه به تحقیقات پیشین مطرح و بررسی می‌شود. استراتژیهای تاب آوری، استراتژی‌های کاهش بحران در وضعیت های خطرساز و اتفاقی هستند که شرکت‌ها و سازمان‌ها را دچار چالش‌های بسیار می‌کنند. در این مقاله، با توجه به تحقیقات پیشین ، کاربردی که هر استراتژی در مطالعات موردی داشته است، مطرح و بررسی میشود. به طوری که با استفاده از روش تصمیم گیری چند معیاره SAW به اولویت بندی آنها پرداخته میشود.

کلمات کلیدی: استراتژیهای تاب آوری، زنجیره تامین ، اختلالات، مدیریت ریسک،

۱ مقدمه

با توجه به سرعت جهانی شدن زنجیره تامین، زنجیره تامین در معرض خطرات بسیاری قرار دارد [۱]. در سرتاسر شبکه زنجیره تامین خطرات نامشخص مختلفی مانند بلایای طبیعی، خرابی سیستم، رفتارهای غیرمنتظره و ... وجود دارد که باعث شوک در شبکه زنجیره تامین و به دنبال آن قطع گره ها و یا لبه ها میشود و بر عملکرد شبکه و فرآیندها تاثیر نامطلوب میگذارد [۲]. بنابراین تمام خطرات باید مدیریت شود. مدیریت ریسک بر اهمیت زنجیره های تامینی که در برابر اختلالات در جریان مواد و اطلاعات مقاوم هستند، تاکید میکند [۳] بنابراین استفاده از روشهایی برای تجهیز زنجیره تامین در برابر خطرات احتمالی ضروری است. در اینجا زنجیره تامین تاب آور مطرح میشود که یک حوزه تحقیقاتی جدید است و اخیرا بسیار مورد توجه قرار گرفته است ./توانایی یک زنجیره تامین برای مقابله با اختلالات برای ارائه محصولات/خدمات به مشتریان در یک زمان معقول، تاب آوری نامیده میشود [۴]. ۲ -

[1] author1@email.com
[2] author1@email.com

مرور ادبیات چن و همکاران، عدم قطعیت تقاضا و تامین کننده را در مدل تاب آور خود لحاظ کرده اند بطوریکه اگر تامین کننده اصلی به هر دلیلی توانایی تامین مواد را نداشت، دو انتخاب وجود دارد؛ یکی اینکه از تامین کننده پشتیبان استفاده کند که باید هزینه بالایی بپردازد و دیگر اینکه سفارش را تامین نکند و دچار کمبود شود[۱]. صادقی و آبادی یک زنجیره تامین چهار سطحی پیشنهاد داده اند که شامل دو نوع تولیدکننده بزرگ و کوچک بوده و تولیدکننده کوچک قابل جابجایی است. در این مدل پایداری و تاب آوری به طور همزمان لحاظ شده است [۵]. در مطالعه ای دیگر نیز پایداری و تاب آوری لحاظ شده است. شریفی و همکاران تاب آوری، پایداری و پاسخگویی را در یک مدل تصادفی فازی استوار ادغام نموده اند. مدل مربوطه در ارتباط با زنجیره تامین گندم کانادا است. کاهش نارضایتی مشتری و پیچیدگی و بحرانی بودن گره توابع هدف مربوط به بحث تاب آوری است. کاهش کل زمان تحویل در ارتباط با بحث پاسخگویی مطرح شده است [۶]. یری و همکاران، سه موضوع تاب آوری، پایداری و پاسخگویی را در مدل خود در نظر گرفته اند. کاهش هزینه و آسیب های زیست محیطی، افزایش اثرات اجتماعی، همچنین کاهش معیارهای تاب آوری نرمال شده و انحراف مورد انتظار نرمال شده از سطح پاسخگویی، اهداف مدل ارائه شده آنها می باشد. کاهش گره بحرانی و گره پیچیده از معیارهای تاب آوری مدل مربوطه هستند[۴]. صالحی و همکاران، نیز یک زنجیره تامین پایدار و تاب آور را طراحی نموده اند. آنها اول فاکتورها را با روش تاپسیس فازی رتبه بندی نمودند بطوریکه ارتباط بین فاکتورهای تاب اوری و پایداری را با مشخص کردن فاکتورهای بحرانی، تعیین نموده، سپس فاکتورهای کاربردی را با تاپسیس فازی اولویت بندی نمودند[۷]. روجیراپایبون و همکاران، زنجیره بلند را مطرح کردن بطوریکه کمانهای انعطاف پذیر آن مکمل هم هستند. آنها برای محاسبه عملکرد تاب آوری زنجیره از الگوریتم حریص استفاده نمودند[۸].

۲ بررسی استراتژیهای تاب آور

در مقالات مختلف استراتژیهای متعددی برای تاب آوری لحاظ شده است. با توجه به صنعت مورد بحث یا سازمان مورد بحث هر کدام از این استراتژیها اهمیت بیشتری پیدا میکنند. چرا که هر سازمان با خطرات و اختلالات متفاوتی رو به رو است. مطالعه‌ای که در صنعت خودرو سازی بسیار رقابتی انجام شده است. اختلال در تامین کنندگان و رقابت سخت از سوی رقبا است. هر اختلالی در سطح بالادستی زنجیره تامین منجر به عدم توانایی در تامین تقاضا سطح پایین میشود. نگهداشتن موجودی اضطراری نزد خرده فروشان، ذخیره ظرفیت پشتیبان نزد تامین کنندگا و منابع چندگانه از استراتژیهایی هستند که در این صنعت مورد استفاده قرار میگیرند[۹]. در مطالعه ای دیگر نیز یک CLSC در حوزه تولید لاستیک ارائه شده است که مفاهیم پایداری (هزینه، مصرف انرژی، آلودگی و فرصت های شغلی) و تاب آوری (استراتژی منابع چندگانه) را در آن در نظر گرفته اند. از آنجایی که تولید لاستیک نیاز به هشت ماده خام دارد، استراتژی منابع چندگانه میتواند در زمان اختلالات تامین کننده موثر باشد[۱۰].

در مطالعه ای تکنولوژی دیجیتال به عنوان استراتژی برای افزایش تاب آوری زنجیره تامین غذا مورد بررسی قرار گرفته است [۱۱]. در مطالعه ای دیگر از تکنولوژی بلاکچین به عنوان راهکاری برای افزایش تاب آوری زنجیره تامین تجارت الکترونیک تولید مواد افزودنی مطرح شده است[۱۲]. سینها و همکاران، تاب آوری زنجیره تامین واکسن را مورد بررسی قرار دادند. بطوریکه اختلالات تقاضا و موعد تحویل را در سناریوهای مختلف مطرح نموده و از سیاست ذخیره موجودی بهره برده اند تا به حداقل سطح خدمت دهی برسند[۱۳]. در مطالعه ای دیگر، هزینه های مربوط به سه استراتژی تاب آوری برای پاسخ به سه سناریوی مختلف اختلال، هزینه حمل و نقل و زمان بعنوان توابع هدف مدل مطرح شده اند. راهاندازی مجدد پالایشگاه، اشتراک ظرفیت تولید، اشتراک ظرفیت تولید و حمل و نقل، بعنوان استراتژیهای تاب آوری در نظر گرفته شده اند[۱۴]. استراتژیهای ظرفیت اضافی در پالایشگاه، خطوط لوله مستحکم و پشتیبان قبل از وقوع اختلال، استراتژی بهبود برای بازیابی ظرفیت های از دست رفته تسهیلات بعد از وقوع اختلال، در مطالعه ای بعنوان استراتژیهای تاب آوری برای شبکه انتقال گاز طبیعی استفاده شده اند[۱۵]. بهبودی بعد از وقوع اختلال بسیار حائز اهمیت است که در مطالعه ی قوامیفر و همکاران به آن پرداخته شده است. کاهش هزینه و کاهش عدم تاب آوری شبکه، اهداف یک مدل بهینه سازی تصادفی در زمینه طراحی شبکه زنجیره تامین تاب آور هستند [۱۶]. جدول شماره ۲ کاربرد استراتژیهای تاب آوری در مطالعات موردی را نشان میدهد .

۳ اولویت بندی شاخصها با روش SAW

مدل مجموع ساده وزنی یکی از روش های تصمیم گیری چند شاخصه است. با محاسبه اوزان شاخص ها میتوان به سادگی این روش را به کار برد.

۴ نتیجه گیری و پیشنهادات آتی

رفتارهای غیرمنتظره همیشه زنجیره تامین را در معرض خطرات بسیاری قرار داده است بطوریکه در سرتاسر شبکه زنجیره تامین خطرات نامشخص مختلفی مانند بلایای طبیعی، خرابی سیستم، و ... وجود دارد که باعث شوک در شبکه زنجیره تامین شده، بر عملکرد شبکه و فرآیندها تاثیر نامطلوب میگذارد. با توجه به مطالعات منابع و مقالات متعدد، استراتژیهای تامین کننده پشتیبان، همکاری، چابکی، نظارت بر ریسک، انعطاف پذیری و افزونگی، پیچیدگی و بحرانی بودن گره، ذخیره موجودی، منابع چندگانه، تکنولوژی دیجیتال و تکنولوژی بلاکچین بیش از سایر استراتژیها مورد استفاده در مقالات قرار گرفته است. بطوریکه استراتژی منابع چندگانه بیش از سایر استراتژیها مطرح شده است. همچنین تامین کننده پشتیبان، ذخیره موجودی، منابع چندگانه و استراتژی بهبود بیش از سایر استراتژیها در مطالعات موردی مطرح و مورد استفاده قرار گرفته است.

جدول ۱: استراتژیهای تاب آوری

	رتبه	استراتژی
۰.۸۷۷	۲	پشتیبان کننده تامین
۰.۱۲۲	۶	همکاری
۰.۱۲۲	۶	چابکی
۰.۱۲۲	۶	ریسک بر نظارت
۰.۱۸۳	۵	افزونگی و پذیری انعطاف
۰.۰۶۱	۷	مشتری نارضایتی کاهش
۰.۱۲۲	۶	گره بودن بحرانی و پیچیدگی
۰.۰۶۱	۷	پذیر انعطاف کمانهای با بلند زنجیره
۰.۸۷۷	۲	موجودی ذخیره
۰.۰۶۱	۷	جایگزین نقل و حمل
۰.۹۹۹	۹	چندگانه منابع
۰.۰۶۱	۷	تجهیزات استحکام
۰.۰۶۱	۷	فروشگاه به مستقیم تحویل
۰.۴۰۸	۴	موجودی اشتراک
۰.۴۰۸	۴	شده رزرو ظرفیت
۰.۴۶۹	۳	دیجیتال تکنولوژی
۰.۴۰۸	۴	بلاکچین تکنولوژی
۰.۰۶۱	۷	بازار به دسترسی
۰.۴۰۸	۴	اطلاعات گذاری اشتراک
۰.۰۶۱	۷	تامین زنجیره در ارتباطات

مراجع

[1] Chen, Z., Hammad, A.W.A., Alyami, M. (2024). *Building construction supply chain resilience under supply and demand uncertainties*, Automation in construction, 158, 105190.

[2] Li , W., Song, X., Gong, K., Sun, B. (2024). *A product family-based supply chain hypernetwork resilience optimization strategy*, Computers and Industrial Engineering, 187(C).

[3] Kraude, R., Narayanan, S., Talluri, S. (2022). *Evaluating the performance of supply chain risk mitigation strategies using network data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research, 303, 1168-1182.

[4] Nayeri, S., Torabi, S. A., Tavakoli, M., Sazvar, Z. (2021). *A multi-objective fuzzy robust stochastic model for designing a sustainable-resilient-responsive supply chain network*, Journal of Cleaner Production 311, 127691.

[5] Sadeghi R. K., Hasan Abadi M. Q. (2024). *Sustainable supply chain resilience for logistics problems: Empirical validation using robust*

and computational intelligence methods, Journal of Cleaner Production, 437(2):140267.

[6] Sharifi, E., Hassanzadeh Amin, S. (2024). *Liping Fang. Designing a sustainable, resilient, and responsive wheat supply chain under mixed uncertainty: A multi-objective approach*, Journal of Cleaner Production, 434, 140076.

[7] Salehi, S., Mehrjerdi, Y. Z., Sadegheih, A., Hosseini-Nasab, H. (2022). *Designing a resilient and sustainable biomass supply chain network through the optimization approach under uncertainty and the disruption*, Journal of Cleaner Production, 359, 131741.

[8] Rujeerapaiboon, N., Zhong, Y., Zhu, D. (2023). *Resilience of long chain under disruption*, SSRN,

[9] Rezapour, S., Farahani, R. Z., Pourakbar, M. (2017). *Resilient Supply Chain Network Design under Competition: A Case Study*, European Journal of Operational Research, Elsevier, 259(3), 1017-1035.

[10] Mehrjerdi, Y. Z., Shafiee, M. (2020). *Multiple-Sourcing in Sustainable Closed-loop Supply Chain Network Design:Tire Industry Case Study*, International Journal of Supply and Operations Management, 7(3), 202-221.

[11] Gaurvendra, S., Rajesh, R., Daultani, Y., Subhas, C. M. (2023). *Resiliance and sustainability enhancement in food supply chains using digital twin technology: A grey causal modelling (GCM) approach*, Computer and Industrial Engineering, 179, 109172.

[12] Shekhar, S., Shyam.KC. (2022). *Leveraging Blockchain for sustainability and supply chain resilience in e-commerce channels for additive manufacturing: A cognitive analytics management framework-based assessment*, Computer and Industrial Engineering, 176, 108995.

[13] Sinha, P., Kumar, S., Chandra, C. (2023). *Strategies for ensuring required service level for COVID-19 herd immunity in Indian vaccine supply chain*, European Journal of Operational Research, 304, 339-352.

[14] Khezeli, M., Najafi, E., Haji Molana, M., Seidi, M. (2022). *A Mathematical Model for Sustainable and Resilient Supply Chain By Considering*

Synchronization In the Production and Distribution Network, International Journal of Industrial Engineering & Production Research, 33(2), 1-34.

[15] Daghigh, R., Pishvaee, M. S., Jabalameli, M. S., Pakseresht, S. (2022). *A possibilistic-stochastic programming approach to resilient natural gas transmission network design problem under disruption: A case study*. International Journal of Industrial Engineering & Production Research, 33(2), 1-34.

[16] Gavamifar, A., Sabouhi, F., Makui, A. (2018). *An integrated model for designing a distribution network of products under facility and transportation link disruptions*, Journal of Industrial and Systems Engineering, 11(1), 113-126

[17] Suryadi, A., Rau, H. (2023). *Considering region risks and mitigation strategies in the supplier selection process for improving supply chain resilience*, Computers & Industrial Engineering, 181, 109288.

[18] Liu, J., Wu. J., Maritime, Y. G. (2023). *supply chain resilience: From concept to practice*, Computers & Industrial Engineering, 182, 109366.

[19] Mohammed, A., Govindan, K., Zubairu, N., Pratabaraj, J., Zainul Abideen, A. (2023). *Multi-tier supply chain network design: A key towards sustainability and resilience*, Computers & Industrial Engineering, 182(9–12):109396.

[20] Hasani, A. (2021). *Resilience Cloud-based Global Supply Chain Network Design under Uncertainty: Resource-based approach*, Computers & Industrial Engineering, 158, 107382.

[21] Yamin, M. A. (2021). *Investigating the Drivers of Supply Chain Resilience in the Wake of the COVID-19 Pandemic: Empirical Evidence from an Emerging Economy*, Sustainability,13(21), 11939

[22] Alikhani, R, Torabi, S. A., Altay, N. (2021). *Retail supply chain network design with concurrent resilience capabilities*, International Journal of Production Economics, Elsevier, 234(C).

[23] Mehrjerdi,Y. Z., Shafiee, M. (2021). *A Resilient and sustainable closed-loop supply chain using multiple sourcing and information sharing strategies*, Journal of Cleaner Production, 289, 125141.

[24] Sean Keefe, D. H., Jang, H., Sur, J. M. (2024). *Digitalization for agricultural supply chains resilience: Perspectives from Indonesia as an ASEAN member, The Asian Journal of Shipping and Logistics*, The Asian Journal of Shipping and Logistics 40(2)

[25] Shukla, S., KC, S. (2023). *Leveraging Blockchain for sustainability and supply chain resilience in e-commerce channels for additive manufacturing: A cognitive analytics management framework-based assessment*, Computers & Industrial Engineering, 176, 108995.

[26] Liu,P., Liu,P., Liu,J., Tao,C., Peng, W. (2024). *Market access, supply chain resilience and enterprise innovation*, Journal of Innovation & Knowledge, 9(4), 100576.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

پایداری و تحلیل انشعاب در یک مدل اپیدمی SIR گسسته

عاطفه نیک‌سرشت [۱] علی دارابی [۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

بیماری‌های اپیدمی همچون کووید-۱۹، یکی از مشکلات جدی برای زندگی بشر محسوب می‌شوند لذا پیش‌بینی رفتار هر اپیدمی، می‌تواند در روند پیشرفت بیماری بسیار تاثیرگذار باشد. در این پژوهش به‌منظور پیش‌بینی رفتار یک اپیدمی، رفتار دینامیکی یک مدل اپیدمی SIR گسسته را شرح داده و نقاط تعادل مدل و نوع پایداری آنها را بررسی می‌کنیم.
به‌کمک نظریه‌ی انشعاب و قضایای منیفلد مرکزی، انشعاب فلیپ و انشعاب هاف، نشان می‌دهیم که مدل، تحت چه شرایطی دچار انشعاب فلیپ و یا انشعاب هاف می‌گردد. در انتها با استفاده از مثال‌های عددی و نمودارهای ویژه‌ی مدل، نتایج تحلیلی به‌دست آمده را تایید می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مدل اپیدمی - رفتار دینامیکی - پایداری - انشعاب فلیپ - انشعاب هاف

۱ مقدمه

یک مدل ریاضی ممکن است با تغییر یکی از پارامترهایش، رفتار دینامیکی جدیدی از خود نشان دهد و ساختار اربیتی آن به‌طور کامل تغییر کند. در بحث بیماری‌های اپیدمی، این تغییرات کوچک می‌تواند منجربه بی نظمی در رفتار آینده انتشار اپیدمی گردد. در زبان ریاضی، هرگاه در یک سیستم، با تغییر در مقدار یک پارامتر (انشعاب)، ساختار اربیت‌ها تغییر کند، گوییم انشعاب رخ داده است. به‌طور کلی مدل‌های ریاضی پیوسته همخوانی بیشتری با دنیای واقعی دارند اما مدل‌های گسسته علاوه‌بر سادگی محاسبات، نتایج دقیق‌تری نیز به‌دست می‌دهند. لذا ما در این مقاله ابتدا یک مدل ریاضی اپیدمی SIR پیوسته را بیان کرده و سپس آن را به مدل اپیدمی SIR گسسته متناظر تبدیل می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد نقاط تعادل مدل و پایداری آنها را بررسی کرده و سرانجام شرایط رخداد انشعاب و به‌طور خاص انشعاب فلیپ و هاف را تحلیل می‌نماییم. در پایان نیز با ارائه‌ی مثال‌های عددی و نمودارهای مربوطه، صحت محاسبات و انشعابات سیستم را نشان خواهیم داد.

[1] niksereshtatefe8@email.com
[2] a.darabi@scu.ac.ir

۲ تبدیل مدل پیوسته به گسسته

مدل مورد مطالعه‌ی ما توسط معادلات دیفرانسیل مدل‌سازی شده و سیستم دینامیکی زیر را تولید کرده‌است.

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = A - \mathrm{d}s - \lambda SI \quad (۱)$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \lambda SI - (d+r)I \quad (۲)$$
$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = rI - \mathrm{d}R \quad (۳)$$
$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) \quad (۴)$$

که در آن $S(t)$ تعداد افراد مستعد بیماری، $I(t)$ تعداد افراد آلوده، $R(t)$ افراد بهبود یافته و $N(t)$ کل افراد در زمان t را نشان می‌دهد.
همچنین A نرخ افزایش جمعیت، d نرخ مرگ ذاتی، r نرخ بهبود افراد آلوده، λ نرخ شیوع و $R_{\cdot} = \lambda A/d(d+r)$ عدد تکثیر پایه می‌باشد.

در مرحله‌ی اول، با استفاده از روش اویلر معادلات دیفرانسیل مدل بیان‌شده را به یک معادله‌ی تفاضلی تبدیل می‌کنیم. در واقع روش اویلر، الگوریتمی است برای تبدیل معادلات دیفرانسیل به معادلات تفاضلی متناظر که با اعمال این روش بر معادلات دیفرانسیل بالا، مدل اپیدمی SIR گسسته‌ی حاصل، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} S_{n+۱} = S_n + h\,(A - dS_n - \lambda S_n I_n) \\ I_{n+۱} = I_n + h\,[\lambda S_n I_n - (d+r)I_n] \\ R_{n+۱} = R_n + h\,(rI_n - dR_n) \\ N_{n+۱} = S_{n+۱} + I_{n+۱} + R_{n+۱} \end{cases} \quad (۵)$$

از آنجایی‌که در این مدل تعداد افراد جامعه‌ی مورد بررسی در زمان t ثابت است، پس با دانستن I_n و S_n، می‌توانیم R_n و بنابراین N_n را به‌ازای هر n به‌دست آوریم. لذا می‌توان گفت رفتارهای دینامیکی مدل فوق، معادل رفتارهای دینامیکی مدل زیر است:

$$\begin{cases} S_{n+۱} = S_n + h\,(A - dS_n - \lambda S_n I_n) \\ I_{n+۱} = I_n + h\,[\lambda S_n I_n - (d+r)I_n] \end{cases} \quad (۶)$$

۳ نقاط تعادل و پایداری آنها

به‌طورکلی برای به‌دست آوردن نقاط تعادل در یک معادله تفاضلی در یک سیستم دینامیکی گسسته دوبعدی، قرار می‌دهیم $f(x,y)=(x,y)$. در مدل (۶) نیز به همین طریق $S_{n+1}=S_n$ و $I_{n+1}=I_n$ قرار داده و نقاط تعادل را با توجه به مقدار R_0، به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

۱. اگر $R_0 \leq 1$ آنگاه فقط یک نقطه تعادل عاری از بیماری $E_1=\left(\frac{A}{d},0\right)$ داریم.

۲. اگر $R_0 > 1$ آنگاه دو نقطه تعادل $E_1=\left(\frac{A}{d},0\right)$, $E_2=\left(\frac{d+r}{\lambda},\frac{A\lambda-d(d+r)}{\lambda(d+r)}\right)$ داریم.

۱.۳ پایداری نقاط تعادل

در این بخش با استفاده از روش خطی‌سازی سیستم دینامیکی گسسته، پایداری نقاط تعادل مدل (۶) را بررسی خواهیم کرد [۱، ۲] .

۱ - پایداری نقطه تعادل E_1:

۱-i) E_1 غیرهذلولوی است هرگاه:

$$\left\{\left(h=\frac{2d}{d(d+r)-A\lambda} \text{ یا } h=\frac{2}{d}\right), R_0<1\right\} \text{ یا } \left\{h=\frac{2}{d}, R_0>1\right\} \text{ یا } \{R_0=1\}$$

۱-ii) E_1 ناپایدار است هرگاه:

$$\left\{h>\frac{2}{d},\ R_0=1\right\} \text{ یا } \{R_0>1\} \text{ یا } \left\{\begin{array}{ll} & \frac{2d}{d(d+r)-A\lambda}<h<\frac{2}{d} \\ \text{یا} & \frac{2}{d}<h<\frac{2d}{d(d+r)-A\lambda} \\ \text{یا} & \max\left\{\frac{2}{d},\frac{2d}{d(d+r)-A\lambda}\right\}<h,\ R_0<1 \end{array}\right\}$$

۱-iii) E_1 پایدار مجانبی است هرگاه:

$$0<h<\min\left\{\frac{2}{d},\frac{2d}{d(d+r)-A\lambda}\right\}, R_0<1$$

۲ - پایداری نقطه تعادل E_2:

۲-i) E_2 پایدار مجانبی است هرگاه:

$$\{0 < h < h_*, (dR_.)^2 - 4[A\lambda - d(d+r)] \geq 0\} \text{ یا}$$
$$\{0 < h < h_{**}, (dR_.)^2 - 4[A\lambda - d(d+r)] < 0\}$$

۲-ii) E_2 ناپایدار است هرگاه:

$$\{(h_{***} < h \text{ یا } h_* < h < h_{***}), (dR_.)^2 - 4[A\lambda - d(d+r)] \geq 0\} \text{ یا}$$
$$\{h > h_{**}, (dR_.)^2 - 4[A\lambda - d(d+r)] < 0\}$$

۲-iii) E_2 غیرهذلولوی است هرگاه:

$$\{(h = h_{***} \text{ یا } h = h_*), (dR_.)^2 - 4[A\lambda - d(d+r)] \geq 0\} \text{ یا}$$
$$\{h = h_{**}, (dR_.)^2 - 4[A\lambda - d(d+r)] < 0\}$$

تذکر ۱.۳. تمام محاسبات با توجه به در نظر گرفتن h به عنوان پارامتر انشعاب انجام شده است.

تذکر ۲.۳.

$$h_* = \frac{A\lambda - (d+r)\sqrt{(dR_.)^2 - 4[A\lambda - d(d+r)]}}{(d+r)[A\lambda - d(d+r)]}$$
$$h_{**} = \frac{A\lambda}{(d+r)[A\lambda - d(d+r)]}$$
$$h_{***} = \frac{A\lambda + (d+r)\sqrt{(dR_.)^2 - 4[A\lambda - d(d+r)]}}{(d+r)[A\lambda - d(d+r)]}$$

تذکر ۳.۳. وقتی $(dR_.)^2 - 4[A\lambda - d(d+r)] \geq 0$، اگر یکی از دو مقدار ویژه‌ی ماتریس ژاکوبین $\mathbb{J}(E_2))$، -1 باشد، در عین حال دیگری نمی‌تواند ± 1 باشد.

بروز انشعاب فلیپ یا هاف می‌تواند منجربه آشوب شود و آشوب در بیماری‌های همه‌گیر موجب افزایش خطر انقراض جمعیت می‌گردد.

۴ تجزیه و تحلیل انشعاب‌ها

۱.۴ انشعاب فلیپ

در این بخش انشعاب فلیپ مدل (۶) را وقتی h در همسایگی کوچکی نسبت به h_* تغییر می‌کند، به کمک قضیه‌ی منیفلد مرکزی بررسی خواهیم کرد.

برای این‌کار، ابتدا U_n و V_n را به‌عنوان پارامترهای نقطه تعادل جدید که در مبدأ می‌باشد، به‌صورت

$U_n = S_n - S^*$ و $V_n = I_n - I^*$ تعریف کرده و مدل (۶) را با توجه به آن و پس از وارد کردن اختلال h^*، به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$U_{n+1} = a_{11}U_n + a_{12}V_n + a_{13}U_nV_n + b_{11}U_nh^* + b_{12}V_nh^* + b_{13}U_nV_nh^* \quad (7)$$
$$V_{n+1} = a_{21}U_n + a_{22}V_n + a_{23}U_nV_n + b_{21}U_nh^* + b_{22}V_nh^* + b_{23}U_nV_nh^* \quad (8)$$

با فرض اینکه

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - h(d + \lambda I^*) \quad , a_{12} = -h\lambda S^* \quad , a_{13} = -h\lambda \\ b_{11} &= -(d + \lambda I^*) \quad , b_{12} = -\lambda S^* \quad , b_{13} = -\lambda \\ a_{21} &= \lambda h I^* \quad , a_{22} = 1 \quad , a_{23} = h\lambda \\ b_{21} &= \lambda I^* \quad , b_{22} = 0 \quad , b_{23} = \lambda \end{aligned}$$

در این مرحله به کمک ماتریسی که آن را T می‌نامیم و از بردارهای ویژه‌ی بخش خطی مدل (۷) و با استفاده از تغییر متغیر $\begin{bmatrix} U_n \\ V_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ به‌دست می‌آید، این مدل را پس از انجام محاسبات طولانی به‌صورت زیر، به فرم استاندارد (جردن) تبدیل می‌کنیم.

$$X_{n+1} = -x_n + f(x_n, y_n, h^*) \quad (9)$$
$$Y_{n+1} = w_2 y_n + g(x_n, y_n, h^*) \quad (10)$$

سپس $h(x_n)$ را به‌صورت زیر تعریف کرده و با استفاده از منیفلد مرکزی، a_1 و a_2 را به‌دست می‌آوریم:

$$h(x_n) = a_1 x_n^2 + a_2 x_n h^* + o\left((|x_n| + |h^*|)^2\right)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_{13}(1 + a_{11} - a_{12})}{w_2 + 1} \\ a_2 &= \frac{b_{12}(1 + a_{11})^2}{a_{12}(w_2 + 1)^2} - \frac{b_{11}(1 + a_{11}) + b_{21}a_{12}}{(w_2 + 1)^2} \end{aligned}$$

حال پس از بازنویسی و تحدید مدل (۹) به کمک منیفلد مرکزی [۳] خواهیم داشت:

$$G^*(X_n) = X_{n+1} = -x_n + f(x_n, h(x_n), h^*) = -x_n + C_1 x_n^2 + C_2 x_n h^* + C_3 x_n^2 h^* + C_4 x_n h^{*2} + C_5 x_n^3 + o\left((|x_n| + |h^*|)^3\right)$$

در مرحله آخر، برای تحلیل انشعاب فلیپ، لازم است دو کمیت غیر صفر α_1 و α_2 را محاسبه کنیم:

$$\alpha_1 = \left(G^*_{x_n h^*} + \frac{1}{2} G^*_{x_n x_n} \right) \Big|_{(0,0)} = C_2$$
$$\alpha_2 = \left(\frac{1}{6} G^*_{x_n x_n x_n} + \left(\frac{1}{2} G^*_{x_n x_n} \right)^2 \right) \Big|_{(0,0)} = C_5 + C_1^2$$

تذکر ۱.۴. به کمک محاسباتی طولانی و نسبتاً ساده داریم:

$$C_1 = -\frac{a_{13}(1+a_{11})(w_2 - a_{11} + a_{12})}{w_2 + 1}$$
$$C_2 = \frac{b_{11}(w_2 - a_{11}) - a_{12}b_{21}}{w_2 + 1} - \frac{b_{12}(w_2 - a_{11})(1+a_{11})}{a_{12}(w_2+1)}$$
$$C_5 = \frac{a_1 a_{13}(w_2 - 2a_{11} - 1)(w_2 - a_{11} + a_{12})}{w_2 + 1}$$

در نهایت بنابر قضیه‌ی انشعاب فلیپ [۵، ۴]، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:
اگر $\alpha_2 \neq 0$، آنگاه برای مدل (۶) در نقطه تعادل E_2 وقتی پارامتر h در همسایگی کوچکی از h_* تغییر می‌کند، انشعاب فلیپ رخ می‌دهد.

۲.۴ انشعاب هاف

در گام اول انشعاب هاف مدل (۶) را وقتی h در همسایگی کوچکی نسبت به h_{**} تغییر می‌کند، بررسی خواهیم کرد.
در این بخش، مدل (۶) پس از انتقال نقطه تعادل به مبدأ و وارد کردن اختلال h^* به‌صورت زیر در می‌آید:

$$U_{n+1} = U_n + (h+h^*)(-dU_n - \lambda U_n V_n - \lambda U_n I^* - \lambda V_n S^*)$$
$$V_{n+1} = V_n + (h+h^*)(\lambda U_n V_n - (d+r)V_n + \lambda U_n I^* + \lambda S^* V_n)$$

حال مدل (۹) را به کمک ماتریس T که همان بردارهای ویژه‌ی بخش خطی مدل (۹) است، و با استفاده از تغییر متغیر $\begin{bmatrix} U_n \\ V_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$x_{n+1} = \alpha x_n - \beta y_n + \bar{F}(x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n + \bar{G}(x_n, y_n)$$

تذکر ۲.۴. $w_{۱,۲} = \alpha \pm i\beta$(مقادیر ویژه‌ی مختلف مدل (۹)) در آخر برای تحلیل انشعاب هاف، بنابر قضیه‌ی انشعاب هاف، باید پارامتر a را مورد بررسی قرار دهیم:

$$a = -\Re\left[\frac{(۱-۲w_۲)w_۲^۲}{۱-w_۱}\xi_{۱۱}\xi_{۲۰}\right] - \frac{۱}{۲}|\xi_{۱۱}|^۲ + |\xi_{۰۲}|^۲ + \Re(w_۲ \cdot \xi_{۲۱})$$

وقتی‌که:

$$\xi_{۰۲} = \frac{۱}{۸}\left[\overline{F}_{x_nx_n} - \overline{F}_{y_ny_n} + ۲\overline{G}_{x_ny_n} + i\left(\overline{G}_{x_nx_n} - \overline{G}_{y_ny_n} + ۲\overline{F}_{x_ny_n}\right)\right]$$

$$\xi_{۱۱} = \frac{۱}{۴}\left[\overline{F}_{x_nx_n} + \overline{F}_{y_ny_n} + i\left(\overline{G}_{x_nx_n} + \overline{G}_{y_ny_n}\right)\right]$$

$$\xi_{۲۰} = \frac{۱}{۸}\left[\overline{F}_{x_nx_n} - \overline{F}_{y_ny_n} + ۲\overline{G}_{x_ny_n} + i\left(\overline{G}_{x_nx_n} - \overline{G}_{y_ny_n} - ۲\overline{F}_{x_ny_n}\right)\right]$$

$$\xi_{۲۱} = \frac{۱}{۱۶}\Big[\overline{F}_{x_nx_nx_n} + \overline{F}_{x_ny_ny_n} + \overline{G}_{x_nx_ny_n} + \overline{G}_{y_ny_ny_n} + i\left(\overline{G}_{x_nx_nx_n} + \overline{G}_{x_ny_ny_n} - \overline{F}_{x_nx_ny_n} - \overline{F}_{y_ny_ny_n}\right)\Big]$$

در نهایت با توجه به قضیه‌ی انشعاب هاف [۶]، اگر برای مقادیر ویژه‌ی بخش خطی مدل (۹) شرایط زیر برقرار باشد و $a \neq ۰$ شود، مدل (۹) در نقطه تعادل $E_۲$، وقتی h در همسایگی کوچکی نسبت به h_{**} تغییر کند، دچار انشعاب هاف می‌شود.

۱) وقتی $h = ۰$، $|w_{۱,۲}| = ۱$

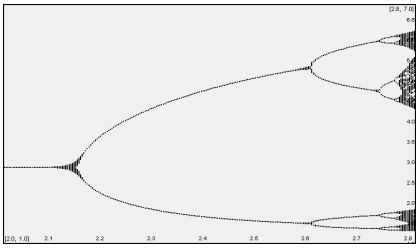
۲) $k = \left.\frac{d\,|w_{۱,۲}|}{dh}\right|_{h=۰} \neq ۰$

۳) اگر $h = ۰$ آنگاه $w_{۱,۲}^m \neq ۱$ و $-۲\alpha \neq -۲, ۰, ۱, ۲$ وقتی $m = ۱, ۲, ۳, ۴$

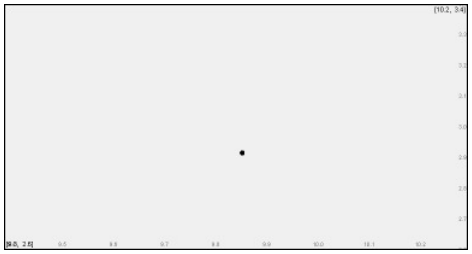
۵ مثال‌های عددی و نتیجه‌گیری

مثال ۱.۵. معادله‌ی (۶) را به کمک داده‌های زیر بررسی کنید.

$$\begin{cases} A = ۴ \quad , \quad d = ۰/۲ \quad , \quad r = ۰/۱۵ \\ \lambda = ۰/۱۲ \quad , \quad h = [۲, ۲/۸۵] \quad , \quad (S_., I_.) = (۸, ۵) \end{cases}$$



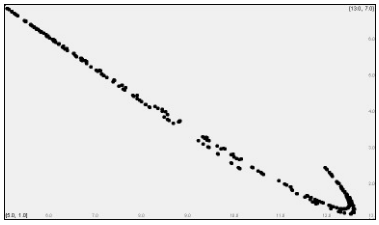
شکل ۱ : انشعاب فلیپ $(h, S(n))$



شکل ۲ : نقطه تعادل پایدار



شکل ۳ : $h = ۲/۲$



شکل ۴ : $h = ۲/۸۴$

محاسبات:

$$E_۲ = (۲/۹۱۶۷, ۹/۷۶۱۹) \quad , \quad h_* = ۲/۱۴۸۰ \quad , \quad w_۱ \simeq ۱$$
$$(dR.)^۲ - ۴[A\lambda - d(d+r)] \quad , \quad \alpha_۱ \simeq -۰/۹۳۱۱ \neq ۰ \quad , \quad \alpha_۲ \simeq ۰/۰۴۰۶$$

پس بنابر داده‌های اولیه و محاسبات انجام شده و همچنین براساس قضیه‌ی انشعاب فلیپ، نقطه تعادل $E_۲$، در اطراف نقطه‌ی $h_* = ۲/۱۴۸۰$ دچار انشعاب فلیپ می‌شود که به کمک نمودارهای انشعاب و پرتره فاز زیر، می‌توان آن را مشاهده کرد.

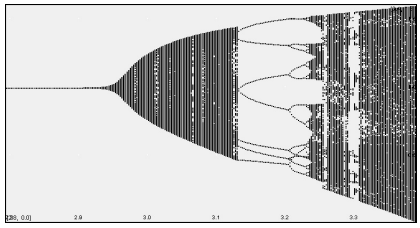
مثال ۲.۵. معادله (۶) را به کمک داده‌های زیر بررسی کنید.

$$\begin{cases} A = ۱/۲ \quad , \quad d = ۰/۴ \quad , \quad r = ۰/۲۴ \\ \lambda = ۰/۴۵ \quad , \quad h \in [۲/۸, ۳/۴] \quad , \quad (S., I.) = (۱/۲, ۰/۴) \end{cases}$$

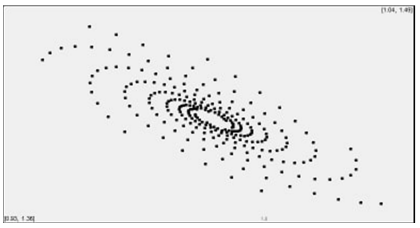
محاسبات:

$$E_۲ = (۱/۴۲۲۲, ۰/۹۷۶۱) \quad , \quad (dR.)^۲ - ۴[A\lambda - d(d+r)] < ۰ \quad , \quad h_{**} = ۲/۹۷۰۹$$
$$|w_{۱,۲}| = ۱ \quad , \quad k \neq ۰ \quad , \quad -۲\alpha \neq -۲, ۰, ۱, ۲ \quad , \quad a \neq ۰$$

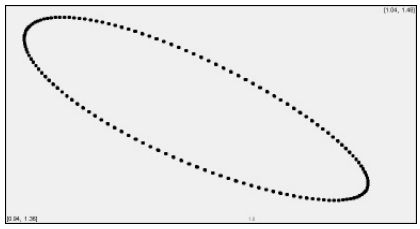
پس بنابر محاسبات انجام شده و برقراری شرایط رخداد انشعاب هاف، وقتی h در همسایگی کوچکی نسبت به h_{**} تغییر می‌کند، برای نقطه تعادل $E_۲$، انشعاب هاف رخ می‌دهد که به کمک نمودارهای انشعاب و پرتره فاز آن را مشاهده می‌کنیم.



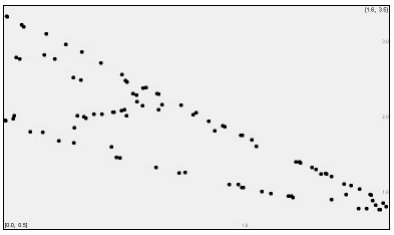
شکل ۵: انشعاب هاف $(h, I(n))$



شکل ۶: $h = ۲/۹۵$



شکل ۷: $h = ۲/۹۷۲$



شکل ۸: $h = ۳/۴$

تذکر ۱.۵. همان‌گونه که در نمودارهای پرتره‌فاز مشخص است، مدل پس از چندین انشعاب، در نهایت دچار آشوب و بی‌نظمی می‌شود.

۶ نتیجه‌گیری

در این پژوهش، رفتار دینامیکی مدل اپیدمی SIR گسسته (۶) را مورد مطالعه قرار دادیم و دریافتیم که به ازای مقادیر خاصی از h (پارامتر انشعاب)، این مدل در نقطه تعادل $E_۲$، تحت شرایط خاصی، دچار انشعاب فلیپ و هاف می‌گردد. علاوه‌براین، به کمک مثال‌های عددی و نمودارهای انشعاب و پرتره‌فاز نیز، این انشعاب‌ها را رویت کردیم.
در پایان می‌توان گفت یافته‌های حاصل از این پژوهش، با به کار بردن مقادیر عینی در جامعه‌ی هدف که درگیر یک بیماری اپیدمی است، می‌تواند به پیش‌بینی چگونگی گسترش بیماری و در نتیجه بهبود نحوه‌ی مقابله و عملکرد افراد جامعه با آن بیماری، کمک شایانی کند.

مراجع

[1] Saber N. Elaydi, Discrete Chaos, Second Edition, Taylor & Francis Group.

[2] Miklos Farkas, Dynamical Models in Biology, Elsevier Science & Technology Books, 2001.

[3] Stephen Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Second Edition, Springer.

[4] C. Robinson, P. Holmes, Dynamical Models, Stability, Symbolic Dynamics and Chaos, 2nd ed., Boca Raton, London, New York, Washington (DC), 1999.

[5] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Model and Bifurcation of Vector Field, Springer-Verlag, New York, 1983.

[6] Hu. Zengyum, Teng. Zhidong, Zhang. Long, Stability and bifurcation analysis in a discrete SIR epidemic model, Mathematics and Computers in Simulation 97 (2014) 80-93.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC
Islamic World Science Citation Center
۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

تحلیل و پیش‌بینی بار مراجعه به مراکز درمانی با استفاده از مدل‌های آماری و یادگیری ماشین

سمیه آقائی [۱]

[۱] شهرداری رشت، کارشناس ارشد آمار ریاضی

چکیده

در این مطالعه، به تحلیل و پیش‌بینی بار مراجعه به مراکز درمانی با استفاده از ترکیب مدل‌های آماری کلاسیک و الگوریتم‌های یادگیری ماشین پرداخته شده است. داده‌های واقعی مربوط به مراجعات بیماران به مراکز درمانی در شهر تهران طی سال‌های اخیر جمع‌آوری و پیش‌پردازش شده‌اند. با به‌کارگیری مدل‌های رگرسیون خطی، ARIMA و الگوریتم‌های یادگیری ماشین مانند درخت تصمیم و جنگل تصادفی، عملکرد پیش‌بینی این مدل‌ها مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که ترکیب روش‌های آماری و یادگیری ماشین می‌تواند دقت پیش‌بینی بار مراجعه را به‌طور قابل توجهی افزایش دهد و ابزار مؤثری برای برنامه‌ریزی منابع در مراکز درمانی فراهم آورد.

کلمات کلیدی: بار مراجعه، مدل‌های آماری، یادگیری ماشین، پیش‌بینی، مراکز درمانی.

۱ مقدمه

در سال‌های اخیر، رشد فزاینده جمعیت، تغییرات الگوی بیماری‌ها و نیاز روزافزون به خدمات بهداشتی، فشار قابل‌توجهی بر مراکز درمانی وارد کرده است [۱]. یکی از چالش‌های مهم نظام سلامت، پیش‌بینی صحیح بار مراجعه بیماران به منظور تخصیص بهینه منابع انسانی، مالی و تجهیزاتی است. در این زمینه، استفاده از روش‌های آماری و الگوریتم‌های یادگیری ماشین به‌عنوان ابزاری نوین برای تحلیل الگوهای تاریخی داده و پیش‌بینی روندهای آتی مطرح شده‌اند [۲]. مدل‌های آماری مانند رگرسیون خطی و سری‌های زمانی از جمله ((ARIMA به‌دلیل ساختار مشخص و قابلیت تفسیر بالا، به‌طور گسترده در مطالعات پیش‌بینی استفاده شده‌اند [۳]. با این حال، این مدل‌ها محدودیت‌هایی در مواجهه با داده‌های پیچیده و غیرخطی دارند. از سوی دیگر، یادگیری ماشین با بهره‌گیری از قدرت محاسباتی بالا و انعطاف در مدل‌سازی روابط پیچیده، ابزار مناسبی برای تحلیل داده‌های حجیم و پویا در حوزه سلامت محسوب می‌شود [۱]. مطالعات مختلف نشان داده‌اند که ترکیب مدل‌های آماری کلاسیک با الگوریتم‌های یادگیری ماشین مانند درخت تصمیم، جنگل تصادفی و XGBoost می‌تواند دقت

[1] somayehaghaye@yahoo.com

پیش‌بینی را افزایش داده و به بهبود برنامه‌ریزی در سیستم‌های درمانی کمک کند [۴، ۵]. در این پژوهش، تلاش شده است با بهره‌گیری از داده‌های واقعی مراجعات به مراکز درمانی در شهر تهران، عملکرد مدل‌های منتخب آماری و یادگیری ماشین در پیش‌بینی بار مراجعه مورد ارزیابی قرار گیرد.

۲ روابط ریاضی و نمادهای ریاضی

در این مطالعه، برای تحلیل و پیش‌بینی بار مراجعه به مراکز درمانی، از مدل‌های آماری کلاسیک و الگوریتم‌های یادگیری ماشین استفاده شده است. در این بخش، مهم‌ترین روابط و نمادهای ریاضی به‌کاررفته در مدل‌سازی توضیح داده می‌شوند.

۱.۲ مدل رگرسیون خطی

یکی از رایج‌ترین روش‌های مدل‌سازی آماری، رگرسیون خطی است که رابطه بین متغیر وابسته (تعداد مراجعات روزانه) و چند متغیر مستقل را مدل می‌کند:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

که در آن β_i ضرایب مدل و ε_t جمله خطا است [۱].

۲.۲ مدل سری زمانی ARIMA

برای داده‌های زمانی مانند مراجعات روزانه بیماران، مدل $ARIMA$ که ترکیبی از اجزای خودرگرسیونی (AR)، تفاضل‌گیری (I) و میانگین متحرک (MA) است، کاربرد فراوان دارد [۲]:

$$ARIMA(p,d,q): \quad \phi(B)(1-B)^d y_t = \theta(B)\varepsilon_t \qquad (2)$$

که در آن:

- B: عملگر وقفه، به صورت $B^k y_t = y_{t-k}$
- $\phi(B)$: چندجمله‌ای خودرگرسیونی
- $\theta(B)$: چندجمله‌ای میانگین متحرک
- ε_t: اختلال سفید

جدول ۱: نمونه‌ای از داده‌های مراجعات بیماران به بخش اورژانس بیمارستان آموزشی امام رضا (ع) در تهران (منبع: [۱])

بستری مدت (ساعت)	درصد زن بیماران	درصد مرد بیماران	میانگین بیماران سن	تعداد مراجعات	تاریخ
۶.۵	۴۹	۵۱	۴۲.۳	۱۵۴	۲۰۱۷/۰۱/۰۱
۷.۲	۵۱.۵	۴۸.۵	۴۳.۱	۱۶۷	۲۰۱۷/۰۱/۰۲
۵.۸	۴۸	۵۲	۴۱.۸	۱۴۵	۲۰۱۷/۰۱/۰۳
۶.۹	۴۹.۷	۵۰.۳	۴۴.۲	۱۶۰	۲۰۱۷/۰۱/۰۴

۳.۲ الگوریتم جنگل تصادفی $(RandomForest)$

جنگل تصادفی یک الگوریتم یادگیری ماشین مبتنی بر مجموعه‌ای از درختان تصمیم است که برای افزایش دقت، نتایج چند درخت را میانگین می‌گیرد [۳].
خروجی نهایی مدل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} h_t(x) \qquad (۳)$$

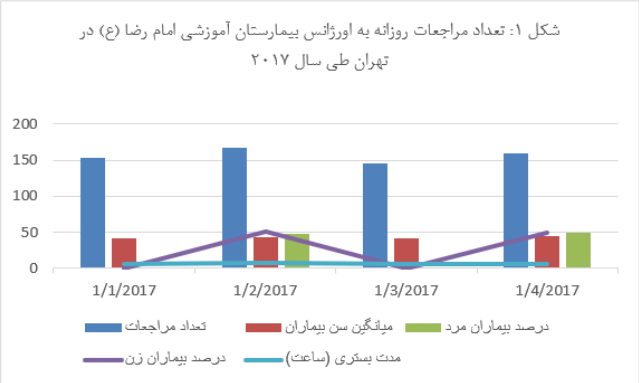
که در آن:

- T: تعداد درخت‌ها
- $h_t(x)$: پیش‌بینی درخت t برای مشاهده x

این روش به دلیل قابلیت بالا در مدل‌سازی روابط پیچیده و مقاومت در برابر بیش‌برازش، در پیش‌بینی بار مراجعه به مراکز درمانی بسیار مؤثر است [۳].

۴.۲ جداول داده‌ها $(Tables of Data)$

در این زیر بخش، داده‌های واقعی مربوط به مراجعات بیماران به بخش اورژانس بیمارستان آموزشی امام رضا (ع) در تهران طی بازه زمانی ۱ تا ۴ ژانویه ۲۰۱۷ ارائه شده است. این داده‌ها شامل تعداد مراجعات روزانه، میانگین سن بیماران، درصد بیماران مرد و زن، و مدت زمان بستری به ساعت می‌باشد. این اطلاعات از بایگانی داخلی بیمارستان امام رضا (ع) استخراج شده‌اند و به منظور تحلیل و پیش‌بینی بار مراجعه به مراکز درمانی در مدل‌های آماری و یادگیری ماشین مورد استفاده قرار می‌گیرند.
داده‌های ارائه شده در جدول (۱) مبنای تحلیل‌ها و مدل‌سازی‌های آماری و یادگیری ماشین در بخش‌های بعدی مقاله خواهند بود.



شکل ۱: نمودار ستونی روند تغییرات تعداد مراجعات، میانگین سن بیماران و مدت بستری روزانه در اورژانس بیمارستان امام رضا (ع) در شهر تهران در بازه ۱ تا ۴ ژانویه ۲۰۱۷. (داده‌ها از جدول ۱ استخراج شده‌اند). (منبع: [۱])

مراجع

[۱] داده‌های واقعی مراجعات بیماران به بخش اورژانس بیمارستان آموزشی امام رضا (ع)، تهران، بایگانی داخلی، بازه زمانی ۱ تا ۴ ژانویه ۲۰۱۷.

[2] World Health Organization. (2021). *Global Health and Aging*. National Institute on Aging, NIH.

[3] Jensen, P. B., Jensen, L. J., & Brunak, S. (2012). Mining electronic health records: towards better research applications and clinical care. *Nature Reviews Genetics*, 13(6), 395–405.

[4] Esteva, A., Robicquet, A., Ramsundar, B., Kuleshov, V., DePristo, M., Chou, K., ... & Dean, J. (2019). A guide to deep learning in healthcare. *Nature Medicine*, 25(1), 24–29.

[5] Rajkomar, A., Dean, J., & Kohane, I. (2019). Machine learning in medicine. *New England Journal of Medicine*, 380(14), 1347–1358.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

تحلیل و پیش‌بینی داده‌های کلان با استفاده از مدل‌های آماری و یادگیری ماشین

سمیه آقائی [۱]

[۱] شهرداری رشت، کارشناس ارشد آمار ریاضی

چکیده

در این مقاله، با هدف تحلیل کارایی بیمارستان‌ها، از مدل $SBM(Slack-BasedMeasure)$ استفاده شده است. داده‌های واقعی بیمارستان در ایران، شامل ورودی‌هایی مانند تعداد کارکنان، تخت‌های فعال و هزینه‌های عملیاتی، و خروجی‌هایی چون تعداد بیماران بستری و درصد رضایت بیماران، مبنای تحلیل قرار گرفته‌اند. پس از آماده‌سازی داده‌ها و اجرای مدل، نتایج نشان داد که این رویکرد می‌تواند تفاوت‌های عملکردی بین واحدهای مختلف را به‌خوبی مشخص کند. یافته‌ها حاکی از آن است که مدل‌های آماری در کنار داده‌های واقعی، ابزار مؤثری برای بهبود بهره‌وری در سیستم سلامت ارائه می‌دهند.

کلمات کلیدی: کارایی بیمارستان، داده‌های واقعی، مدل SBM ، تحلیل پوششی داده‌ها، آمار کاربردی.

۱ مقدمه

تحلیل کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در حوزه‌های مختلف، به‌ویژه در نظام سلامت، از اهمیت بالایی برخوردار است. مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها DEA به عنوان ابزاری قدرتمند برای سنجش کارایی نسبی واحدها به کار می‌روند که در این میان مدل $SBM(Slack-BasedMeasure)$ معرفی شده توسط تونی [۱] (۲۰۰۱) یکی از پیشرفته‌ترین روش‌ها به شمار می‌رود [۱]. این مدل با در نظر گرفتن لغزش‌ها [۲] در ورودی‌ها و خروجی‌ها، به شکلی دقیق‌تر کارایی را اندازه‌گیری می‌کند. مطالعات متعددی به بررسی و توسعه این مدل پرداخته‌اند؛ از جمله طبقه‌بندی و مرور ادبیات DEA فازی توسط حاتمی-ماربینی [۳] و همکاران (۲۰۱۱) که چارچوبی برای تحلیل‌های پیچیده‌تر فراهم کرده‌اند [۲].
همچنین تونی (۲۰۰۱) مدل ابرکارایی مبتنی بر SBM را معرفی کرد که امکان رتبه‌بندی واحدهای کاملاً کارا را میسر می‌سازد [۳].
در این مقاله، با استفاده از داده‌های واقعی بیمارستان منتخب در ایران، مدل SBM برای ارزیابی کارایی آن‌ها به کار گرفته شده است. ورودی‌ها شامل تعداد کارکنان، تعداد تخت فعال و هزینه‌های

[1] somayehaghaye@yahoo.com
[1] Tone
[2] Slacks
[3] Hatami-Marbini

عملیاتی، و خروجی‌ها تعداد بیماران بستری و درصد رضایت بیماران می‌باشد. هدف این پژوهش ارائه تحلیلی دقیق و کاربردی برای بهبود عملکرد بیمارستان‌ها با استفاده از مدل‌های پیشرفته تحلیل پوششی داده‌ها است.

۲ روابط ریاضی و نمادهای ریاضی

مدل SBM که توسط تونی (۲۰۰۱) معرفی شد، یکی از مدل‌های غیرشعاعی در تحلیل پوششی داده‌هاست که کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را با استفاده از مجموع نسبی ناکارایی‌های ورودی و خروجی محاسبه می‌کند.
فرم پایه مدل SBM به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^-}{x_i}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^+}{y_r}} \qquad (1)$$

با شرایط:

$$\begin{cases} x_o = X\lambda + s^- \\ y_o = Y\lambda - s^+ \\ \lambda > 0, \quad s^- > 0, \quad s^+ > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

که در آن:

- x_o, y_o: ورودی‌ها و خروجی‌های واحد مورد ارزیابی،
- X, Y: ماتریس داده‌های ورودی و خروجی کل واحدها،
- λ: وزن‌های ترکیبی،
- s^-, s^+: متغیرهای لغزش ورودی و خروجی،
- m: تعداد ورودی‌ها،
- s: تعداد خروجی‌ها،
- ρ: نمره کارایی.

مدل SBM این ویژگی را دارد که مقدار کارایی محاسبه‌شده همیشه بین صفر و یک است [۱].

جدول ۱: داده‌های ورودی و خروجی بیمارستان منتخب در ایران [۲، ۳]

بیمارستان	تعداد کارکنان	تخت فعال	هزینه عملیاتی (میلیون ریال)	تعداد بیماران بستری	رضایت (٪) بیماران (٪)
۱	۱۵۰	۷۵	۲۵۰۰	۵۸۰۰	۸۲
۲	۱۳۵	۶۸	۲۳۰۰	۵۲۰۰	۸۰
۳	۱۷۰	۸۰	۲۸۰۰	۶۱۰۰	۸۵
۴	۱۴۰	۶۵	۲۲۰۰	۵۰۰۰	۷۹
۵	۱۶۰	۷۲	۲۴۵۰	۵۷۰۰	۸۳
۶	۱۳۰	۶۰	۲۱۰۰	۴۹۰۰	۷۸
۷	۱۸۰	۸۵	۳۰۰۰	۶۳۰۰	۸۶
۸	۱۵۵	۷۰	۲۶۰۰	۵۶۰۰	۸۱
۹	۱۴۵	۶۵	۲۳۵۰	۵۱۰۰	۸۰
۱۰	۱۶۵	۷۸	۲۷۰۰	۵۹۰۰	۸۴

۱.۲ مدل $SBM(Slack-BasedMeasure)$

برای تحلیل و ارزیابی مدل SBM از داده‌های واقعی بیمارستان‌های ایران استفاده شده است. داده‌ها شامل سه ورودی (تعداد کارکنان، تعداد تخت فعال، هزینه‌های عملیاتی) و دو خروجی (تعداد بیماران بستری، درصد رضایت بیماران) برای بیمارستان منتخب می‌باشد.
داده‌های مورد استفاده در جدول **؟؟** از مطالعات تجربی مشابه استخراج شده‌اند [۲، ۳].

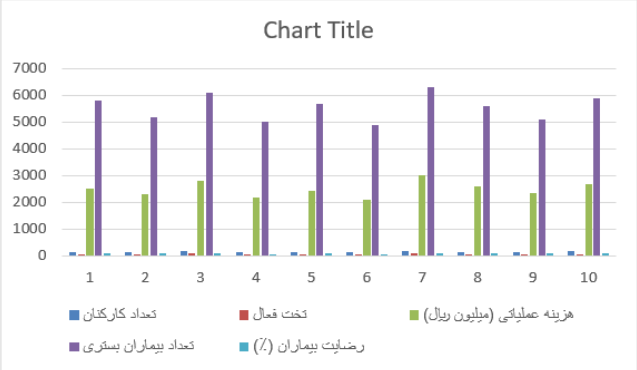
۳ نمودارها و شکل‌ها

در این بخش، برای تحلیل داده‌های واقعی بیمارستانی (مربوط به ارزیابی کارایی ۱۰ بیمارستان در سطح شهر تهران)، از نمودار ستونی برای مقایسه کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) استفاده شده است.

شکل ۱، نمرات کارایی مدل SBM برای بیمارستان‌های مورد بررسی را نمایش می‌دهد. این نمرات از جدول قبل استخراج شده‌اند و بر اساس مدل ارائه‌شده در مطالعات [۲، ۳] بدست آمده‌اند.

نمودار ستونی کارایی SBM شکل ۱ مقایسه نمرات کارایی بیمارستان‌ها بر اساس مدل SBM (منبع: [۲، ۳]).

نمودار نشان می‌دهد که برخی بیمارستان‌ها در دستیابی به کارایی بالا موفق‌تر عمل کرده‌اند. بیمارستان شماره ۵، با نمره ۱، به عنوان مرجع کارا در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱: مقایسه نمرات کارایی بیمارستان‌ها بر اساس مدل SBM (منبع:[۲، ۳])

مراجع

[1] Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 130(3), 498–509.

[2] Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A., & Tavana, M. (2011). A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making. *European Journal of Operational Research*, 214(3), 457–472.

[3] Tone, K. (2002). A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 143(1), 32–41.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

یادگیری ماشین و کاربرد آن در شناسایی ترکیبات اشیای باستانی

محمد رضا بحرینی بهزادی [۱]

[۱] گروه ژنتیک واصلاح دام، دانشکده کشاورزی، دانشگاه یاسوج

چکیده

باستان‌شناسی علمی است که بر مطالعه‌ی بقایای مواد استوار بوده و دسته‌بندی دقیق این بقایا نقش بسزایی در تحلیل‌های آن دارد. این پژوهش به ارزیابی عملکرد سه مدل یادگیری نظارت‌شده‌ی ماشین بردار پشتیبان، رگرسیون لجستیک، و درخت تصمیم در طبقه‌بندی مواد تشکیل‌دهنده‌ی اشیای باستانی می‌پردازد. داده‌های مورداستفاده در این تحقیق از طریق شبیه‌سازی در محیط برنامه‌نویسی R تولید شده و شامل مشخصات نوع ماده (سرامیک، فلز، سنگ)، سن، و اندازه‌ی ۱۰۰۰ نمونه می‌باشد. عملکرد مدل‌ها بر اساس معیارهای صحت، دقت، امتیاز F۱ و اعتبارسنجی متقابل ارزیابی شد. یافته‌ها نشان دادند که ماشین بردار پشتیبان و درخت تصمیم از نظر دقت، عملکرد مشابهی داشتند و به‌طور کلی نتایج قابل قبولی ارائه دادند، هرچند عملکرد کلی مدل‌ها متوسط ارزیابی شد که ممکن است ناشی از محدودیت‌های ویژگی‌های داده باشد. این مطالعه می‌تواند چشم‌اندازهای جدیدی را برای کاربرد یادگیری ماشین در حوزه‌ی باستان‌شناسی مطرح می‌کند.

کلمات کلیدی: اشیای باستانی، دسته‌بندی، یادگیری ماشین

۱ مقدمه

طی دو دهه اخیر، شناسایی آثار باستانی به عنوان یکی از چالش برانگیزترین وظایف باستان‌شناسان در نظر گرفته شده است. مردم این آثار را نمادی از میراث فرهنگی خود می‌دانند و توسعه فناوری تا حد زیادی به شناسایی آثار باستانی کمک کرده است. بقایای باستان‌شناسی می‌توانند در زیر زمین یا روی سطح باشند. این بقایا گواه فعالیت‌های تاریخی و پیش از تاریخ هستند می‌شوند[۱]. همانطور که بیان شده است، تجزیه و تحلیل پراکندگی بقایای سطحی اطلاعات مربوط به تغییرات بالقوه در کاربری زمین یا تخریب مکان‌های تاریخی یا باستانی را در اختیار محققان قرار می‌دهد [۲]. هنگام مطالعه باستان‌شناسی، درک دسته‌بندی اشیای باستانی ضروری است. اشیای ملموسی که در گذشته توسط مردم ساخته یا استفاده شده است را اشیای باستانی گویند و دسته‌بندی آنها به باستان‌شناسان کمک می‌کند تا با فرهنگ‌ها، سنت‌ها و زندگی روزمره در دوران باستان آشنا شوند. دسته‌بندی اشیای باستانی فرآیند منظم سازمان‌دهی اشیا یا اقلامی است که معمولاً دارای اهمیت تاریخی یا فرهنگی

[1] bahreini@yu.ac.ir

هستند و به دسته‌هایی بر اساس ویژگی‌ها، خاستگاه‌ها یا کاربردهایشان تقسیم‌بندی می‌شوند. این فرآیند به باستان‌شناسان و مورخان کمک می‌کند تا روندهای فرهنگی، پیشرفت‌های تکنولوژیکی و تغییرات اجتماعی را در طول زمان درک کنند. دسته‌بندی مؤثر، بینش‌های ارزشمندی را ارائه می‌کند و به محققان این امکان را می‌دهد تا داستان‌ها و زمینه‌های تمدن‌های گذشته را به طور مؤثر کنار هم بگذارند. بسیاری از مؤسسات تحقیقاتی و علمی شروع به درگیر شدن در تحقیق آثار باستانی و پژوهش با استفاده از تکنیک‌های فن‌آوری برای تعیین مناطق غنی از این آثار کرده‌اند [۳]. در واقع تحلیل آثار باستانی آغاز علم باستان‌شناسی است و یک بستر اساسی برای تقریباً همه سؤالات باستان‌شناسی رسمی می‌باشد. بنابراین، سؤالات نظری و روش‌شناختی در مورد تحلیل آثار باستانی در این بخش از علم بسیار مهم است. از لحاظ تاریخی، تحلیل آثار باستانی بر روی دسته‌بندی‌ها و نوع‌شناسی‌ها تمرکز داشته است. در واقع، رویکرد نوع‌شناسی را می‌توان به عنوان یک گام شناختی خاص در تکامل باستان‌شناسی در نظر گرفت. در باستان‌شناسی علاقه زیادی به تعیین نوع مواد تشکیل‌دهنده‌ی اشیای باستانی و همچنین بازسازی خودکار قطعه‌های آثار باستانی وجود دارد. این نوع پژوهش‌ها به این دلیل مهم تلقی می‌شوند زیرا به باستان‌شناسان کمک می‌کنند تا در مورد فرهنگ‌ها و تمدن‌های گذشته به استنباط بپردازند [۴]. مطالعه‌ای توسط بینفورد و بینفورد در سال ۱۹۶۶ در مورد خصوصیات و دسته‌بندی مجموعه‌های موسترین یکی از اولین گام‌ها در تحلیل آماری چند متغیره در تحقیقات باستان‌شناسی بود و پنجره‌ای را برای کاربردهای بیشتر و توسعه‌یافته‌تر باز کرد [۵]. پس از آن پیشرفت‌های عمده دیگری در تحلیل‌های آماری و محاسباتی به طور سریع دنبال شد [۶] که با مسائل دسته‌بندی و خوشه‌بندی [۷]، باستان‌شناسی پیش‌بینی‌کننده [۸] یا تکنیک‌های کمّی مختلف برای گردآوری کامل ساختارهای داده، تحلیل‌های کمّی و تفاسیر نظری [۹] سر و کار داشت. اولین ردپاها یا کاربردهای یادگیری ماشین در باستان‌شناسی به دهه ۱۹۷۰ برمی‌گردد [۱۰] و در حال حاضر استفاده گسترده از این روش‌ها همراه با پیشرفت در فناوری‌های محاسباتی رشد کرده است [۱۱]. بر خلاف مدل‌سازی آماری سنتی، روش‌های یادگیری ماشین به دنبال استفاده از داده‌ها برای ایجاد مدلی هستند که قادر به ارزیابی دقیق داده‌های جدید و دیده نشده است. پیشرفت و توسعه‌ی در علوم کامپیوتر و آمار، ابزارهای گسترده‌ای را در اختیار باستان‌شناسان قرار داده است. این ابزارها شامل ابزارهایی برای سیستم‌های اطلاعات جغرافیایی، مدل‌سازی سه‌بعدی، مدل‌سازی پیش‌بینی‌کننده، تجسم‌سازی، شبیه‌سازی، سنجش از دور، مدیریت منابع و غیره می‌باشند. با این حال، حوزه باستان‌شناسی فاقد ابزارهایی است که از باستان‌شناسان در یکی از وظایف اصلی‌شان، یعنی دسته‌بندی اشیای باستانی، حمایت کند. از آنجا که دسته‌بندی آثار باستانی معمولاً با بازرسی بصری انجام می‌شود، تکنیک‌هایی مانند یادگیری ماشین و بینایی کامپیوتر می‌توانند به منظور توسعه چنین ابزارهایی به کار گرفته شوند. یادگیری ماشین نقشی حیاتی در طیف وسیعی از کاربردهای اساسی مانند داده کاوی، پردازش زبان طبیعی، تشخیص تصویر، سیستم‌های خبره و پیش‌بینی ایفا می‌کند [۱۲]. مسئله دسته‌بندی یکی از فرمول‌بندی‌های استاندارد وظایف یادگیری نظارتی است. یادگیرنده باید تابعی را بیاموزد (برای تقریب رفتار) که یک بردار را در یکی از چندین دسته با مشاهده

چندین نمونه ورودی-خروجی تابع ترسیم می‌کند [۱۳]. در سال‌های اخیر، یادگیری ماشین به ابزاری ارزشمند برای دسته‌بندی و تجزیه و تحلیل مواد اشیای باستانی تبدیل شده است. یادگیری ماشین شاخه‌ای از علم کامپیوتر است که با شناسایی الگوها در داده‌های آماری سر و کار دارد. هنگامی که داده‌های آماری برچسب‌گذاری شده‌اند یعنی تمام طبقه‌بندی‌ها برای داده‌ها مشخص شده‌اند، استفاده از تکنیک‌های یادگیری ماشین امکان دسته‌بندی خودکار داده‌ها را فراهم می‌کند. مروری بر تکنیک‌های یادگیری ماشین را می‌توان در منابع مختلف از چند دهه قبل یافت [۱۵، ۱۴]. روش‌های علم کامپیوتر و علم داده و رویکردهای یادگیری ماشین اخیراً به عنوان ابزاری برای توسعه مدل‌هایی برای دسته‌بندی باستان‌شناسی در حوزه میراث فرهنگی که مستقیماً از داده‌ها استنباط می‌شوند، معرفی و مورد توجه قرار گرفته‌اند. تحلیل داده‌های آماری و داده‌های مبتنی بر هوش مصنوعی مانند استفاده از روش‌های نظارتی، بدون نظارت یا آمار چندمتغیره برای کسب بینش در مورد سؤالات مختلف در حیطه باستان‌شناسی به کار گرفته شده‌اند [۱۷، ۱۶]. برای توسعه یک مدل مناسب برای دسته‌بندی داده‌هایی که از مجموعه‌ای از مثال‌های موجود استنباط شده یا آموزش داده شده است، می‌توان از روش‌های یادگیری ماشین استفاده کرد. به ویژه، اگر برای بخش آموزش، خروجی‌های موردنظر مشخص باشد، می‌توان روش‌های نظارت‌شده را به کار گرفت؛ از سوی دیگر، اگر خروجی‌های موردنظر ناشناخته باشند و بخواهیم گروه‌بندی‌های ممکن داده‌ها را صرفاً بر اساس شباهت‌هایشان پیدا کنیم، می‌توان از روش‌های بدون نظارت استفاده کرد. پژوهش‌ها و مقالات مروری متعدد در مورد الگوریتم‌های یادگیری ماشین و همچنین روش‌های چندمتغیره می‌توان یافت. یک بررسی سیستماتیک از الگوریتم‌های یادگیری ماشین برای علم داده را می‌توان در نوشته‌های آلوغانی و همکاران (۲۰۲۰) یافت [۱۶]. همچنین یک مرور خوب از روش‌های چندمتغیره و بحثی در مورد مزایای آنها نسبت به روش‌های کلاسیک در باستان‌سنجی را می‌توان در نوشته‌های بکستر (۲۰۰۶) مطالعه کرد [۱۷]. یادگیری ماشین به سرعت توسط باستان‌شناسان علاقه‌مند به تجزیه و تحلیل طیفی از داده‌های مکانی، مواد تشکیل‌دهنده‌ی فرهنگی، متنی، طبیعی و هنری پذیرفته شده است. الگوریتم‌ها به ویژه برای شناسایی و دسته‌بندی سریع ویژگی‌ها و اشیاء باستان‌شناسی مناسب هستند. نتایج این مطالعات جدید شامل شناسایی بسیاری از مکان‌های جدید در سراسر جهان و دسته‌بندی بهبودیافته مجموعه داده‌های باستان‌شناسی بزرگ است. یادگیری ماشین به خوبی با روش‌های سنتی‌تر مورد استفاده در تجزیه و تحلیل باستان‌شناسی مطابقت دارد، و همچنان تابع مزایا و مشکلات آن رویکردها است. مقیاس‌پذیری، انعطاف‌پذیری و توسعه سریع یادگیری ماشین، با این حال، آن را به بخشی ضروری از عملکرد باستان‌شناسی قرن بیست و یکم تبدیل می‌کند [۱۸]. دسته‌بندی دقیق مواد تشکیل‌دهنده‌ی اشیای باستانی برای درک زمینه‌های تاریخی و فرهنگی آثار باستانی بسیار مهم است. پژوهش حاضر بر این سوال پژوهشی متمرکز شده است که چگونه تکنیک‌های یادگیری ماشین می‌توانند به تفسیر این‌گونه داده‌ها کمک کنند. در این پژوهش اثربخشی سه الگوریتم یادگیری نظارت‌شده شامل ماشین بردار پشتیبان ، رگرسیون لجستیک و درخت تصمیم در دسته‌بندی مواد تشکیل دهنده‌ی اشیای باستانی مورد مقایسه قرار گرفت. هدف این پژوهش

تعیین این است که کدام الگوریتم بالاترین دقت و قابلیت اطمینان را برای این وظیفه فراهم می‌کند.

۲ مواد و روش ها

افرآیند سازمان‌دهی اشیای باستانی بر اساس ویژگی‌های آن‌ها مانند شکل، عملکرد و مواد تشکیل‌دهنده را دسته‌بندی اشیای باستانی گویند. این روش در مطالعات باستان‌شناسی بسیار مهم است زیرا به شناسایی و درک بافت تاریخی و فرهنگی آثار کمک می‌کند. در پژوهش حاضر عملکرد سه الگوریتم یادگیری نظارت‌شده شامل ماشین بردار پشتیبان، رگرسیون لجستیک و درخت تصمیم در دسته‌بندی مواد تشکیل‌دهنده‌ی اشیای باستانی ارزیابی و مقایسه شدند. با توجه به نوع ویژگی مورد نظر که حالت دودویی و چندجمله‌ای داشت، این سه الگوریتم برای دسته‌بندی و مقایسه در نظر گرفته شد. سه الگوریتم مورد استفاده شامل مجموعه‌ای از دسته‌ها مانند مبتنی بر هسته (ماشین بردار پشتیبانی)، مبتنی بر درخت (درخت تصمیم) و رگرسیون لجستیک بودند. در ادامه ویژگی‌های این سه الگوریتم به اختصار آورده شده است. ماشین بردار پشتیبان یک الگوریتم قدرتمند یادگیری نظارت‌شده برای دسته‌بندی است که با یافتن بهترین ابرصفحه برای جداسازی داده‌های دسته‌های مختلف کار می‌کند. این ابرصفحه با بیشینه کردن فاصله‌ی نقاط نزدیک هر دسته، تفکیک مؤثری را فراهم می‌آورد. نقاط پشتیبان موقعیت این صفحه را تعیین می‌کنند. این الگوریتم از طریق توابع کرنل قادر به مدیریت دسته‌بندی خطی و غیرخطی بوده و در حوزه‌هایی مانند بیوانفورماتیک و تشخیص تصویر کاربرد دارد [۱۳]. رگرسیون لجستیک یک روش آماری پرکاربرد برای دسته‌بندی دودویی است که بر پیش‌بینی احتمال تعلق داده‌ها به دسته‌ای خاص تمرکز دارد. این مدل با برازش داده‌ها به تابع لجستیک مقادیری بین صفر و یک تولید کرده و بر اساس آستانه‌ی مشخصی دسته‌بندی را انجام می‌دهد. سادگی و قابلیت تفسیر آن باعث شده در شرایطی با روابط تقریباً خطی، بسیار محبوب باشد [۱۳]. درخت تصمیم الگوریتمی شهودی برای دسته‌بندی است که داده‌ها را به صورت بازگشتی تقسیم کرده و ساختاری شبیه به درخت ایجاد می‌کند. هر گره نمایانگر ویژگی ورودی و هر شاخه معرف یک قاعده‌ی تصمیم‌گیری است. برگ‌های درخت دسته‌بندی نهایی داده‌ها را مشخص می‌کنند. این مدل به دلیل سادگی و قابلیت تفسیر بالا، گزینه‌ی مناسبی برای تحلیل داده‌های پیچیده محسوب می‌شود [۱۳]. شبیه‌سازی داده‌های این پژوهش با استفاده از زبان برنامه‌نویسی R انجام شد، که به‌طور گسترده برای محاسبات آماری به‌کار می‌رود. مجموعه داده شامل ۱۰۰۰ نمونه از اشیای باستانی بود که هر یک دارای نوع ماده (سرامیک، فلز، سنگ) سن و اندازه بود. متغیر سن نشان می‌دهد که آن شی چند ساله است که بر حسب سال اندازه‌گیری می‌شود، در حالی که متغیر اندازه نشان‌دهنده ابعاد یا جرم آن است. برای پیاده‌سازی مدل‌ها از بسته‌های نرم‌افزاری e”۱۰۷۱” برای ماشین بردار پشتیبان، ”glmnet” برای رگرسیون لجستیک، ”rpart” برای درخت تصمیم و ”caret” برای اعتبارسنجی متقابل استفاده شد. داده‌ها به نسبت ۷۰برای اطمینان از ثبات و قابلیت اطمینان و اعتماد مدل‌های دسته‌بندی، یک تکنیک اعتبارسنجی

متقابل با ۱۰ زیر مجموعه (که معمولاً به عنوان اعتبارسنجی متقابل ۱۰ برابر شناخته می‌شود) استفاده شد. در این روش مجموعه داده به طور تصادفی به ۱۰ زیر مجموعه با اندازه مساوی تقسیم شدند. برای هر تکرار، یک زیرمجموعه به عنوان مجموعه اعتبارسنجی استفاده شد و نُه زیر مجموعه باقی‌مانده برای آموزش مدل استفاده گردید. این فرآیند ۱۰ بار تکرار و هر زیر مجموعه دقیقاً یک بار به عنوان مجموعه اعتبارسنجی استفاده شد. سپس معیارهای عملکرد در تمام تکرارها به طور میانگین محاسبه شدند تا ارزیابی جامعی از عملکرد هر مدل به دست آید. با مقایسه معیارهای عملکرد این الگوریتم‌ها، این مطالعه به منظور شناسایی مؤثرترین روش برای دسته‌بندی مواد تشکیل‌دهنده‌ی اشیای باستانی بر اساس ویژگی‌های آن‌ها هدف‌گذاری شده است. این پژوهش با افزایش صحت و قابلیت اطمینان دسته‌بندی به حوزه وسیع‌تری از مطالعات باستان‌شناسی یاری رسانده و در نهایت به حفظ و درک میراث تاریخی و فرهنگی کمک خواهد کرد.

۳ نتایج و بحث

برای شبیه‌سازی ویژگی سن، میانگین ۵۰۰ و انحراف معیار ۱۰۰ سال و برای ویژگی اندازه اشیای باستانی میانگین ۱۰ و انحراف معیار ۲ سانتی‌متر در نظر گرفته شد. بر اساس این فرضیات پس از ساخت سری داده مورد پژوهش، آماره‌های توصیفی حداقل، حداکثر و میانگین ویژگی سن به ترتیب ۲۱۹، ۸۲۴/۱ و ۵۰۱/۶ و برای ویژگی اندازه به ترتیب ۳/۹، ۱۶/۷۸ و ۱۰/۱ به دست آمد. مقایسه الگوریتم‌های مختلف یادگیری ماشین مورد استفاده برای دسته‌بندی مواد تشکیل‌دهنده‌ی اشیای باستانی در پژوهش حاضر که حاصل از تحلیل داده‌های بخش آزمون هستند در جدول ۱ ارایه شده است.

جدول ۱: مقایسه معیارهای عملکرد حاصل از داده‌های بخش آزمون

نوع الگوریتم	صحت	دقت	امتیازF۱
ماشین بردار پشتیبان	۳۳/۰	۳۲/۰	۳۸/۰
درخت تصمیم	۳۴/۰	۳۱/۰	۲۰/۰
رگرسیون لجستیک	۲۴/۰	۲۸/۰	۲۴/۰

نتایج نشان می‌دهد که معیارهای سنجش دو الگوریتم ماشین بردار پشتیبان و درخت تصمیم به هم نزدیک و هردوی آنها از الگوریتم رگرسیون لجستیک بهتر توانستند نوع مواد تشکیل‌دهنده‌ی اشیای باستانی را دسته‌بندی کنند. با توجه به اینکه از لحاظ معیار امتیاز 1F، روش ماشین بردار پشتیبان اختلاف زیادی با روش درخت تصمیم داشت در این پژوهش الگوریتم ماشین بردار پشتیبان به عنوان بهترین الگوریتم دسته‌بندی انتخاب شد. مدل‌های درخت تصمیم و رگرسیون لجستیک نیز عملکرد خوبی داشتند که نشان‌دهنده استحکام الگوریتم‌های یادگیری نظارت‌شده است. نتایج موجود در جدول ۱ نشان می‌دهد که مقادیر عددی معیارهای کارایی مختلف برای هر سه مدل یادگیری نظارت‌شده در

حد متوسط و بین ۰/۲۰ تا ۰/۳۸ محاسبه شده است که می‌تواند به علت تعداد کم ویژگی‌های مورد استفاده در فرایند دسته‌بندی باشد که فقط از دو ویژگی سن و اندازه استفاده شده بود. لذا برای انجام دوباره پژوهشی از این نوع، پیشنهاد می‌شود که از ویژگی‌های دسته‌بندی بیشتری استفاده شود. در منابع، پژوهش مشابهی برای مقایسه با نتایج پژوهش حاضر وجود نداشت ولی چندین پژوهش در زمینه انجام دسته‌بندی در باستان‌شناسی قابل دسترس بود. در پژوهشی پتانسیل تکنیک‌های یادگیری ماشین نظارت‌شده برای دسته‌بندی نمونه‌های سرامیکی بر اساس غلظت عناصر شیمیایی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این پژوهشگران نشان داد که یادگیری ماشین می‌تواند ابزاری قابل اعتماد و مفید برای دسته‌بندی باستان‌شناسی بر اساس داده‌های تجزیه و تحلیل شیمیایی باشد و تصویری مطمئن و شماتیک از یافته‌های باستان‌شناسی ارائه دهد [۲۰]. در پژوهشی دیگر از چند الگوریتم نزدیک‌ترین-K همسایه، کوانتیزاسیون بردار یادگیری و درخت تصمیم برای دسته‌بندی نمونه‌های سرامیک باستان‌شناسی استفاده شد. این پژوهشگران نیز تأکید کردند که چگونه تجزیه و تحلیل اشیای باستانی سرامیکی با استفاده از الگوریتم‌های دسته‌بندی می‌تواند به پاسخگویی به سؤالات باستان‌شناسی و بنابراین شناسایی اشتباهات احتمالی دسته‌بندی نوع‌شناسی یا تشخیص الگوهای ترکیبی، تکنولوژیکی یا سبکی خاص کمک کند [۲۱]. در پژوهشی دیگر، الگوریتم جنگل تصادفی بهترین عملکرد را در مقایسه با روش‌های ماشین بردار پشتیبان و نزدیک‌ترین-K همسایه در دسته‌بندی چنددسته‌ای سرامیک‌های باستانی چینی داشت [۲۲]. در پژوهشی دیگر جنسیت را در بقایای باستان‌شناسی با استفاده از الگوریتم یادگیری درخت تصمیم شناسایی کردند. این پژوهشگران نتیجه گرفتند که درخت‌های تصمیم مدل‌های یادگیری ماشینی هستند که می‌توانند پیش‌بینی‌های دقیقی برای مشکل تشخیص جنسیت ارائه دهند. همچنین آنها تأکید کردند که در مقایسه با سایر مدل‌های یادگیری ماشین، درخت‌های تصمیم می‌توانند جایگزین بهتری برای باستان‌شناسان باشند. درختان تصمیم می‌توانند مجموعه‌ای از قوانین را ارائه دهند که نشان‌دهنده روش پیش‌بینی است و این برای باستان‌شناسان بسیار جالب خواهد بود [۲۳]. از ماشین‌های بردار پشتیبان برای مسئله پیش‌بینی قد اسکلت‌های انسان با توجه به اندازه‌گیری‌های استخوانی استفاده شده است [۲۴]. نتیجه‌گیری شده بود که مدل‌های رگرسیون ماشین بردار پشتیبان برای مشکل در دست بسیار خوب عمل کرده و از رویکردهای موجود در مقالات بهتر عمل می‌کنند. همچنین قد اسکلت به وضوح به طول استخوان افراد بستگی دارد، لذا ساخت مدل‌های ماشین بردار پشتیبان برای این کار پتانسیل ارائه یک اتوماسیون یادگیری ماشین دقیق برای این کار را دارد که می‌تواند برای باستان‌شناسان مفید باشد [۲۴]. لازم به ذکر است که در پژوهش‌های آینده می‌توان از سایر تکنیک‌های یادگیری ماشین، مانند روش‌های جمعی یا یادگیری عمیق برای افزایش دقت دسته‌بندی استفاده و کارایی آنها را مورد بررسی قرار داد. علاوه بر این، گسترش مجموعه داده با نمونه‌های اشیای باستانی متنوع‌تر می‌تواند تعمیم‌پذیری مدل‌ها را بهبود بخشد. همچنین احتمالاً استفاده از هر دو روش یادگیری نظارتی و بدون نظارت بتواند شباهت‌ها و همچنین تفاوت‌ها را بهتر برجسته کند.

۴ نتیجه گیری

کار دسته‌بندی همواره یکی از چالش برانگیزترین بخش‌های باستان‌شناسی بوده، هست و خواهد ماند. در این مطالعه عملکرد سه الگوریتم یادگیری نظارت‌شده برای دسته‌بندی مواد تشکیل‌دهنده‌ی اشیای باستانی بر اساس مدل‌های رسمی فرآیند کشف دانش مقایسه گردید. مدل ماشین بردار پشتیبان بالاترین دقت را نشان داد و به دنبال آن درخت تصمیم و رگرسیون لجستیک قرار گرفتند. این یافته‌ها بر پتانسیل یادگیری ماشین در تحقیقات باستان‌شناسی تأکید می‌کند. همچنین شکی نیست که یادگیری ماشین می‌تواند به طور قابل توجهی به شناسایی نمونه‌های باستان‌شناسی با پتانسیل استفاده از کتابخانه‌ای از داده‌ها که همیشه در حال بهبود و گسترش است کمک کند. لذا پیشنهاد می‌شود که کتابخانه داده‌ای شامل اطلاعات همه مکان‌های تاریخی و باستانی کشور جهت استفاده پژوهشگران ایجاد شود.

مراجع

[1] rgyrou, A. and Agapiou, A. (2022). A review of artificial intelligence and remote sensing for archaeological research. Remote Sensing, 14(23), .6000

[2] rengo, H. A. and Garcia-Molsosa, A. (2019). A brave new world for archaeological survey: Automated machine learning-based potsherd detection using high-resolution drone imagery. Journal of Archaeological Science, 112, .105013

[3] asheed, N. A. and Nordin, M. J. (2020). Classification and reconstruction algorithms for the archaeological fragments. Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences, 32(8), .883-894

[4] ristov, V. and Agre, G. (2013). A software system for classification of archaeological artefacts represented by 2D plans. Cybernetics and Information Technologies, 13(2), .82-96

[5] inford, L. R. and Binford, S. R. (1966). A preliminary analysis of functional variability in the Mousterian of Levallois facies. American anthropologist, 68(2), 238-295.

[6] jindjian, F. (2015). A short history of the beginnings of mathematics in archaeology. Mathematics and archaeology, 65-85.

[7] odson, F. R. (1970). Cluster analysis and archaeology: some new developments and applications. World archaeology, 1(3), 299-320.

[8] udge, J. and Lynne, S. (1988). Predicting the past: Correlation, explanation, and the use of archaeological models. In J. Judge , S. Lynne (Eds.), Quantifying the present and predicting the past: Theory, method, and application of archaeological predictive modeling (pp. 1–18). U.S. Department of the Interior, Bureau of Land Management Service Center.

[9] oorrips, A. (Ed.). (1990). Mathematics and information science in archaeology: a flexible framework (Vol. 3). Holos.

[10] owalski, B. R., Schatzki, T. F. and Stross, F. H. (1972). Classification of archaeological artifacts by applying pattern recognition to trace element data. Analytical Chemistry, 44(13), 2176-2180.

[11] acciari, I. and Pocobelli, G. F. (2022). Machine learning: A novel tool for archaeology. In Handbook of Cultural Heritage Analysis (pp. 961-1002). Cham: Springer International Publishing.

[12] aity, N. G. and Das, S. (2017, March). Machine learning for improved diagnosis and prognosis in healthcare. In 2017 IEEE aerospace conference (pp. 1-9). IEEE.

[13] sisanwo, F. Y., Akinsola, J. E. T., Awodele, O., Hinmikaiye, J. O., Olakanmi, O. and Akinjobi, J. (2017). Supervised machine learning algorithms: classification and comparison. International Journal of Computer Trends and Technology (IJCTT), 48(3), .128-138

[14] uda, R. O., Hart, P. E. and Stork, D. G. (2001). Pattern classification, 2nd Edition. Wiley Interscience Publication. [15] Mitchell, T. M. (1997). Machine learning (Vol. 1, No. 9). New York: McGraw-hill.

[15] lloghani, M., Al-Jumeily, D., Mustafina, J., Hussain, A. and Aljaaf, A. J. (2020). A systematic review on supervised and unsupervised machine learning algorithms for data science. Supervised and unsupervised learning for data science, 3-21.

[16] axter, M. J. (2006). A review of supervised and unsupervised pattern recognition in archaeometry. Archaeometry, 48(4), 671-694.

[17] ickler, S. H. (2021). Machine learning arrives in archaeology. Advances in Archaeological Practice, 9(2), 186-191.

[18] mondiagbe, D. A., Veeramani, S. and Sidhu, A. S. (2019, June). Machine learning classification techniques for breast cancer diagnosis. In IOP conference series: materials science and engineering (Vol. 495, p. 012033). IOP Publishing.

[19] uschioni, G., Malchiodi, D., Zanaboni, A. M. and Bonizzoni, L. (2023). Supervised learning algorithms as a tool for archaeology: Classification of ceramic samples described by chemical element concentrations. Journal of Archaeological Science: Reports, 49, 103995.

[20] haralambous, E., Dikomitou-Eliadou, M., Milis, G. M., Mitsis, G. and Eliades, D. G. (2016). An experimental design for the classification of archaeological ceramic data from Cyprus, and the tracing of inter-class relationships. Journal of Archaeological Science: Reports, 7, 465-471.

[21] un, H., Liu, M., Li, L., Yan, L., Zhou, Y. and Feng, X. (2020). A new classification method of ancient Chinese ceramics based on machine learning and component analysis. Ceramics International, 46(6), 8104-8110.

[22] ircea, I. G., Czibula, G. and Petrusel, M. R. (2015). Sex identification in archaeological remains using decision tree learning. Studia Universitatis Babes-Bolyai, Informatica, 60(2), 91-103.

[23] onescu, V. S. (2015). Applying support vector regression methods for height estimation in archaeology. Studia Universitatis Babes-Bolyai, Informatica, 60(2), 70-82.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

یادگیری ماشین برای پیش بینی میزان مصرف آب محصولات کشاورزی

محمد رضا بحرینی بهزادی [۱]

[۱] گروه ژنتیک واصلاح دام، دانشکده کشاورزی، دانشگاه یاسوج

چکیده

مدیریت بهینه آب در کشاورزی نقش مهمی در مقابله با کمبود آب و امنیت غذایی دارد. این پژوهش چهار مدل یادگیری ماشین شامل جنگل تصادفی، ماشین بردار پشتیبان، گرادیان تقویت‌شده شدید و درخت تصمیم را برای پیش‌بینی مصرف آب محصولات بر اساس عوامل محیطی بررسی می‌کند. داده‌های مصرف آب با شبیه‌سازی در محیط نرم‌افزار R بر اساس رطوبت خاک، دما، میزان بارندگی و نوع محصول تولید شده و مدل‌ها با معیارهای میانگین خطای مطلق، ریشه میانگین مربعات خطا، میانگین درصد خطای مطلق و ضریب تعیین ارزیابی شدند. نتایج نشان داد که ماشین بردار پشتیبان با ضریب تعیین برابر با ۶۵.۰ بهترین عملکرد را داشته و کمترین نرخ خطا را نیز داشته است. همچنین مدل ترکیبی، دقت بالاتری نسبت به سایر الگوریتم‌ها نشان داد. این یافته‌ها نشان‌دهنده ظرفیت بالای یادگیری ماشین در بهینه‌سازی مصرف آب کشاورزی بوده و مسیرهایی برای تحقیقات آینده در مدیریت منابع ارائه می‌کنند.

کلمات کلیدی: الگوریتم‌های هوشمند، بهینه‌سازی مصرف آب، مدل ترکیبی، یادگیری ماشین

۱ مقدمه

شکاف فزاینده بین تقاضا و عرضه آب یکی از مهم‌ترین چالش‌هایی است که جهان با آن مواجه است [۱].دسترسی به آب شیرین به‌سرعت در حال کاهش است، که ناشی از رشد جمعیت و تغییرات اقلیمی است و فشار بیشتری بر خدمات آب‌رسانی وارد می‌کند [۲]. ایران در نیمکره شمالی بین عرض‌های جغرافیایی ۲۵ تا ۴۰ درجه شمالی و ۴۴ تا ۶۳ درجه شرقی واقع شده است و یکی از خشک‌ترین مناطق جهان محسوب می‌شود. میانگین بارندگی در کشور ۲۵۲ میلی‌متر است که معادل یک‌سوم میانگین بارندگی جهانی است. به همین دلیل، حدود ۱۷۹ میلی‌متر (۷۱٪) از مقدار کم بارندگی در کشور به‌طور مستقیم تبخیر می‌شود، که ناشی از پتانسیل بالای تبخیر و تعرق در ایران (۱۵۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ میلی‌متر) است. بنابراین، کمبود بحرانی آب در کشور باید مورد توجه قرار گیرد [۳]. منابع آب بخش جدایی‌ناپذیر از پتانسیل منابع طبیعی یک کشور هستند، نقش مهمی در توسعه بیشتر بخش‌های اقتصادی ایفا می‌کنند و همواره مورد تقاضای بالا قرار دارند. تقاضای آب به طور مداوم به

[1] bahreini@yu.ac.ir

دلیل رشد جمعیت افزایش می‌یابد، علاوه بر بی‌ثباتی فزاینده‌ای که توسط گرمایش جهانی و تغییرات اقلیمی ایجاد شده است [۴]. مدیریت آب یک چالش اساسی در کشاورزی جهانی نیز هست، زیرا استفاده بهینه از منابع آب برای امنیت غذایی ضروری است، به ویژه در مناطقی که با کمبود آب و تخریب زمین مواجه هستند. انتظار می‌رود تقاضای آب از سال ۲۰۰۰ تا ۲۰۵۰ در سطح جهانی ۵۵٪ افزایش یابد، که عمدتاً به دلیل نیازهای صنعتی، مسکونی و تولید انرژی است، و امکان افزایش عرضه آب برای کشاورزی بسیار محدود باقی می‌ماند [۵]. در نتیجه، بهبود کارایی مصرف آب در کشاورزی به یک ضرورت تبدیل می‌شود. همچنین مدیریت منابع آب یکی از چالش‌های اساسی در کشاورزی مدرن نیز محسوب می‌شود که تحت تأثیر افزایش تقاضای جهانی برای تولید مواد غذایی، گسترش شهرنشینی و تغییرات اقلیمی غیرقابل پیش‌بینی قرار دارد. بهره‌برداری بهینه از آب نه‌تنها برای حفظ پایداری تولیدات کشاورزی ضروری است، بلکه نقش کلیدی در کاهش اثرات کم‌آبی ایفا می‌کند. ازاین‌رو، پیش‌بینی دقیق میزان مصرف آب در سیستم‌های کشاورزی امری ضروری برای اجرای راهبردهای مؤثر در مدیریت و صرفه‌جویی منابع آبی به‌شمار می‌رود. تنها در بخش کشاورزی، انتظار می‌رود که مصرف جهانی آب کشاورزی تا سال ۲۰۲۵ نسبت به برآوردهای سال ۲۰۱۹، ۶۰٪ افزایش یابد [۶]. با نزدیک شدن تقاضای آب به مقدار کل منابع آب شیرین تجدیدپذیر موجود، مدیریت صحیح منابع باقی‌مانده برای تضمین تأمین آب پایدار و ایمن در آینده ضروری است. این موضوع اهمیت تنظیمات مناسب سیاست‌ها را برجسته می‌کند، به‌ویژه در مورد منابع آب مشترک بین کشورها یا آب‌های فرامرزی. روش‌های هوش مصنوعی در حوزه‌های مختلف تحقیقاتی مانند پزشکی، علوم پایه، بازاریابی، مهندسی و کشاورزی، عمدتاً به دلیل قابلیت استدلال قدرتمند، انعطاف‌پذیری، ظرفیت مدل‌سازی و پیش‌بینی، مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در گذشته، مدل‌های پیش‌بینی مصرف آب عمدتاً بر روش‌های آماری مبتنی بودند که اغلب در تحلیل روابط پیچیده و غیرخطی میان عوامل محیطی و ویژگی‌های محصولات با محدودیت‌هایی مواجه می‌شدند. در این راستا، یادگیری ماشین که خود بخشی از هوش مصنوعی است به‌عنوان یک ابزار نویدبخش مطرح شده که قادر به مدل‌سازی روابط چندبعدی و غیرخطی در داده‌های کشاورزی است. الگوریتم‌های یادگیری ماشین با توانایی پردازش داده‌های حجیم، شناسایی وابستگی‌های پیچیده و ارائه پیش‌بینی‌های دقیق، جایگزین مناسبی برای رویکردهای سنتی محسوب می‌شوند. تعداد زیادی از الگوریتم‌های یادگیری ماشین پیشنهاد شده و در حوزه‌های تحقیقاتی مختلف به کار گرفته شده‌اند [۷]. اهداف رایج این تحقیقات شامل دستیابی به یک رابطه پیش‌بینی دقیق بین متغیرهای مستقل و وابسته و همچنین تعیین و رتبه‌بندی تأثیرگذارترین متغیرهای مستقل است. با تحقق این اهداف، پژوهشگران ممکن است بتوانند متغیرهای کم‌اهمیت را از برنامه‌های اندازه‌گیری حذف کنند که می‌تواند باعث صرفه‌جویی قابل توجهی در زمان و منابع شود. از طرفی برآورد مصرف و تقاضای آب پیچیده است زیرا داده‌های مشاهده‌ای محدود هستند و تعاملات بین عوامل مختلف محیطی و اجتماعی بر آن تأثیر می‌گذارند. بنابراین، روش‌های مختلفی برای مدیریت مجموعه داده‌های بزرگ و پیچیده در پیش‌بینی‌ها پیشنهاد شده‌اند. با پیشرفت‌های یادگیری ماشین، این

چالش‌ها در مطالعات اخیر مورد بررسی قرار گرفته و همچنان در حال تحقیق هستند [۹، ۸]. مطالعه حاضر به بررسی و مقایسه چهار الگوریتم پرکاربرد یادگیری ماشین، شامل ماشین بردار پشتیبان ، جنگل تصادفی ، گرادیان تقویت‌شده شدید و درخت تصمیم ، در پیش‌بینی میزان مصرف آب اختصاص یافته است. برای این منظور، عوامل محیطی نظیر رطوبت خاک، دما و میزان بارندگی، همراه با داده‌های دسته‌بندی‌شده مربوط به نوع محصول، به‌عنوان ورودی‌های مدل به‌کار گرفته شده‌اند تا بهترین رویکرد مدل‌سازی برای مدیریت بهینه منابع آب کشاورزی شناسایی شود. علاوه بر این، مدل‌سازی گروهی نیز به‌منظور افزایش قابلیت اعتماد به پیش‌بینی‌ها از طریق ترکیب خروجی مدل‌های مختلف، مورد استفاده قرار گرفته است. یافته‌های این پژوهش با هدف کاهش فاصله میان پیشرفت‌های نظری در حوزه یادگیری ماشین و کاربرد عملی آن در کشاورزی دقیق ارائه شده‌اند. تلفیق مدل‌های یادگیری ماشین با تکنیک‌های مهندسی ویژگی و استفاده از معیارهای ارزیابی پیشرفته، چارچوبی جامع برای بهینه‌سازی مصرف آب فراهم می‌آورد که به‌طور مؤثر پیچیدگی‌های وابستگی‌های متقابل میان عوامل محیطی و کشاورزی را در نظر گرفته و تحلیل می‌کند.

۲ مواد و روش ها

این پژوهش با هدف ارزیابی دقت پیش‌بینی الگوریتم‌های یادگیری ماشین در تخمین میزان مصرف آب در کشاورزی، با در نظر گرفتن متغیرهای محیطی و نوع محصول، انجام شد. به‌منظور شبیه‌سازی سناریوهای واقعی کشاورزی، مجموعه داده به‌صورت مصنوعی تولید گردید. این داده‌ها شامل متغیرهایی مانند رطوبت خاک، دمای محیط، میزان بارندگی و نوع محصول بودند که تأثیر بسزایی در تعیین میزان مصرف آب دارند. با اعمال روابط کنترل‌شده و افزودن نویز، مجموعه داده شبیه‌سازی‌شده از تنوع و واقع‌گرایی کافی برخوردار شد تا قابلیت آزمایش روش‌های یادگیری ماشین را تضمین کند. داده‌های ایجاد شده متشکل از ۵۰۰ نمونه بود که متغیرهای کلیدی مانند رطوبت خاک (درصد)، دما (درجه سلسیوس) و میزان بارندگی (میلی‌متر) را در بر می‌گرفت. نوع محصول به‌صورت تصادفی بین گندم، برنج و ذرت تخصیص یافت تا امکان نمایش داده‌های دسته‌بندی‌شده فراهم گردد. مصرف آب، به‌عنوان متغیر پاسخ، به‌صورت تابعی ریاضی از این متغیرها محاسبه شد که شامل تأثیرات خطی رطوبت خاک، دما و میزان بارندگی همراه با نویز تصادفی بود. این رویکرد نه‌تنها امکان مدل‌سازی پیچیده را فراهم ساخت، بلکه قابلیت تفسیر روابط بین داده‌ها را نیز حفظ کرد. به‌منظور تطبیق داده‌ها با مدل‌های یادگیری ماشین، پیش‌پردازش مناسب امری ضروری بود. نوع محصول، که یک متغیر دسته‌ای محسوب می‌شود، با استفاده از روش رمزگذاری One-Hot به فرمت عددی تبدیل شد تا الگوریتم‌ها بتوانند آن را به‌عنوان شاخص‌های دودویی پردازش کنند. متغیرهای عددی، شامل رطوبت خاک، دما و میزان بارندگی، جهت استانداردسازی دامنه و جلوگیری از ایجاد سوگیری ناشی از تفاوت مقیاس در طول فرآیند آموزش مدل‌ها، مقیاس‌بندی شدند. علاوه بر این، مهندسی ویژگی نقش مهمی

در غنی‌سازی مجموعه داده ایفا کرد و تعاملات غیرخطی و روابط معمول در سیستم‌های کشاورزی را ثبت نمود. ویژگی‌های چندجمله‌ای مانند توان دوم دما و رطوبت خاک به مدل افزوده شد تا تأثیرات غیرخطی بهتر لحاظ گردد. همچنین، عبارات تعاملی نظیر رطوبت خاک×دما، و ترکیب سه‌گانه رطوبت خاک×دما×میزان بارندگی، جهت نمایش تأثیرات متقابل عوامل محیطی در مصرف آب در نظر گرفته شد. در این پژوهش، چهار الگوریتم یادگیری ماشین شامل ماشین بردار پشتیبان، جنگل تصادفی، گرادیان تقویت‌شده شدید و درخت تصمیم برای پیش‌بینی میزان مصرف آب پیاده‌سازی شدند. این الگوریتم‌ها به دلیل قابلیت‌های منحصربه‌فرد خود در انجام وظایف رگرسیون انتخاب شدند. ماشین بردار پشتیبان از رویکرد مبتنی بر هسته بهره می‌برد که امکان مدیریت وابستگی‌های غیرخطی را فراهم می‌سازد. به‌منظور بهینه‌سازی عملکرد این مدل، هایپرپارامترهای آن از جمله تنظیم‌پذیری (C) و پهنای هسته (سیگما) با استفاده از جستجوی شبکه‌ای و اعتبارسنجی متقابل تنظیم شدند. جنگل تصادفی یک روش یادگیری گروهی است که با ترکیب چندین درخت تصمیم، به کاهش بیش‌برازش و افزایش پایداری مدل کمک می‌کند. در این مدل، تعداد درخت‌ها و ویژگی‌های نمونه‌گیری شده در هر تقسیم به‌گونه‌ای تنظیم شدند که عملکرد بهینه حاصل شود. الگوریتم گرادیان تقویت‌شده شدید به دلیل کارایی بالا در مجموعه داده‌های ساختاریافته شناخته شده است و فرآیند تنظیم هایپرپارامترهای آن بر عواملی مانند نرخ یادگیری، عمق درخت، نسبت‌های نمونه‌گیری و نمونه‌گیری ستونی متمرکز بود. درخت تصمیم نیز به‌عنوان یکی از ساده‌ترین و قابل‌تفسیرترین الگوریتم‌ها شناخته می‌شود که داده‌ها را براساس آستانه‌های ویژگی به شاخه‌های مختلف تقسیم می‌کند. در این مدل، پارامتر پیچیدگی ،(cp) که نقش تعیین‌کننده‌ای در تعداد تقسیم‌های درخت دارد، برای افزایش دقت پیش‌بینی تنظیم شد. به‌منظور بهبود دقت پیش‌بینی، یک مدل گروهی ایجاد شد که پیش‌بینی‌های این الگوریتم‌ها را تلفیق کرده و از نقاط قوت هر یک بهره می‌برد. عملکرد این مدل‌ها با استفاده از چهار معیار اصلی ارزیابی شد که شامل خطای میانگین مطلق ، به‌عنوان شاخصی برای اندازه‌گیری تفاوت مطلق میان پیش‌بینی‌ها و مقادیر واقعی، ریشه میانگین مربعات خطا ، که جریمه‌ای برای خطاهای بزرگ‌تر در نظر می‌گیرد، خطای میانگین درصد مطلق ، که خطا را نسبت به مقدار واقعی ارزیابی می‌کند، و ضریب تعیین ، که میزان واریانس مصرف آب توضیح داده‌شده توسط مدل را نشان می‌دهد. این معیارها ارزیابی جامعی از دقت، نرخ خطا و توانایی توضیح‌دهندگی مدل ارائه دادند و علاوه بر این، عملکرد مدل گروهی نیز بررسی شد تا بهبودهای حاصل از ترکیب مدل‌های فردی ارزیابی گردد.

۳ نتایج و بحث

عملکرد چهار الگوریتم یادگیری ماشین و مدل ترکیبی با استفاده از یک مجموعه داده شبیه‌سازی شده، مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج ارائه‌شده در جدول ۱ به وضوح نقاط قوت و محدودیت‌های هر روش را در پیش‌بینی میزان مصرف آب نشان می‌دهند.

جدول ۱: مقایسه معیارهای عملکرد مختلف

الگوریتم نوع	R^2	MAPE	RMSE	MAE
پشتیبان بردار ماشین	۰/۶۵	۵/۰۵	۲۱/۳۶	۱۷/۲۷
تصادفی جنگل	۰/۲۳	۱۵/۲۹	۶۲/۶۷	۵۵/۰۱
شدید تقویت‌شده گرادیان	۰/۲۷	۱۳/۳۵	۵۵/۸۸	۴۸/۱۶
تصمیم درخت	۰/۲۵	۱۲/۸۷	۵۳/۵۰	۴۶/۱۹
ترکیبی مدل	۰/۴۵	۱۰/۶۲	۴۵/۱۲	۳۸/۴۰

تعیین ضریب :R^2 مطلق، خطای درصد میانگین MAPE: خطا، مربعات میانگین ریشه RMSE: مطلق، خطای میانگین MAE:

ماشین بردار پشتیبان با داشتن ضریب تعیین ۰/۶۵ به‌عنوان برترین الگوریتم شناخته شد، که نشان‌دهنده توانایی آن در توضیح ۶۵٪ از تغییرات مصرف آب است. این روش کمترین مقدار معیارهای مرتبط با خطا را ثبت کرد که بیانگر دقت بالای آن در پیش‌بینی‌ها است. همچنین مقدار ۵/۰۵ به‌دست‌آمده برای میانگین درصد خطای مطلق، نشان‌دهنده اعتبار مدل در ارزیابی مصرف آب در مقیاس‌های مختلف است. روش‌های جنگل تصادفی و گرادیان تقویت‌شده شدید با مقادیر ضریب تعیین به ترتیب ۰/۲۳ و ۰/۲۷ ، عملکرد متوسطی از خود نشان دادند. بین این دو روش، گرادیان تقویت‌شده شدید دارای میزان خطای کمتری بود و عملکرد بهتری داشت. با وجود قابلیت جنگل تصادفی در مدل‌سازی تعاملات غیرخطی، عملکرد نسبتاً ضعیف آن نشان می‌دهد که بهینه‌سازی بیشتر پارامترهای مدل یا افزودن ویژگی‌های مهندسی‌شده می‌تواند موجب بهبود نتایج شود. درخت تصمیم نیز با داشتن ضریب تعیین ۰/۲۵ و سایر معیارهای خطای نزدیک، عملکردی مشابه روش گرادیان تقویت‌شده شدید داشت. سادگی این مدل باعث افزایش تفسیرپذیری آن شده است؛ اما در مواجهه با پیچیدگی و تغییرپذیری داده‌ها دچار محدودیت بوده و نرخ خطای بالاتر آن نسبت به ماشین بردار پشتیبان این مسئله را نشان می‌دهد. مدل ترکیبی، که پیش‌بینی‌های هر چهار الگوریتم را ترکیب کرده بود، با داشتن ضریب تعیین و ریشه میانگین مربعات خطا به ترتیب برابر با ۰/۴۵ و ۴۵/۱۲ نسبت به روش‌های جنگل تصادفی، گرادیان تقویت‌شده شدید و درخت تصمیم دقت بالاتری داشت، اگرچه مقدار ضریب تعیین مدل ترکیبی پایین‌تر از ماشین بردار پشتیبان بود، اما این رویکرد، خروجی متعادلی ارائه کرد و نقاط ضعف مدل‌های مستقل را تا حدی کاهش داد. پژوهشهایی در زمینه استفاده از روش‌های یادگیری ماشین برای بررسی مصرف و بهره‌وری آب در محصولات کشاورزی انجام شده است. اَلبلتاجی و همکاران (۲۰۲۲) در پژوهشی به بررسی مدل‌سازی، پیش‌بینی و شبیه‌سازی میزان بهره‌وری آب محصولات کشاورزی برای عملکرد دانه‌های گندم و ذرت پرداختند [۱۰]. این مطالعه، که با استفاده از مجموعه‌ای از متغیرهای اقلیمی انجام شد، از پنج روش یادگیری ماشین شامل جنگل تصادفی، ماشین بردار پشتیبان و درخت‌های تقویت‌شده بهره گرفت. یافته‌ها نشان دادند که چندین روش جایگزین مبتنی بر یادگیری ماشین با عملکرد بالا قادر به برآورد مؤثر بهره‌وری آب محصولات کشاورزی در شرایط محدودیت داده‌های اقلیمی هستند. این محققین گزارش کردند که این روش‌ها نقش مهمی در تسهیل تصمیم‌گیری برای

طراحان، توسعه‌دهندگان و مدیران منابع آبی ایفا می‌کنند [۱۰]. بابائیان و همکاران (۲۰۲۱) رویکردی نوین برای برآورد رطوبت خاک در منطقه ریشه معرفی کردند که مبتنی بر داده‌های سنجش از دور خاک و یادگیری ماشین خودکار بود [۱۱]. یافته‌های آن‌ها نشان داد که الگوریتم‌های یادگیری ماشین قابلیت بالاتری در اندازه‌گیری دقیق رطوبت منطقه ریشه در محل دارند، و این امر به بهبود دقت در تحلیل تنوع مکانی رطوبت خاک در مقیاس مزرعه منجر می‌شود [۱۱]. کار و همکاران (۲۰۲۱) با بهره‌گیری از ترکیبی از سه الگوریتم یادگیری ماشین شامل ماشین بردار پشتیبان، شبکه عصبی مصنوعی و جنگل تصادفی، روابط یک‌به‌یک بین گیاه و آب را بررسی کرده و پروفایل‌های پیوسته تبخیر و تعرق را تولید کردند [۱۲]. یافته‌های آن‌ها نشان داد که روش‌های یادگیری ماشین قادرند نتایج بهینه‌ای با حداقل افزونگی و کاهش اطلاعات ارائه دهند، که به بهبود دقت در تجزیه‌وتحلیل داده‌های مرتبط با تبخیر و تعرق کمک می‌کند [۱۲]. نتایج مطالعه حاضر نیز دیدگاه‌های ارزشمندی را درباره قابلیت کاربرد مدل‌های یادگیری ماشین در پیش‌بینی مصرف آب کشاورزی ارائه می‌دهد. عملکرد برتر ماشین بردار پشتیبان نشان‌دهنده توانایی آن در مدل‌سازی روابط پیچیده و غیرخطی، به‌ویژه زمانی است که با ویژگی‌های مهندسی‌شده مانند جملات چندجمله‌ای و اثرات متقابل مرتبه بالاتر تقویت شود. به‌کارگیری اعتبارسنجی متقابل در تنظیم پارامترهای مدل، تعمیم‌پذیری و پایداری آن را تضمین کرده و ماشین بردار پشتیبان را به گزینه‌ای مطلوب برای کاربردهای واقعی در کشاورزی تبدیل کرده است. در مقابل، عملکرد ضعیف جنگل تصادفی و درخت تصمیم را می‌توان به محدودیت‌های ذاتی آن‌ها در پردازش تعاملات پیچیده ویژگی‌ها نسبت داد. جنگل تصادفی با وجود ماهیت ترکیبی، ممکن است به دلیل سادگی یادگیرنده‌های پایه‌ای (درختان تصمیم) و حساسیت به نویز در داده‌ها عملکرد مطلوبی نداشته باشد. روش درخت تصمیم نیز، با وجود تفسیرپذیری بالا، در شناسایی روابط پیچیده ناتوان بوده و در نتیجه مقدار ضریب تعیین پایین‌تر و نرخ خطای بالاتری را ثبت کرده است. مدل گرادیان تقویت‌شده شدید، که به دلیل کارایی بالایش در روش تقویت گرادیانی شناخته می‌شود، عملکرد متوسطی را ارائه داده است. این امر می‌تواند ناشی از عدم بررسی کافی درخت‌های عمیق‌تر و کاهش نرخ یادگیری در تنظیم پارامترها باشد. با این حال، نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که با بهینه‌سازی بیشتر پارامترهای مدل، می‌توان عملکرد آن را بهبود بخشید، که این مدل را به جایگزینی رقابتی تبدیل می‌کند. مدل ترکیبی که پیش‌بینی‌های هر چهار الگوریتم را تلفیق کرده بود، نسبت به جنگل تصادفی، گرادیان تقویت‌شده شدید و درخت تصمیم عملکرد بهتری داشته و موجب کاهش خطاها و افزایش دقت کلی شده است. این یافته با اصول روش‌های ترکیبی همخوانی دارد، زیرا با تجمیع مدل‌های متنوع، نقاط قوت آن‌ها را به‌کار گرفته و ضعف‌های فردی را جبران می‌کند. با این حال، مقدار ضریب تعیین مدل ترکیبی (۰/۴۵) همچنان کمتر از روش ماشین بردار پشتیبان باقی مانده است که نشان می‌دهد کیفیت مدل‌های تشکیل‌دهنده تأثیر بسزایی در موفقیت این رویکرد دارد. از منظر کاربردی، این نتایج اهمیت انتخاب الگوریتم مناسب را برای مدل‌سازی پیش‌بینی در سامانه‌های کشاورزی برجسته می‌کند. در حالی که ماشین بردار پشتیبان از نظر دقت برتری دارد، پیچیدگی محاسباتی آن می‌تواند در پردازش

مجموعه داده‌های بزرگ چالش‌هایی ایجاد کند. در مقابل، مدل‌های ساده‌تر مانند درخت تصمیم تفسیرپذیرتر بوده و گزینه مناسبی برای کاربردهایی هستند که به شفافیت بیشتری نیاز دارند. مطالعات آینده می‌توانند با به‌کارگیری داده‌های واقعی کشاورزی، آزمایش تکنیک‌های پیشرفته انتخاب ویژگی، و ادغام الگوریتم‌های یادگیری ماشین، یافته‌های این پژوهش را توسعه دهند. علاوه بر این، بررسی روش‌های ترکیبی مانند استکینگ یا میانگین وزنی می‌تواند قابلیت اطمینان پیش‌بینی را افزایش دهد. چنین تحقیقاتی نقش مهمی در توسعه سامانه‌های هوشمند برای مدیریت پایدار منابع آب کشاورزی ایفا خواهند کرد.

۴ نتیجه گیری

این مطالعه نشان داد که انتخاب الگوریتم مناسب تأثیر زیادی بر دقت و کارایی پیش‌بینی مصرف آب کشاورزی دارد. ماشین بردار پشتیبان عملکرد بهتری در مدل‌سازی روابط پیچیده نشان داد، در حالی که جنگل تصادفی و درخت تصمیم دقت پایین‌تری داشتند. مدل ترکیبی با تلفیق پیش‌بینی‌های الگوریتم‌ها موجب کاهش خطا و افزایش دقت شد، اما همچنان به عملکرد ماشین بردار پشتیبان نرسید. از منظر کاربردی، انتخاب یک مدل پیش‌بینی مناسب باید با توجه به نیازهای خاص سیستم‌های کشاورزی انجام شود، زیرا روش‌های دقیق‌تر پیچیدگی محاسباتی بالاتری دارند. تحقیقات آینده می‌توانند با ترکیب الگوریتم‌های یادگیری ماشین و داده‌های واقعی، پیش‌بینی مصرف آب را بهبود دهند و به مدیریت پایدار منابع آب کمک کنند. همچنین، استفاده از روش‌های ترکیبی پیشرفته ممکن است قابلیت اطمینان پیش‌بینی را افزایش دهد و راهکارهای هوشمندانه‌ای را برای مدیریت پایدار منابع آب کشاورزی ارائه دهد. این مسیرها می‌توانند به توسعه ابزارهای دقیق‌تر و مؤثرتری برای سیاست‌گذاری و تصمیم‌گیری در زمینه مدیریت منابع آب کمک کنند.

مراجع

[1] Cosgrove, W. J. and Loucks, D. P. (2015). Water management: Current and future challenges and research directions. *Water Resources Research*, 51(6), 4823–4839.

[2] cDonald, R. I., Weber, K., Padowski, J., Flörke, M., Schneider, C., Green, P. A., Gleeson, T., Eckman, S., Lehner, B., Balk, D., Boucher, T., Grill, G. and Montgomery, M. (2014). Water on an urban planet: Urbanization and the reach of urban water infrastructure. Global environmental change, 27, .96-105

[3] nsari, H. and Azimi, N. (2012). Studying the effect of deficit irrigation and different nitrogen levels on some qualitative and quantitative characteristics of turfgrasses. Research Centre of Mashhad Islamic Council. Mashhad. Iran, 11p.

[4] ada, Y., Flörke, M., Hanasaki, N., Eisner, S., Fischer, G., Tramberend, S., Satoh, Y., Van Vliet, M., Yillia, P. and Ringler, C. J. G. M. D. (2016). Modeling global water use for the 21st century: the water futures and solutions (WFAS) initiative and its approaches. Geoscientific Model Development, 9(1), 175–222.

[5] itamori, K., Manders, T., Dellink, R. and Tabeau, A. A. (2012). OECD Environmental Outlook to 2050: The Consequences of Inaction; OECD: Paris, France.

[6] fister, S., Bayer, P., Koehler, A. and Hellweg, S. (2011). Projected water consumption in future global agriculture: Scenarios and related impacts. Science of the Total Environment, 409(20), 4206–4216.

[7] Kuhn, M. and Johnson, K. (2013). Applied Predictive Modeling, Vol. 26. New York, NY: Springer. p. 13.

[8] Adamowski, J. and Karapataki, C. (2010). Comparison of multivariate regression and artificial neural networks for peak urban water-demand forecasting: evaluation of different ANN learning algorithms. Journal of Hydrologic Engineering, 15(10), 729–743.

[9] Lee, D. and Derrible, S. (2020). Predicting residential water demand with machine-based statistical learning. Journal of Water Resources Planning and Management, 146(1), 04019067.

[10] Elbeltagi, A., Srivastava, A., Kushwaha, N. L., Juhász, C., Tamás, J. and Nagy, A. (2022). Meteorological data fusion approach for modeling crop water productivity based on ensemble machine learning. Water, 15(1), 30.

[11] Babaeian, E., Paheding, S., Siddique, N., Devabhaktuni, V. K. and Tuller, M. (2021). Estimation of root zone soil moisture from ground and remotely sensed soil information with multisensor data fusion and automated machine learning. Remote sensing of environment, 260, 112434.

[12] Kar, S., Purbey, V. K., Suradhaniwar, S., Korbu, L. B., Kholová, J., Durbha, S. S., Adinarayana, J. and Vadez, V. (2021). An ensemble machine learning approach for determination of the optimum sampling time for evapotranspiration assessment from high-throughput phenotyping data. Computers and Electronics in Agriculture, 182, 105992.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

استفاده از الگوریتم رقابت استعماری ترکیبی برای حل مسئله جدول زمانی امتحانات دانشگاه

سید وحید جلالی [۱] مهدی یداللهی [۲]

[۱,۲] گروه مهندسی کامپیوتر، واحد آیت الله آملی، دانشگاه آزاد اسلامی، آمل، ایران

چکیده

مسئله جدول زمانی امتحانات، از جمله مسائل با پیچیدگی بالا می‌باشد که دانشگاه‌ها و مدارس بارها در طول سال با آن درگیر می‌باشند. این مسئله شامل زمانبندی امتحانات دروس در تعدادی کلاس مشخص با بازه‌های زمانی محدود می‌باشد به‌صورتی که مجموعه‌ای از محدودیت‌ها را برآورده کند. تاکنون روش‌های زیادی برای حل این مسئله ارائه شده است. در این مقاله یک روش جدید برای حل مسئله جدول زمانی امتحانات دانشگاه با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری ترکیب شده با جستجوی ممنوع ارائه شده است. نتایج حاصل از روش پیشنهادی روی داده‌های استاندارد با دیگر الگوریتم‌ها مقایسه شده و نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که روش ارائه شده در مقایسه با دیگر روش‌ها به پاسخ‌های بهتری دست می‌یابد.

کلمات کلیدی: جدول زمانی امتحانات دانشگاه، الگوریتم جستجوی ممنوع، الگوریتم رقابت استعماری

۱ مقدمه

مسائل جدول زمانی[۱] از جمله مسائل ترکیبی سخت[۲] هستند که بطور پیوسته توسط دانشگاه‌ها، بیمارستان‌ها، مدارس و ... به کار می‌روند. حل این مسائل فرایندی زمان‌بر و پیچیده بوده و ارایه راه‌حل‌های اتومات و بهینه برای حل آن‌ها بسیار ارزشمند می‌باشد [۱]. مسئله جدول زمانی امتحانات[۳] از جمله مسائل زمانبندی است که دانشگاه‌ها و مدارس سراسر جهان در طول سال، بارها با آن دست و پنجه نرم می‌کنند [۲]. در این مسئله هدف اختصاص امتحانات دانشجویان به تعدادی بازه زمانی و منبع است به‌طوری‌که یک سری محدودیت‌ها برآورده شود [۳]. این محدودیت‌ها را می‌توان به‌طور کلی به دو دسته محدودیت‌های سخت و محدودیت‌های نرم تقسیم نمود. محدودیت‌های سخت آن دسته از محدودیت‌ها هستند که حتماً باید رعایت شوند و عدم رعایت این محدودیت‌ها منجر به راه‌حل‌های غیرمعتبر می‌شود. بنابراین محدودیت‌های سخت در هیچ حالتی نباید نقض شوند. اما محدودیت‌های نرم، محدودیت‌هایی

[1] vahid.jalali@iau.ac.ir
[2] mahdi.yadollahi@iau.ac.ir
[1] Time Tabling
[2] NP-Hard
[3] Exam Time Tabling

هستند که در صورت برآورده شدن، کیفیت راه‌حل را افزایش می‌دهد. و عدم رعایت آنها جواب‌ها را بی‌اعتبار نمی‌کند [۴].
تاکنون روش‌های ابتکاری مختلفی برای حل این مسئله ارائه شده است از جمله: حل مسئله جداول زمانی با استفاده از الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده [۱]، جستجوی محلی [۵، ۶]، حل مسئله جداول زمانی با استفاده از الگوریتم ژنتیک [۷، ۸].
الگوریتم ژنتیک[۴] دارای معایبی از جمله حرکت کند به سمت بهینه سراسری است، برای رفع این مشکل می‌توان از استراتژی ترکیب الگوریتم ژنتیک با یکی از روش‌های جستجوی محلی استفاده کرد که اغلب الگوریتم ممتیک نامیده می‌شود [۹]. در این مقاله از ترکیب الگوریتم رقابت استعماری[۵] با الگوریتم جستجوی ممنوع[۶] برای حل مساله جدول زمانی امتحانات دانشگاه استفاده شده است.
ساختار ادامه مقاله به‌صورت زیر است: در بخش دوم شرح مسئله بیان شده است در بخش سوم مراحل انجام الگوریتم پیشنهادی بیان شده است و در بخش چهارم نتایج تجربی و مقایسه الگوریتم پیشنهادی با دیگر الگوریتم‌های موجود آمده است در بخش پنجم نیز نتیجه‌گیری بیان شده است.

۲ شرح مسئله

مسئله زمان‌بندی امتحانات دانشگاهی به تخصیص مجموعه‌ای از امتحانات به بازه‌های زمانی محدود و مکان‌های محدود گفته می‌شود، به‌طوری‌که همه‌ی محدودیت‌های مورد نیاز رعایت شوند. از آنجاکه زمان‌بندی امتحانات در محیط دانشگاهی با منابع محدودی مانند تعداد بازه زمانی امتحان و ظرفیت کلاس‌ها سر و کار دارد، این مسئله یک مسئله‌ی بهینه‌سازی ترکیبی پیچیده محسوب می‌شود و بطور کلی در رده مسائل سخت قرار می‌گیرد. و اهمیت این مسئله به این دلیل است که یک جدول زمانی مناسب علاوه بر جلوگیری از تداخل امتحانات، موجب استفاده بهینه از منابع آموزشی و رضایت دانشجویان و اساتید می‌شود.
بطور کلی در مسایل جدول زمانی دو نوع محدودیت وجود دارد. محدودیت سخت و محدودیت نرم. محدودیت سخت به محدودیتی گفته می‌شود که حتماً باید در راه‌حل ارائه شده در نظر گرفته شود و نقص این محدودیت نباید اتفاق بیافتد. اما محدودیت نرم به کیفیت راه‌حل ارائه شده مربوط می‌شود و نقص آن، اعتبار راه‌حل را از بین نمی‌برد. یکی از مهم‌ترین محدودیت‌های سخت در زمان‌بندی امتحانات، جلوگیری از تداخل زمانی امتحانات درسی یک دانشجو است. به‌عبارت دیگر، هیچ دانشجویی نباید هم‌زمان در دو امتحان شرکت کند. تداخل منبع نیز دیگر محدودیت سخت این مسئله است به‌عبارت دیگر هیچگاه نباید دو امتحان در یک بازه زمانی در یک کلاس برگزار شوند. زیرا هر کلاس دارای ظرفیت مشخص و محدودی است [۱۱]. در نتیجه می‌توان گفت که مهمترین مسئله در حل مسئله جدول

[4] Genetic Algorithm
[5] Imperialist Competitive Algorithm
[6] Tabo Search

جدول ۱: فرموله کردن مسئله جدول زمانی امتحانات دانشگاه

کلاس‌ها از مجموعه‌ای	$R = \{r_1, r_2, ..., r_m\}$
زمانی) دوره ۳ روز هر و روز ۱۰ (زمانی بازه‌های از مجموعه‌ای	$T = \{t_1, t_2, ..., t_{30}\}$
امتحانات مجموعه‌ای	$E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$
دانشجویان از مجموعه‌ای	$S = \{s_1, s_2, ..., s_p\}$
آزمایشگاه) (کلاس، کلاس‌ها انواع	$W = \{w_1, w_2\}$
می‌شود. برگزار j زمانی دوره و i اتاق در x_{ij} امتحان می‌دهد نشان که ماتریس یک	$X_{m*30} = \{x_{ij}\}$
دراد. برگزاری برای خاص ویژگی با کلاسی به نیاز امتحان هر	برای هر $\implies w_j \in W \; e_i \in E$
دارد خاصی ویژگی کلاس هر	برای هر $\implies w_j \in W \; r_i \in R$
کند. شرکت امتحانات از مجموعه‌ای در باید دانشجو هر	برای هر $\implies E' \subseteq E \;\; s_i \in S$

زمانی، محدودیت‌ها است که به دو گروه تقسیم می‌شوند: محدودیت‌های سخت و محدودیت‌های نرم. محدودیت‌های سخت عبارتند از:

۱. تداخل امتحان (h_1): در یك بازه زمانی هر دانشجو حداکثر می‌تواند یک امتحان داشته باشد.

۲. اتاق مناسب (h_2): هر امتحان باید در یک اتاق مناسب برگزار شود.

۳. تداخل اتاق (h_3): در یك بازه زمانی در هر اتاق، حداکثر یک امتحان می‌تواند برگزار شود.

محدودیت‌های نرم عبارتند از:

۱. دانشجو در یک حداکثر یک امتحان داشته باشد. (O_1)

۲. فاصله بین بازه‌های امتحانی هر دانشجو حداقل یک روز باشد. (O_2)

فرموله کردن مسئله امتحانات دانشگاه در جدول ۴ بیان شده است. در این جدول مقادیر R, T, E, S, W به‌عنوان ورودی داده می‌شود و هدف بدست آورن مقادیر ماتریس X است.

۳ الگوریتم پیشنهادی

در این مقاله یک روش جدید برای حل مسئله جدول زمانی دانشگاه با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری ترکیب شده با الگوریتم جستجوی ممنوع ارائه شده است. جزییات روش پیشنهادی عبارتند از:

۱.۳ ساختار کشور

در الگوریتم پیشنهادی هر کشور (راه‌حل) یک جدول زمانی مشخص برای حل مسئله می‌باشد. که به‌صورت آرایه‌ای به طول تعداد امتحانات نمایش داده می‌شود. هر خانه این آرایه به‌صورت ERT

جدول ۲: ساختار یک کشور نمونه

–	۶۳۱	۳۱۵	۲۹۴	۴۱۸	۸۳۷

است که E امتحان و T اتاق مورد نظر برای برگزاری امتحان و T بازه زمانی برگزاری امتحان را نشان می‌دهد. جدول ۲ ساختار یک کشور نمونه را نشان می‌دهد. برای مثال خانه اول ارائه این کشور ۸۳۷ است یعنی امتحان ۸ در بازه زمانی هفتم در منبع سوم برگزار می‌شود.

۲.۳ تابع هدف

در الگوریتم پیشنهادی هدف اختصاص امتحانات به بازه‌های زمانی و منابع است به‌صورتی که حداکثر تعداد محدودیت‌های سخت و نرم برآورده گردند. در نتیجه برای سنجش کیفیت هر راه‌حل از رابطه (۱) به عنوان تابع هدف روش پیشنهادی استفاده شده است. در واقع برای هر راه‌حل (کشور)، به‌ازای هر نقص محدودیت مقداری پنالتی به شایستگی آن راه‌حل افزوده می‌شود، مقدار پنالتی بر حسب میزان اهمیت محدودیت مشخص می‌شود و قابل تغییر است به‌عبارت دیگر هر چه قدر برآوردن یک محدودیت مهم‌تر باشد مقدار پنالتی در نظر گرفته شده در صورت برآورده نشدن آن نیز بیشتر می‌باشد.

$$Fit = \sum_{i=۱}^{a} Ph_۱Ch_۱ + \sum_{i=۱}^{b} PO_iCO_i \qquad (۱)$$

در این رابطه a تعداد محدودیت‌های سخت و b تعداد محدودیت‌های نرم در نظر گرفته شده برای مسئله است. همچنین ph_i میزان پنالتی نقص محدودیت سخت h_iام، Ch_i تعداد نقض محدودیت سخت h_iام، Po_i میزان پنالتی نقص محدودیت نرم o_i ام و Co_i تعداد نقض محدودیت نرم o_iام است.
در این مقاله سه محدودیت سخت (تداخل امتحان، تداخل کلاس و مناسب بودن کلاس) و دو محدودیت نرم (حداقل یک روز فاصله بین امتحانات یک دانشجو باشد و تعداد روزهای درگیر در امتحانات حداقل باشد) برای جدول زمانی امتحانات دانشگاه در نظر گرفته شده است.

۳.۳ ایجاد امپراطوری

برای تشکیل امپراطوری ابتدا تعدادی کشور تولید می‌شود. سپس شایستگی هر کشور بر اساس تابع هدف محاسبه می‌گردد. در مرحله بعد به تعداد امپراطوری‌ها، کشورهایی که دارای بهترین مقدار تابع هدف هستند را انتخاب می‌کنیم و هر کشور انتخاب شده، به‌عنوان استعمارگر یک امپراطوری در نظر گرفته می‌شود سپس کشورهای باقیمانده را به‌عنوان مستعمره به‌صورت تصادفی به امپراطوری‌های مختلف اختصاص می‌دهیم. در روش پیشنهادی تلاش می‌شود تعداد مستعمره‌های هر امپراطوری برابر باشند.

جدول ۳: اعمال الگوریتم جستجوی ممنوع

–	۶۳۳	۳۱۹	۲۹۵	۴۱۲	۸۳۴

۴.۳ عملیات جذب

در عملیات جذب براساس نرخ جذب یک مستعمره به سمت استعمارگر خود حرکت می کند. برای این منظور بیست درصد مقادیر خانه‌های مستعمره با مقادیر خانه‌های تصادفی استعمارگر جابجا می‌شود. در نهایت اگر مقدار تابع هدف مستعمره بیشتر از استعمارگر شد جای مستعمره و استعمارگر را جابجا می‌کنیم.

۵.۳ عملیات انقلاب

در عملیات انقلاب براساس نرخ انقلاب یک مستعمره انتخاب شده و سی و پنج درصد مقادیر خانه‌های مستعمره دوباره با داده‌های تصادفی پر می‌شود. سپس اگر مقدار تابع هدف مستعمره بیشتر از استعمارگر شد جای مستعمره و استعمارگر را جابجا می‌کنیم.

۶.۳ اعمال الگوریتم جستجوی ممنوع

در روش پیشنهادی از الگوریتم جستجوی ممنوع برای کاوش بیشتر فضای حل مساله استفاده شده است. بهعبارت دیگر الگوریتم جستجوی ممنوع سعی می‌کند امتحانات را در بازه‌های بهتری قرار دهد تا حداکثر تعداد محدودیت‌ها براورده گردند. برای این منظور الگوریتم جستجوی ممنوع برای هر کشور بازه‌های اختصاص داده شده به هر امتحان را تغییر می‌دهد تا فضای بیشتری از مسئله کاوش گردد. جدول ۳ اعمال الگوریتم جستجوی ممنوع را نشان می‌دهد.

۷.۳ عملیات رقابت برون گروهی

در این مرحله ضعیف‌ترین مستعمره از ضعیف‌ترین امپراطوری انتخاب شده و به یک امپراطوری تصادفی منتقل می‌گردد. سپس اگر امپراطوری فاقد مستعمره‌ای بود آن را حذف می‌کنیم.

۸.۳ شرط خاتمه روش پیشنهادی

روش پیشنهادی تا زمان باقی ماندن فقط یک امپراطوری اجرا می‌شود و در نهایت استعمارگر تنها امپراطوری باقیمانده به‌عنوان بهترین جواب روش پیشنهادی در نظر گرفته می‌شود و الگوریتم خاتمه می‌یابد.

جدول ۴: نتایج حاصل از مقایسه الگوریتم‌ها روی داده‌های تست استاندارد کارتر

Data Set	SCHH[۱۲]	SPHH[۱۳]	GCHH[۱۴]	GPHH[۱۵]	TTICA
car-f-۹۲ I	۳٫۹۳	۴٫۳۲	۴٫۲۸	۴٫۰۰	۳٫۹۲
car-s-۹۱ I	۴٫۵۰	۴٫۹۷	۴٫۹۷	۴٫۶۲	۴٫۵۵
ear-f-۸۳ I	۳۳٫۷۱	۳۶٫۱۶	۳۶٫۸۶	۳۴٫۷۱	۳۴٫۴۴
hes-s-۹۲ I	۱۰٫۸۳	۱۱٫۶۱	۱۱٫۸۵	۱۰٫۶۸	۱۰٫۵۹
kfu-s-۹۳	۱۳٫۸۲	۱۵٫۰۲	۱۴٫۶۲	۱۳	۱۳٫۱۷
lse-f-۹۱	۱۰٫۳۵	۱۰٫۹۶	۱۱٫۱۴	۱۰٫۱۱	۱۰٫۵۸
pur-s-۹۳ I	–	–	۴٫۷۳	۴٫۸۳	۴.۷۲
rye-s-۹۳	۸٫۵۳	–	۹٫۶۵	۱۰٫۷۹	۸٫۵۳
sta-f-۸۳ I	۱۵۱٫۵۲	۱۶۱٫۹۱	۱۵۸٫۳۳	۱۵۸٫۰۲	۱۵۲٫۷۱
tre-s-۹۲	۷٫۹۲	۸٫۹۲	۸٫۴۸	۷٫۹۰	۷٫۸۹
uta-s-۹۲ I	۳٫۴۱	۳٫۳۶	۳٫۴	۳٫۱۲	۳٫۱۵
ute-s-۹۲ I	۲۵٫۳۹	۲۷٫۴۱	۲۸٫۸۸	۲۶	۲۵٫۶۷
yor-f-۸۳ I	۳۶٫۵۳	۴۰٫۷۷	۴۰٫۷۴	۳۶٫۲	۳۵٫۹۶

۴ نتایج پیاده‌سازی

روش پیشنهادی با زبان برنامه‌نویسی پایتون پیاده‌سازی شده و بر روي يك كامپيوتر با پردازنده پنتيوم $Corei۷$ با ۱۶ گیگابایت حافظه اصلي اجرا شده است.
برای ارزیابی کارائی الگوریتم پیشنهادی $(TT-HICA)$ از داده های تست استاندارد کارتر و $(TT-HICA)$ استفاده شده است. داده های تست کارتر شامل ۱۳ مجموعه داده تست و داده های تست $ITC۲۰۰۷$ شامل هشت مجموعه داده تست می باشد.
جدول ۴ نتایج حاصل از مقایسه الگوریتم‌ها روی داده‌های تست استاندارد کارتر را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود الگوریتم پیشنهادی در شش داده تست به جواب‌های بهتری در مقایسه با دیگر الگوریتم دست می‌یابد.

جدول ۵ مقایسه نتایج حاصل از الگوریتم‌ها روی داده‌های تست استاندارد $ITC۲۰۰۷$ را نشان می‌دهد همانطور که مشاهده می‌شود الگوریتم پیشنهادی در دو داده تست نسبت به دیگر الگوریتم‌ها به جواب‌های بهتری می‌رسد.
این نتایج نشان‌دهنده کارایی بالاتر روش پیشنهادی می‌باشد که دلیل آن استفاده از الگوریتم جستجوی ممنوع در ترکیب با الگوریتم رقابت استعماری است. که موجب شده فضای حل مسئله بهتر کاوش شده و نتایج بهتری بدست آید.

جدول ۵: مقایسه نتایج حاصل از الگوریتم‌ها روی داده‌های تست استاندارد ITC۲۰۰۷

Data Set	Pillay[۱۶]	Sabar et al.[۱۷]	Soghier and Qu[۱۸]	Anwar et al.[۱۹]	TTICA
Dataset۱	۸۵۵۹	۶۲۳۴	۵۷۵۲	۱۱۸۲۳	۵۹۰۴
Dataset۲	۸۵۵۹	۶۲۳۴	۵۷۵۲	۱۱۸۲۳	۵۹۰۴
Dataset۳	۱۱۵۷۶	۱۳۰۰۲	۱۴۵۸۶	۲۶۷۷۰	۱۱۳۸۰
Dataset۴	۲۱۹۰۱	۱۷۹۴۰	۲۱۴۹۱	–	۱۸۲۱۹
Dataset۵	۳۹۶۹	۳۹۰۰	۳۸۴۴	۶۸۷۲	۳۹۲۱
Dataset۶	۲۸۳۴۰	۲۷۰۰۰	۲۸۸۴۰	۳۰۹۸۰	۲۷۷۱۱
Dataset۷	۸۱۶۷	۶۲۱۴	۵۱۸۲	۱۱۷۶۲	۵۳۷۵
Dataset۸	۱۲۶۵۸	۸۵۵۲	۱۳۷۱۱	۱۶۲۸۶	۸۳۲۹

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش جدید برای حل مسئله جدول زمانی امتحانات دانشگاه با استفاده از ترکیب الگوریتم رقابت استعماری با الگوریتم جستجوی ممنوع $(TT-HICA)$ پیشنهاد شده است. برای ارزیابی کارایی، روش پیشنهادی روی داده‌های تست استاندارد اجرا شده و نتایج حاصل از شبیه‌سازی روش پیشنهادی با چهار الگوریتم دیگر مقایسه گردید. نتایج نشان داد روش پیشنهادی در هشت داده از ۲۱ داده تست توانست نتایج بهتری را در مقایسه با دیگر روش‌ها بدست آورد. که نشان‌دهنده کارایی بالاتر روش پیشنهادی می‌باشد که دلیل آن استفاده از الگوریتم جستجوی ممنوع در ترکیب با الگوریتم رقابت استعماری است. این ترکیب موجب شده تا فضای حل مسئله بهتر کاوش شده و نتایج بهتری بدست آید.

مراجع

[1] N. Leite, F. Melício, and A. C. Rosa, "A fast simulated annealing algorithm for the examination timetabling problem," Expert Systems with Applications, vol. 122, pp. 137–151, 2019.

[2] A. E. Eiben and J. E. Smith, Introduction to evolutionary computing. Springer, 2003.

[3] M. A. Al-Betar, "A β -hill climbing optimizer for examination timetabling problem," Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, vol. 12, no. 1, pp. 653–666, 2021.

[4] S. N. Tung, J. B. Jaafar, I. A. Aziz, H. G. Nguyen, and A. N. Bui, "Genetic Algorithm for Solving Multi-Objective Optimization in Examination

Timetabling Problem," International Journal of Emerging Technologies in Learning, vol. 16, no. 11, 2021.

[5] B. Paechter, "A local search for the timetabling problem," in Proceedings of the 4th PATAT, 2002, pp. 21–23.

[6] E. K. Burke, G. Kendall, and E. Soubeiga, "A tabu-search hyperheuristic for timetabling and rostering," Journal of heuristics, vol. 9, no. 6, pp. 451–470, 2003.

[7] E. K. Burke and J. P. Newall, "A multistage evolutionary algorithm for the timetable problem," IEEE transactions on evolutionary computation, vol. 3, no. 1, pp. 63–74, 1999.

[8] P. Moscato, "Memetic algorithms: A short introduction," New ideas in optimization, pp. 219–234, 1999.

[9] Y.-S. Ong, M.-H. Lim, N. Zhu, and K.-W. Wong, "Classification of adaptive memetic algorithms: a comparative study," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), vol. 36, no. 1, pp. 141–152, 2006.

[10] E. S. K. Siew, S. L. Goh, G. Kendall, N. R. Sabar, and S. Abdullah, "A survey of solution methodologies for exam timetabling problems," IEEE Access, vol. 12, pp. 41479–41498, 2024.

[11] A. K. Mandal, M. N. M. Kahar, and G. Kendall, "Addressing examination timetabling problem using a partial exams approach in constructive and improvement," Computation, vol. 8, no. 2, p. 46, 2020.

[12] Y. Yang and S. Petrovic, "A novel similarity measure for heuristic selection in examination timetabling," in International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling, 2004: Springer, pp. 247–269.

[13] E. K. Burke, R. Qu, and A. Soghier, "Adaptive selection of heuristics for improving exam timetables," Annals of Operations Research, vol. 218, no. 1, pp. 129–145, 2014.

[14] E. K. Burke and J. P. Newall, “Solving examination timetabling problems through adaption of heuristic orderings,” Annals of operations Research, vol. 129, no. 1-4, pp. 107–134, 2004.

[15] N. R. Sabar, M. Ayob, G. Kendall, and R. Qu,“Grammatical evolution hyper-heuristic for combinatorial optimization problems,” IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 17, no. 6, pp. 840–861, 2013.

[16] N. Pillay, “Evolving hyper-heuristics for a highly constrained examination timetabling problem,” in Proceedings of the 8th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling (PATAT’10), 2010, pp. 336–346.

[17] N. R. Sabar, M. Ayob, R. Qu, and G. Kendall, “A graph coloring constructive hyper-heuristic for examination timetabling problems,” Applied Intelligence, vol. 37, no. 1, pp. 1–11, 2012.

[18] A. Soghier and R. Qu,“Adaptive selection of heuristics for assigning time slots and rooms in exam timetables,” Applied Intelligence, vol. 39, no. 2, pp. 438–450, 2013.

[19] K. Anwar, A. T. Khader, M. A. Al-Betar, and M. A. Awadallah, “Harmony search-based hyper-heuristic for examination timetabling,” in 2013 IEEE 9th International Colloquium on Signal Processing and its Applications, 2013: IEEE, pp. 176–181.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

ارائه یک روش جدید برای زمانبندی سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری ترکیبی

سید وحید جلالی [۱]

[۱] گروه مهندسی کامپیوتر، واحد آیت الله آملی، دانشگاه آزاد اسلامی، آمل، ایران

چکیده

زمانبندی سیستم‌های تولید یکی از مهمترین مسایل زمانبندی می‌باشد که در آن هر کار از مجموعه‌ای از عملیات تشکیل می‌شود که باید به ترتیب اجرا شوند. تعیین توالی انجام عملیات و تخصیص ماشین مناسب به هر یک از عملیات، دو مسئله مهمی است که در زمانبندی سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر با آن روبرو هستیم. هدف این مسئله کمینه‌سازی زمان اتمام تمام کارها می‌باشد. این مسئله به علت محدودیت‌های زیاد و فضای حل بسیار بزرگ از رده مسائل سخت بوده و تاکنون الگوریتم‌های زیادی برای حل آن با استفاده از روش‌های فراابتکاری ارائه شده است. در این مقاله یک روش جدید با استفاده از ترکیب الگوریتم رقابت استعماری با الگوریتم جستجوی ممنوع برای زمانبندی سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر ارائه شده است. برای ارزیابی نتایج روش پیشنهادی با دو الگوریتم دیگر مقایسه شده و نتایج تجربی نشان می‌دهد، الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با دیگر الگوریتم‌های ارائه شده، دارای کارایی بیشتری است.

کلمات کلیدی: سیستم‌های تولید انعطاف پذیر، زمانبندی، الگوریتم رقابت استعماری، الگوریتم جستجوی ممنوع

۱ مقدمه

مسئله زمانبندی سیستم های تولید انعطاف‌پذیر (FMS)[۱] یکی از مشهورترین انواع مسئله‌های زمانبندی سیستم‌های تولید است که در سال‌های اخیر توجهات زیادی را به خود جلب کرده است. زمانبندی سیستم‌های تولید انعطاف پذیر اغلب با دو مساله تعریف می‌شود مسئله اول توالی انجام عملیات و مسئله دوم اختصاص ماشین مناسب به عملیات است. هدف این مساله کاهش زمان لازم برای انجام تمام کارها یا طول زمانبندی می‌باشد [۱]. این مسئله از رده مسائل NP-hard است و استفاده از روش‌های کلاسیک برای بدست آوردن جواب بهینه در این مسائل دارای پیچیدگی زمانی بالایی است و در برخی از موارد غیرممکن است. بنابراین برای حل این مسائل بیشتر از روش‌های فراابتکاری استفاده می‌شود. از جمله: زمانبندی با جستجوی حرام (TS)[۲] [۲]، زمانبندی باکلونی مورچگان(ACO)[۳]،

[1] vahid.jalali@iau.ac.ir
[1] Flexible Manufacturing System
[2] Tabu Search
[3] Ant Colony Optimization

زمانبندی با الگوریتم ژنتیک(GA)[۴] [۴، ۵، ۶] و زمانبندی با ترکیب الگوریتم ژنتیک و پتری نت[۵] [۷، ۸، ۹].
در این مقاله یک روش جدید با استفاده از ترکیب الگوریتم رقابت استعماری [۱۰] با الگوریتم جستجوی ممنوع برای زمانبندی سیستم های تولید انعطاف‌پذیر (FMS_HICA) ارائه شده است. که هدف آن کمینه کردن زمان اجرای تمام کارها است. ساختار ادامه مقاله به‌صورت زیر است: در بخش دوم سیستم‌های تولید انعطاف پذیر شرح داده شده است. در بخش سوم مراحل انجام الگوریتم پیشنهادی بیان شده است و در بخش چهارم نتایج تجربی و مقایسه الگوریتم پیشنهادی با دیگر الگوریتم‌های موجود آمده است در بخش پنجم نیز نتیجه گیری بیان شده است.

۲ سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر

یک سیستم تولید انعطاف‌پذیر شامل مجموعه‌ای از کارها (J) کارهاست که در آن هر کار از مجموعه‌ای از عملیات تشکیل شده و برای انجام هر عملیات نیاز به تخصیص یک ماشین است.
محدودیت‌های سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر:

۱. انجام هر عملیات تنها زمانی می‌تواند شروع شود که عملیات قبلی آن تمام شود.

۲. یک عملیات پس از شروع و قبل از اتمام هیچ وقفه‌ای را نمی‌پذیرد.

۳. یک عملیات در هر لحظه تنها می‌تواند توسط یک ماشین انجام شود.

۴. یک ماشین در هر لحظه تنها می‌تواند یک عملیات را انجام دهد.

جدول ۴، یک سیستم تولید انعطاف‌پذیر نمونه را نشان می‌دهد. برای نمونه در این سیستم عملیات اول کار دوم در ماشین اول به دو ثانیه زمان برای اجرا نیاز دارد و در ماشین دوم به چهار ثانیه زمان برای اجرا نیاز دارد.

۳ روش پیشنهادی

در این مقاله با استفاده از ترکیب الگوریتم رقابت استعماری با الگوریتم جستجوی ممنوع یک روش جدید برای حل مسئله زمانبندی سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر ارائه شده است. جزییات روش پیشنهادی در بخش‌های زیر شرح داده شده است.

- **ساختار کشور**

در الگوریتم پیشنهادی هر کشور یک راه‌حل مسئله می‌باشد [۱۱]. به عبارت دیگر هر کشور یک

[4] Genetic Algorithm
[5] Petri Net

جدول ۱: یک سیستم تولید انعطاف‌پذیر نمونه

Lob ۱ Oper	ماشین	اجرا زمان	Lob ۲ Oper	ماشین	اجرا زمان
$O_۱$	۱	۴	$O_۱$	۱	۱۲
$O_۱$	۲	۳	$O_۱$	۲	۶
$O_۲$	۲	۴	$O_۲$	۲	۴
$O_۲$	۳	۷	$O_۳$	۲	۶
$O_۳$	۲	۶	$O_۴$	۳	۷
$O_۳$	۳	۴	$O_۴$	۲	۳
$O_۴$	۳	۶	$O_۵$	۳	۶

جدول ۲: ساختار یک کشور نمونه

–	۲۲	۱۳	۱۲	۲۱	۱۱

زمانبندی مشخص برای حل مسئله را نشان می‌دهد. برای این منظور، یک کشور با آرایه‌ای به طول مجموع تمام عملیات کارها نشان داده می‌شود که هر خانه آن بصورت JM مقداردهی می‌گردد در این روش نمایش کشور، M، نشان‌دهنده ماشین و J نشان‌دهنده کار مورد نظر هست. از طرف دیگر تعداد دفعات تکرار یک کار شماره عملیات آن کار را نشان می‌دهد. جدول ۲ ساختار یک کشور نمونه را نشان می‌دهد. برای مثال خانه اول این کشور ۱۱ است. یعنی عملیات اول کار اول در ماشین اول انجام شود همچنین خانه سوم کشور ۱۲ است یعنی عملیات دوم کار اول در ماشین دوم انجام شود.

- **تابع هدف**

در الگوریتم پیشنهادی هدف اجرا تمام کارها در کمترین زمان ممکن است در نتیجه تابع هدف برابر زمان اتمام تمام کارها در نظر گرفته شده است.

- **ایجاد امپراطوری**

برای تشکیل امپراطوری ابتدا تعدادی کشور تولید می‌شود. سپس شایستگی هر کشور بر اساس تابع هدف محاسبه می گردد. در مرحله بعد به تعداد امپراطوری ها، کشورهایی که دارای بهترین مقدار تابع هدف هستند را انتخاب می کنیم و هر کشور انتخاب شده، به عنوان استعمارگر یک امپراطوری در نظر گرفته می شود سپس کشورهای باقیمانده را به عنوان مستعمره به صورت تصادفی به امپراطوری های مختلف اختصاص می دهیم. در روش پیشنهادی تلاش می شود تعداد مستعمره های هر امپراطوری برابر باشند.

جدول ۳: اعمال الگوریتم جستجوی ممنوع روی کشور نمونه جدول ۲

–	۲۲	۱۳	۱۳	۲۲	۱۲

- **عملیات جذب**

در عملیات جذب بر اساس نرخ جذب یک مستعمره به سمت استعمارگر خود حرکت می‌کند. برای این منظور بیست درصد مقادیر خانه‌های مستعمره با مقادیر خانه‌های تصادفی استعمارگر جابجا می‌شود. در نهایت اگر مقدار تابع هدف مستعمره بیشتر از استعمارگر شد جای مستعمره و استعمارگر را جابجا می‌کنیم.

- **عملیات انقلاب**

در عملیات انقلاب بر اساس نرخ انقلاب یک مستعمره انتخاب شده و سی و پنج درصد مقادیر خانه‌های مستعمره دوباره با داده‌های تصادفی پر می‌شود. سپس اگر مقدار تابع هدف مستعمره بیشتر از استعمارگر شد جای مستعمره و استعمارگر را جابجا می‌کنیم.

- **اعمال الگوریتم جستجوی ممنوع**

در الگوریتم پیشنهادی هدف از اعمال الگوریتم جستجوی ممنوع، اختصاص مناسب‌تر ماشین‌ها به عملیات زمانبندی شده است. در نتیجه در این مرحله تلاش می‌شود تا با تغییر در شماره ماشین هر یک از خانه‌های کشور، ماشین‌های مناسب‌تری به عملیات اختصاص یابد. جدول ۳ اعمال الگوریتم جستجوی ممنوع را نشان می‌دهد.

- **عملیات رقابت برون گروهی**

در این مرحله ضعیف‌ترین مستعمره از ضعیف‌ترین امپراطوری انتخاب شده و به یک امپراطوری تصادفی منتقل می‌گردد. سپس اگر امپراطوری فاقد مستعمره‌ای بود آن را حذف می‌کنیم.

- **شرط خاتمه روش پیشنهادی**

روش پیشنهادی تا زمان باقی ماندن فقط یک امپراطوری اجرا می‌شود و در نهایت استعمارگر تنها امپراطوری باقیمانده به عنوان بهترین جواب روش پیشنهادی در نظر گرفته می‌شود و الگوریتم خاتمه می‌یابد.

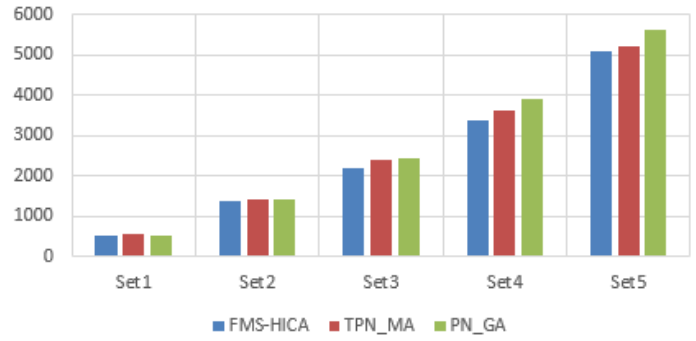
جدول ۴: یک سیستم تولید انعطاف‌پذیر نمونه

problem	PN-GA		TPN-MA		FMS-HICA	
	Min	Ave	Min	Ave	Min	Ave
Set1	۵۱۰	۶۲۱	۵۶۶	۵۷۳	۵۳۱	۵۶۷
Set2	۱۴۱۵	۱۶۴۲	۱۴۲۵	۱۶۰۱	۱۳۸۹	۱۵۲۰
Set3	۲۴۴۵	۲۵۸۱	۲۳۸۸	۲۵۲۳	۲۲۱۳	۲۴۱۷
Set4	۳۹۲۱	۴۰۶۲	۳۶۱۷	۳۹۰۲	۳۳۹۵	۳۵۹۷
Set5	۵۶۱۷	۵۹۴۱	۵۲۰۱	۵۳۲۴	۵۱۰۲	۵۲۶۱

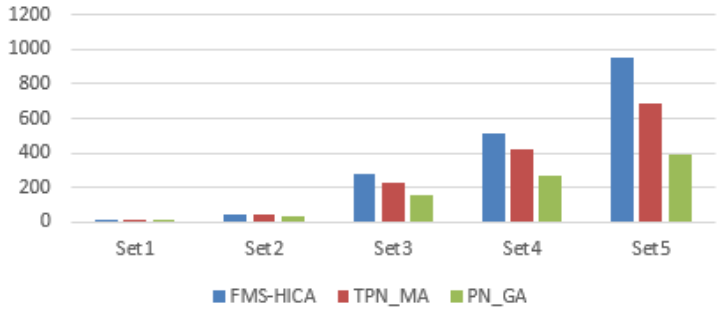
۴ نتایج شبیه سازی

در این مقاله یک روش جدید برای حل مسئله زمانبندی سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری ترکیب شده با الگوریتم جستجوی ممنوع (FMS-HICA) ارائه شده است. برای ارزیابی روش پیشنهادی، از زبان برنامه‌سازی python استفاده شده است. الگوریتم پیشنهادی با دو الگوریتم TPN-MA [۷] و PN-GA [۸] مقایسه شده است. برای مقایسه این سه الگوریتم ۵ مجموعه داده تست، طراحی شده است. تا ویژگی‌های سیستم‌های تولید کوچک و متوسط و بزرگ را در برگیرد. نام‌گذاری این داده‌های تست به‌صورت X Set است که در آن X شماره داده تست است. برای مقایسه دقیق‌تر الگوریتم‌ها، هر الگوریتم بطور مستقل ۱۰ بار اجرا شده و میانگین جواب‌های حاصل از این اجراها به عنوان جواب الگوریتم در نظر گرفته شده است.
جدول ۴ نتایج حاصل از مقایسه سه الگوریتم، FMS-HICA، PN-GA TPN-MA را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، روش پیشنهادی در چهار داده تست از پنج داده به نتایج بهتری دست می‌یابد. همچنین نتایج نشان می‌دهد با بزرگتر شدن مسئله عملکرد روش پیشنهادی نسبت به دو الگوریتم دیگر بهبود بیشتری را نشان می‌دهد. که دلیل آن می‌تواند ترکیب الگوریتم رقابت استعماری با الگوریتم جستجوی ممنوع باشد که منجر به کاوش بهتر فضای حل مسئله و در نتیجه دستیابی به نتایج بهتر می‌شود.

شکل ۱ نتایج حاصل از مقایسه سه الگوریتم، PN-GA، FMS-HICA TPN-MA را از نظر زمان لازم برای اجرای تمام کارها نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با الگوریتم‌های دیگر در اکثر موارد جواب بهتری را ارائه می‌دهد که دلیل آن، استفاده از جستجوی ممنوع به عنوان یک تکنیک جستجوی محلی است.
شکل ۲ مقایسه الگوریتم‌ها از نظر زمان لازم برای اجرا را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، زمان لازم برای اجرای الگوریتم پیشنهادی بیشتر از دو الگوریتم دیگر است، که دلیل آن استفاده از الگوریتم جستجوی ممنوع به عنوان یک الگوریتم جستجوی محلی است.



شکل ۱: مقایسه سه الگوریتم FMS-HICA، TPN-MA PN-GA از نظر زمان لازم برای اجرای تمام کارها



شکل ۲: مقایسه سه الگوریتم FMS-HICA، TPN-MA PN-GA از نظر زمان اجرا

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله برای زمانبندی سیستم‌های تولید انعطاف پذیر یک الگوریتم جدید با استفاده از ترکیب الگوریتم رقابت استعماری با الگوریتم جستجوی ممنوع ارائه شده است. هدف از الگوریتم پیشنهادی کاهش زمان لازم برای اجرای تمام کارها می باشد. برای ارزیابی کارایی، روش پیشنهادی با دو الگوریتم دیگر مقایسه شد و نتایج شبیه‌سازی نشان داد الگوریتم ارائه شده نسبت به دیگر الگوریتم‌ها کارایی بیشتری دارد، اما نیاز به زمان بیشتری برای اجرا دارد که علت آن استفاده از جستجوی ممنوع به عنوان یک تکنیک جستجوی محلی است.

مراجع

[1] M. Geetha, R. Chandra Guru Sekar, M. Marichelvam, and Ö. Tosun, “A sequential hybrid optimization algorithm (SHOA) to solve the hybrid flow shop scheduling problems to minimize carbon footprint,” Processes, vol. 12, no. 1, p. 143, 2024.

[2] M. Takahashi and S. Kurahashi, “Tabu search algorithms for multimodal and multi-objective function optimizations,” IJCSNS, vol. 7, no. 10, pp. 257–264, 2007.

[3] R. Kumar, M. Tiwari, and R. Shankar, “Scheduling of flexible manufacturing systems: an ant colony optimization approach,” Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture, vol. 217, no. 10, pp. 1443–1453, 2003.

[4] F. T. Chan, S. H. Chung, and P. Chan, “Application of genetic algorithms with dominant genes in a distributed scheduling problem in flexible manufacturing systems,” International Journal of Production Research, vol. 44, no. 3, pp. 523–543, 2006.

[5] F. Ghedjati, “Genetic algorithms for the job-shop scheduling problem with unrelated parallel constraints: heuristic mixing method machines and precedence,” Computers & Industrial Engineering, vol. 37, no. 1-2, pp. 39–42, 1999.

[6] H. Jia, J. Y. Fuh, A. Y. Nee, and Y. Zhang, “Web-based multi-functional scheduling system for a distributed manufacturing environment,” Concurrent Engineering, vol. 10, no. 1, pp. 27–39, 2002.

[7] J. Caballero and G. Mejía, “A Hybrid Approach that Combines Petri Net Models And Genetic Algorithms for Scheduling of Flexible Manufacturing Systems,” in III Congreso Colombiano y I Conferencia Andina Internacional de Investigación de Operaciones. Cartagena, Colombia. Electronic Proceedings, 2004.

[8] G. M. Delgadillo and J. A. Chedid, “Reactive Scheduling in FMS: an Integrated Approach based on Petri Nets, Genetic Algorithms and Simulation Nets, Genetic Algorithms and Simulation.” in Proceedings of the 17th International Conference on Flexible Automation and Intelligent Manufacturing, Philadelphia, USA, 2007.

[9] M. H. Abdul-Hussin, “An Efficient Petri Net Dynamics-Based Controllability of FMS Models,” in 2025 IEEE 14th International Conference on Communication Systems and Network Technologies (CSNT), 2025: IEEE, pp. 1041–1048.

[10] E. Atashpaz-Gargari and C. Lucas, “Imperialist competitive algorithm: an algorithm for optimization inspired by imperialistic competition,” in 2007 IEEE congress on evolutionary computation, 2007: Ieee, pp. 4661–4667.

[11] S. Hosseini and A. Al Khaled, “A survey on the imperialist competitive algorithm metaheuristic: implementation in engineering domain and directions for future research,” Applied Soft Computing, vol. 24, pp. 1078–1094, 2014.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

وجود و چندگانگی جواب برای بعضی از مسایل بیضوی منفرد با روش تغییراتی

سجاد بهوندی [۱]

[۱] گروه ریاضی، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاداسلامی، رامهرمز، ایران

چکیده

دراین مقاله علاقمند به بکارگیری قضیه سه نقطه بحرانی ساخته شده توسط ریچری که وجود سه جواب ضعیف را برای برخی از مسایل بیضوی منفرد، شامل یک عملگر Pـلاپلاسین درشرایط مرزی دریکله دریک دامنه کراندار هموار R^N را اثبات میکند هستیم.

کلمات کلیدی: عملگر Pـلاپلاسین، مسایل بیضوی منفرد، نقاط بحرانی، روشهای تغییراتی.

۱ مقدمه

در سال های اخیرمسائل مقدارمرزی منفرد مورد مطالعه قرارگرفته است که ما به این آثاراشاره می کنیم [۱، ۲، ۳، ۷] به عنوان مثال در [۱] فراکی و لیورا وجود حداقل یک جواب ضعیف غیربدیهی برای مسئله بیضوی دریکله زیررا مطالعه کرده اند.

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \mu \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \lambda f(x,u) \quad in\Omega \\ u|\partial\Omega &= 0 \end{cases}$$

جاییکه $\lambda > 0$ و $\mu \geq 0$ دو پارامتر حقیقی، Ω یک ناحیه کراندارد $R^N (N \geq 2)$ شامل مبدا با مرزهموار $\partial\Omega$، $1 < p < N$ و $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع کارا تئودوری که درشرایط رشد زیربحرانی مناسب صدق میکند، است.همچنین در [۷] نویسندگان وجود دوجواب ضعیف متمایز را برای مسئله زیربدست آوردند.

[1] sajad.behvandi@iau.ac.ir

$$\begin{cases} -\Delta u &= \mu \frac{u}{|x|^۲} + \lambda f(u) \quad in \Omega \\ u|\partial\Omega &= ۰ \qquad\qquad\qquad on \partial\Omega \end{cases} \tag{۱}$$

هدف این مقاله بررسی وجود سه جواب غیر صفر برای مسئله زیر است.

$$\begin{cases} -\Delta u &= \mu \frac{u}{|x|^۲} + \lambda f(x,u) + \gamma g(x,u) \quad in\ \Omega \\ u &= ۰ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad on\ \partial\Omega \end{cases} \tag{۲}$$

که Δu عملگرلاپلاس، Ω یک ناحیه کراندار در $\mathbb{R}^N (N \geq ۲)$ شامل مبدا با مرزهموار $\partial\Omega$ و $f, g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو تابع کاراتئودوریکه در شرایط رشد زیر بحرانی مناسب صدق میکنند، است و $\lambda > ۰$ و $\gamma, \mu \geq ۰$ سه پارامتر حقیقی هستند. در نهایت برای اثبات نتیجه خود موکدا نیازمند به بکاربردن قضیه بیشترازسه نقطه بحرانی ساخته شده توسط ریچری [۲] وترکیب با یک نتیجه نیم پیوسته پایینی ضعیف ساخته شده توسط مونتفوسکو [۸] هستیم. یادآوری می کنیم که تابع $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را یک تابع کارا تئودوری می نامند، هر گاه

۱. $c_۱$ نگاشت $x \mapsto f(x,t)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ اندازه پذیر باشد.

۲. $c_۲$ نگاشت $t \mapsto f(x,t)$ برای تقریبا هر $X \in \Omega$ پیوسته باشد.

۲ مقدمات

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار در $\mathbb{R}^N (N > ۲)$ شامل مبدا با مرز هموار $\partial\Omega$. بعلاوه فضای سوبولف $H^۱_۰(\Omega)$ با حاصلضرب داخلی زیررا با X نشان میدهیم.

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx$$

با نرم القایی

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^۲ \, dx \right)^{\frac{۱}{۲}}$$

همچنین فرض کنید $\|۰\|_۱$ نشان دهنده نرم معمولی روی $L^۱(\Omega)$ یعنی $\|u\|_۱ := \int_\Omega |u(x)| \, dx$. نامساوی هاردی کلاسیک را که به صورت زیراست یادآوری می کنیم.

$$\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{۲}}{|x|^{۲}} dx \leq \frac{۱}{H} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{۲} dx \qquad (۳)$$

که در $H := \left(\frac{N-۲}{۲}\right)^{۲}$؛ برای مثال مقاله [۲] را ببینید. ازاینجا به بعد فرض کنیم $\mu \in [۰, H[$.
حال کلاس همه توابع کارا تئودوری $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با A نشان می دهیم به طوری که

$$\sup_{(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}} \frac{|\varphi(x,\xi)|}{۱ + |\xi|^{q}} < +\infty$$

جاییکه $۲ < q < \frac{n+۲}{n-۲}$. قراردهید $\varphi \in A$. مساله دیریکله زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} -\Delta u &= \mu \frac{u}{|x|^{۲}} + \varphi(x,u) \quad in\ \Omega, \\ u &= ۰ \qquad\qquad\qquad on \partial\Omega \end{cases} \qquad (۴)$$

اجازه دهید برای هر $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$ تعریف کنیم
$F(x,\xi) := \int_{.}^{\xi} f(x,t)dt$، علاوه براین برای هر $u \in X$ تابعک $I_\mu : X \to \mathbb{R}$ مربوط به (۲) را معرفی می‌کنیم :

$$I_\mu(x) := \Phi_\mu(u) - J_\varphi(u) \qquad (\forall u \in X)$$

$$\Phi_\mu(u) := \frac{۱}{۲} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{۲} dx - \frac{\mu}{۲} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{۲}}{|x|^{۲}} dx$$

$$J_\varphi(u) := \int_{\Omega} \left(\int_{.}^{u(x)} \varphi(x,\xi) d\xi \right) dx \qquad (\forall u \in X).$$

از نامساوی هاردی (۳) می توان نتیجه گرفت که برای هر $u \in X$ نامساوی زیربرقرار است

$$\left(\frac{H-\mu}{۲\ H}\right) \|u\|^{۲} \leq \Phi_\mu(u) \leq \frac{\|u\|^{۲}}{۲}$$

در [۸] نشان داده شده که Φ_μ تابعک خوش تعریف(بوسیله نامساوی هاردی)، مشتق پذیرگاتواست به طوری که مشتق گاتوآن تابعک $\Phi'_\mu(u) \in X^*$ است وبرای هر $v \in X$ به صورت:

$$\Phi'_\mu(u)(v) = \int_{\Omega} \nabla u\ (x) \nabla v(x) dx - \mu \int_{\Omega} \frac{u(x)}{|x|^{۲}} v(x) dx$$

بعلاوه اگر $\mu \in [0, H]$ آنگاه ϕ_μ نیم پیوسته پایینی ضعیف می باشد. (مقاله [۸] را ببینید). ازطرف دیگر آرگومان های استاندارد نشان میدهد تابعک J_φ خوشتعریف وبه طورپیوسته مشتق پذیرگاتوبا مشتق گاتو

$$J'_\varphi(u)(v) = \int_\Omega \varphi\left(x, u(x)\right) v(x)\, dx. \qquad (\forall v \in X)$$

یک عملگرفشرده از $X \to X^*$ می باشد.
برای یک پارامترحقیقی ثابت μ یک تابع $u : \Omega \to \mathbb{R}$ یک جواب ضعیف برای مساله (۴) گفته می شود اگر $u \in X$ وبرای هر $v \in X$

$$\int_\Omega \nabla u\,(x)\nabla v(x)dx - \mu \int_\Omega \frac{u(x)}{|x|^2}\, v(x)dx - \lambda \int_\Omega \varphi\left(x, u(x)\right)\; v(x)dx = 0.$$

در نتیجه نقاط بحرانی I_μ دقیقا جوابهای ضعیف مساله (۴) می باشند.
ابزار اصلی ما برای بررسی وجود سه جواب ضعیف برای مساله (۲) یک قضیه سه نقطه بحرانی دیگر دیچری [۲] است که هم اکنون آن را یاآوری می کنیم. قبل ازاین با معرفی یک نماد شروع میکنیم .
اگر X یک فضای حقیقی باناخ باشد کلاس همه تابعک های $\Phi : X \to \mathbb{R}$ را با W_X نشان می دهیم که دارای ویژگی زیر است:
اگر $\{u_n\}$ دنباله ای در X که به طورضعیف همگرا به $u \in X$ و $\lim_{n\to+\infty} \inf\ \Phi\left(u_n\right) \leq \Phi(u)$ باشد آنگاه دنباله $\{u_n\}$ یک دنباله به طورهمگرا به u دارد .

قضیه ۱.۲. فرض کنید X یک فضای جدایی پذیروباناخ حقیقی انعکاسی و $\Phi : X \to \mathbb{R}$ یک تابعک C^1 نیمه پیوسته پایینی ضعیف دنباله ای واجباری متعلق به W_X، کرانداررروی هرزیرمجموعه کرانداراز X که مشتق آن یک معکوس پیوسته روی x^* دارد. $J : X \to \mathbb{R}$ یک تابعک C^1 با مشتق فشرده. فرض کنید که Φ دارای یک مینیمم موضعی اکید $x_.$ با $\Phi\left(x_.\right) = J\left(x_.\right) = 0$ است.
درنهایت قرارمیدهیم

$$\alpha = \max\left\{0, \limsup_{|x|\to+\infty} \frac{J(x)}{\Phi(x)}, \limsup_{x\to x_.} \frac{J(x)}{\Phi(x)}\right\}$$

و

$$\beta = \sup_{x\in\Phi^{-1}(]0,+\infty[)} \frac{J(x)}{\Phi(x)}$$

فرض کنید $\alpha < \beta$. آنگاه برای هرفاصله فشرده $[a,b] \subset \left]\frac{۱}{\beta}, \frac{۱}{\alpha}\right[$
(با این قرارداد $\frac{۱}{+\infty} = ۰$ و $\frac{۱}{۰} = +\infty$)، $r > ۰$ با خواص زیروجود دارد: برای هر $\lambda \in [a,b]$ و هرتابعک $c^۱$، $\psi : X \to \mathbb{R}$ با مشتق فشرده، وجود دارد $\delta > ۰$ بطوریکه برای $\mu \in [۰, \delta]$، معادله

$$\Phi'(x) = \lambda J'(x) + \mu\psi'(x)$$

حداقل سه جواب دارد بطوریکه نرم آنها کمتراز r است.

۳ نتایج مهم

قبل از شروع قضیه مهم برخی تعاریف را یادآوری می‌کنیم.
فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی باشد آنگاه عملگر $T : X \to X^*$ به طور قوی یکنواخت است اگر یک $C > ۰$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $u, v \in X$.

$$\langle Tu - Tv, u - v\rangle \geq c\|u - v\|^۲$$

و همچنین $T : X \to X^*$ اجباری است اگر

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle Tu, u\rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

قضیه مهم ما به صورت زیراست.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $f \in A$ به طوریکه

$$\max\left\{\limsup_{\xi\to۰} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,\xi)}{|\xi|^۲}, \limsup_{\xi\to\infty} \frac{\sup_{x\in\Omega} F(x,\xi)}{|\xi|^۲}\right\} \leq ۰ \qquad (۵)$$

و

$$\sup_{u\in H^۱_۰(\Omega)} \int_\Omega F(x, u(x))\, dx > ۰$$

آنگاه برای هر $\mu \in [۰, H)$ و برای هربازه فشرده $[a,b] \subset \left]\frac{۱}{\beta}, +\infty\right[$ یک $r > ۰$ با خاصیت زیر وجود دارد:
برای هر $\lambda \in [a,b]$ وهر $g \in A$ وجود دارد یک $\delta > ۰$ به طوریکه برای هر $\gamma \in [۰, \delta]$ مساله

$$\begin{cases} -\Delta u &= \mu \frac{u}{|x|^{۲}} + \lambda f(x,u) + \gamma g(x,u) \quad in \in \Omega \\ u &= ۰ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad on \in \partial\Omega \end{cases} \tag{۶}$$

حداقل سه جواب ضعیف دارد که نرم آنها در $H_{۰}^{۱}(\Omega)$ کمتراز r می باشد.

اثبات. قراردهید $\mu \in [۰, H]$، هدف ما بکارگرفتن قضیه ۱.۲ با $X := H_{۰}^{۱}(\Omega)$ و جاییکه

$$\Phi_{\mu}(u) = \frac{۱}{۲} \int_{\Omega} |\nabla u|^{۲} dx - \frac{\mu}{۲} \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{۲}}{|x|^{۲}} dx$$

$$J_{f}(u) = \int_{\Omega} F\,(x, u(x)) dx \qquad \forall u \in X$$

همانطورکه قبلا دیدیم تابعک های Φ_{μ} و J درفرضیات منظم خواسته شده درقضیه ۱.۲ به استثنای هومومورفیسم بودن Φ'_{μ} بین $H_{۰}^{۱}(\Omega)$ و دوگان، صدق میکنند.حال ثابت میکنیم که تابعک Φ'_{μ} دارای معکوس پیوسته است. به آسانی می توان نشان داد که عملگر Φ'_{μ} به طورقوی یکنوا است درواقع

$$\langle \Phi'_{\mu}(\,u) - \Phi'_{\mu}\,(v), u - v \rangle \;= \int_{\Omega} |\nabla(u-v)|^{۲}\, dx - \mu \int_{\Omega} \frac{|u-v|^{۲}}{|x|^{۲}} dx$$

به وسیله ی به نامساوی هاردی (۳)، داریم:

$$\int_{\Omega} |\nabla(u-v)|^{۲}\, dx - \mu \int_{\Omega} \frac{|u-v|^{۲}}{|x|^{۲}} dx \geq (۱ - \frac{\mu}{H}) \, \|u-v\|^{۲}$$

چون $\mu \in [۰, H]$، آنگاه Φ'_{μ} به طور اکید یکنواست . به طورمشابه می توان نشان داد که Φ'_{μ} اجباری است [۱۰]. عملگر Φ'_{μ} معکوس پیوسته دارد. حال می خواهیم ثابت کنیم که $\Phi_{\mu} \in W_X$. فرض کنید $u_n \xrightarrow{w} u$ و $\lim_{n\to+\infty} \inf \Phi_{\mu}(u_n) \leq \Phi_{\mu}(u)$ ، آنگاه ازنیم پیوستگی پایینی ضعیف Φ_{μ} نتیجه می شود که

$$\lim_{n\to+\infty} \inf \Phi_{\mu}(u_n) = \Phi_{\mu}(u)$$

از تعریف Φ_{μ} و قضیه همگرایی مغلوب داریم

$$\liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|^{۲} = \|u\|^{۲}.$$

در نهایت، چون X یک فضای هیلبرت است لذا بنا به نتیجه کلاسیک $\{u_n\}$ یک زیردنباله به طورقوی همگرا به u دارد وبنابراین، $\Phi_\mu \in W_X$.
فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، دراین صورت بنا به (۵) $\rho_۱, \rho_۲$ با شرط $۰ < \rho_۱ < \rho_۲$ به طوری که برای هر
$(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R} \backslash ([-\rho_۱, -\rho_۲] \cup [\rho_۱, \rho_۲]))$ داریم

$$F(x, \xi) \leq \varepsilon |\xi|^۲ \qquad (۷)$$

آنگاه f روی $([-\rho_۱, -\rho_۲] \cup [\rho_۱, \rho_۲])$ کراندارست وبنابراین می توانیم یک $C > ۰$ و $۲ < q < \frac{۲N}{N-۲}$ انتخاب کنیم به طوری که برای هر $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$F(x, \xi) \leq \varepsilon |\xi|^۲ + C.|\xi|^q.$$

بنابراین ازپیوستگی نشاندهی، برای برخی $c_۱ > ۰$ (مستقل از $\varepsilon > ۰$) برای هر $u \in X$ داریم

$$J(u) \leq c_۱ \left(\varepsilon \|u\|^۲ + \|u\|^q \right)$$

در نتیجه داریم

$$\limsup_{u \to ۰} \frac{J(u)}{\Phi_\mu(u)} \leq ۲\, c_۱ \varepsilon \qquad (۸)$$

بعلاوه دوباره بنا به (۷) برای هر $u \in X \backslash \{۰\}$ داریم

$$\frac{J(u)}{\|u\|^۲} = \frac{\int_{\Omega(|u| \leq \rho_۲)} F(x, u(x)) dx}{\|u\|^۲} + \frac{\int_{\Omega(|u| > \rho_۲)} F(x, u(x)) dx}{\|u\|^۲}$$
$$\leq \frac{(meas(\Omega)) \quad \sup_{\Omega \times [-\rho_۱, -\rho_۲]} F}{\|u\|^۲} + c_۲ \varepsilon$$

برای یک ثابت $c_۲$ مستقل از ε و u. بنا براین داریم

$$\limsup_{|u| \to +\infty} \frac{J(u)}{\Phi_\mu(u)} \leq \frac{۲H}{H - \mu} c_۱ \varepsilon \qquad (۹)$$

چون ε دلخواه است بنابراین (۸) و (۸) نتیجه می دهند.

$$\max\left\{\limsup_{||u||\to\infty}\frac{J(u)}{\Phi_\mu(u)}\limsup_{u\to 0}\frac{J(u)}{\Phi_\mu(u)}\right\}\leq 0$$

آنگاه با توجه به نمادگذاری درقضیه ۱.۲ داریم $\alpha=0$. بنابراین همه فرضیات قضیه ۱.۲ برقرارند. با در نظر گرفتن $\psi=J_g$ و با استفاده از قضیه ۱.۲ نتیجه حاصل می شود.

□

ازپیامدهای قضیه ۱.۳ به نتیجه زیراشاره میکنیم.

نتیجه ۱.۳. فرض کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته غیرصفروغیرمنفی باشد به طوری که

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{f(\xi)}{\xi}=0\quad\lim_{\xi\to\infty}\frac{f(\xi)}{\xi}=0$$

آنگاه برای هر $\mu\in[0,H]$ و برای هربازه فشرده $[a,b]\subset\left]\frac{1}{\beta}+\infty\right[$ یک $r>0$ با خاصیت زیروجود دارد:
برای هر $\lambda\in[a,b]$ و هر $g\in A$ یک $\delta>0$ به طوریکه برای هر $\gamma\in[0,\delta]$ مساله

$$\begin{cases}-\Delta u &= \mu\frac{u}{|x|^2}+\lambda f(x,u)+\gamma g(x,u) \quad in\Omega\\ u &= 0 \quad on\partial\Omega\end{cases}\qquad(10)$$

حداقل سه جواب ضعیف دارد که نرمشان در $H_0^1(\Omega)$ کمتراز r است.

نتیجه ۲.۳. درمقایسه با [۷] ضمن یکسان بودن فرضیات، همانطور که درنتیجه قبل اشاره شده، به وضوح از شرط $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=0$ می توان تیجه گرفت که $f(0)=0$ و بنابراین $u=0$ یک جواب برای مساله (۲) ولی نه برای مساله (۴) چون می توانیم یک اختلال $g\in A$ پیدا کنیم به طوری که $g(x,0)\neq 0$ برای تقریبا همه جا $x\in\Omega$.

مثال ۱.۳. تابع زیردرتمام شرایط مطلوب قضیه ۱.۳ برقراراست. فرض کنیم $r>1$ یک عدد حقیقی و $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع $1<s<2<q<\frac{2N}{N-2}$ با ضابطه زیردر نظر میگیریم.

$$f(x,t)=\begin{cases}\alpha(x)|t|^{q-1} & x\in\Omega\ t\leq r\\ \alpha(x)r^{q-s}t^{s-1} & x\in\Omega\ t>r\end{cases}$$

که $\alpha:\Omega\to\mathbb{R}$ یک تابع کراندار، مثبت و بورل است، به وضوح دیده میشود که $f\in A$. با انتگرالگیری ساده داریم

$$F(x,\xi)=\begin{cases} \leq ۰ & x\in\Omega, \xi\leq ۰ \\ \alpha(x)\frac{\xi^q}{q} & x\in\Omega, ۰<\xi\leq r \\ \alpha(x)\frac{r^q}{q}+\alpha(x)\frac{r^{q-s}}{s}\xi^s-\alpha(x)\frac{r^q}{s} & x\in\Omega, \xi>r \end{cases}$$

به وضوح داریم

$$\max\left\{\limsup_{\xi\to ۰}\frac{\sup_{x\in\Omega}F(x,\xi)}{|\xi|^۲}, \limsup|\xi|\to\infty\frac{\sup_{x\in\Omega}F(x,\xi)}{|\xi|^۲}\right\}\leq ۰$$

علاوه براین، مثالی دیگردرارتباط با نتیجه ۲.۳ به صورت زیراست.

مثال ۲.۳. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه زیردرنظرمیگیریم

$$f(\xi)=\log\left(۱+\xi^۲\right)$$

به راحتی می توان نشان داد که

$$\lim_{\xi\to ۰}\frac{f(\xi)}{\xi}=۰ \quad \lim_{|\xi|\to+\infty}\frac{f(\xi)}{\xi}=۰$$

در نهایت همه فرض های نتیجه ۲.۳ برقرارهستند.

مراجع

[1] F. Faraci and R. Livrea, Bifurcation theorems for nonlinear problems with lack of compactness, Annales Polonici Mathematici., 82,77-85 (2003)

[2] J. P. Garcıa Azorero and I. Peral, Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems, J. Differential Equations., 144, 441-476. (1998)

[3] M.Ghergu, V. Radulescu, Sublinear singular elliptic problems with two parameters, J. Differential Equations, 195, 520-536 (2003)

[4] Ghergu, M., Radulescu, V.: Multiparameter bifurcation and asymptotics for the singular Lane-Emden-Fowler equation with a convection term. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 135, 61–84 (2005)

[5] Ghergu, M., Radulescu, V.: Ground state solutions for the singular Lane-Emden-Fowler equation with sublinear convection term. J. Math. Anal. Appl. 333, 265–273 (2007)

[6] Ghergu, M., Radulescu, V.: Singular Elliptic Problems. Bifurcation and Asymptotic Analysis, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, vol. 37. Oxford Univ. Press (2008)

[7] A. Kristaly, Cs. Varga, Multiple solutions for elliptic problems with singular and sublinear potentials, Proc. Amer. Math. Soc. 135, 2121-2126 (2007)

[8] Montefusco, E.: Lower semicontinuity of functionals via the concentration-compactness principle. J.Math. Anal. Appl. 263, 264–276 (2001)

[9] Ricceri, B.: A further three critical points theorem. Nonlinear Anal. 71, 4151–4157 (2009)

[10] Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Volume/B,Nonlinear Monotone Operators Springer, New York (1990)

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

تحلیل کیفی عملگر بیضوی مسایل بیضوی در فرم همگرایی

سجاد بهوندی [۱]

[۱] گروه ریاضی، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاداسلامی، رامهرمز، ایران

چکیده

در این مقاله مسایل دیریکله بیضوی منفرد شامل یک عملگر بیضوی عمومی را مطالعه می‌کنیم. با استفاده از قضیه نقاط بحرانی شرایط حل پذیری جدیدی را برای حداقل یک جواب ضعیف غیر بدیهی بررسی و ارائه می‌دهیم. چهارچوب ما شامل دسته بزرگی از مدل‌های pـلاپلاسین وزن دار می‌باشد که حالت خاصی از مساله مورد مطالعه در این مقاله است.

کلمات کلیدی: pـلاپلاسین، مسایل بیضوی منفرد، نقاط بحرانی، روش‌های تغییراتی

۱ مقدمه

این مقاله به وجود حداقل یک جواب ضعیف غیر بدیهی برای مساله زیر می‌پردازد:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(x,\nabla u) + \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = \lambda f(x,u) + \mu\alpha(x)h(u) & \text{در } \Omega, \\ u = 0 & \text{روی } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (1)$$

جاییکه $A : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ شرایط ساختاری طبیعی معینی را برآورد می‌کند، Ω یک ناحیه کراندار در $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ شامل مبدا با مرز هموار $\partial\Omega$ بوده و $1 < p < N$، $\mu \geq 0$، $\lambda > 0$، $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$ یک تابع غیر صفر و غیر منفی بطوریکه $\alpha \in L^\gamma(\Omega)$ برای $\gamma > \frac{N}{p}$، $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع غیر منفی پیوسته و کراندار و $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودوری غیر منفی بطوریکه

$$(f_1) \quad f(x,t) \leq k_1 + k_2|t|^{q-1} \quad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \qquad (2)$$

برای بعضی ثابت‌های مثبت k_1, k_2 و $q \in]1, p]$ برقرار است.

[1] sajad.behvandi@iau.ac.ir

مثال زیر یک فرم مخصوص از این نمونه است:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(J(x)\nabla u\right) = f(u) & \text{در}\Omega, \\ u = 0 & \text{روی}\partial\Omega. \end{cases} \quad (۳)$$

که Ω یک دامنه کراندار در $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ می‌باشد، J یک تابع غیر منفی با برخی شرایط مناسب و f یک تابع پیوسته که $tf(t)$ و $f(0) = 0$ مانند $|t|^p$ بطوریکه $|t| \to \infty$ رفتار می‌کند، با $2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ (قرارداد $2^* = \infty$ وقتی که $N = 1, 2$).

لازم به ذکر است که از معادلاتی مانند (۳) به عنوان مدل بسیاری از پدیده‌های فیزیکی استفاده می‌شوند. برای مشاهده ایده‌های کاربردی اینگونه معادلات به مرجع [۹] مراجعه می‌کنیم. اخیراً مطالعه مسائل اختلال مانند (۳) شامل عبارات سوبولوف بحرانی و زیربحرانی یا فوق بحرانی بین نویسندگان بسیار رایج شده است. برای مثال [۱۰] و [۷] را ببینید. مشکلات مربوط به عملگر $p-$ـلاپلاسین که در آن یک عبارت منفرد چهارچوب برخی نویسندگان بوده است. برای مثال می‌توان به مراجع [۱۲، ۱۴] اشاره کرد.

به عنوان مثال در [۱۴] نویسندگان وجود و راه حل‌های متعددی را برای مسئله شبه‌ـخطی زیر بدست آوردند:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda|u|^{r-2}u + \mu\dfrac{|u|^{q-2}u}{|x|^s} + \lambda f(x,u), & \text{در}\Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (۴)$$

بر اساس روش‌های تغییراتی و نظریه نقطه بحرانی در سال‌های اخیر مشکلات مربوط به عملگرهای pـلاپلاسین بسیار گسترده‌تر و مسائل بیضوی مربوط به یک عملگر دیفرانسیل که کلی از مسائل کلاسیک pـلاپلاسین هستند ارائه شده است.

در مقالات [۱، ۴، ۵، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۵، ۱۶] نویسندگان از چندین تکنیک تغییراتی به منظور مشخص کردن وجود تعدد راه حل‌هایی برای مسایل بیضوی غیر معمول که شامل یک عملگر بیضوی کلی در فرم دیورژانس استفاده می‌کنند. برای مثال در [۸] مساله (۱) در حالت $\mu = 0$ و بدون عبارت منفرد بررسی شده است. به طور دقیق‌تر نویسندگان مساله زیر را مطالعه کرده‌اند:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\mathbf{A}(x,\nabla u) = \lambda f(x,u) & \text{در}\Omega, \\ u = 0 & \text{روی}\partial\Omega. \end{cases} \quad (۵)$$

و آنها وجود دو راه حل ضعیف غیر بدیهی را بر اساس دو قضیه اخیر تضمین کرده‌اند ([؟] را ببینید).

هدف اصلی این مقاله تعیین فواصل برای پارامترهای λ و μ است که مساله (۱) حداقل یک جواب غیر بدیهی داشته باشد. رویکرد ما بر اساس روش‌های تغییراتی و قضیه نقطه بحرانی است.

اول از همه به یاد داشته باشید تابع $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودوری است اگر:

C۱) تابع $x \mapsto f(x,t)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد.

C۲) تابع $t \mapsto f(x,t)$ برای تقریباً هر $x \in \Omega$ پیوسته باشد.

۲ مقدمات و تعاریف اساسی

فرض کنید Ω یک ناحیه کراندار در $\mathbb{R}^N$ $(N \geq ۲)$ شامل مبدا با مرز هموار $\partial\Omega$ باشد. علاوه بر این فضای $W_{\cdot}^{۱,p}(\Omega)$ را با نرم زیر

$$\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx \right)^{۱/p} \tag{۶}$$

با X نشان می‌دهیم.

فرض کنید $۱ < p < N$، نامساوی هاردی کلاسیک را که به صورت زیر است یادآوری می‌کنیم:

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} \, dx \leq \frac{۱}{H} \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx \quad (\forall u \in X), \tag{۷}$$

جاییکه $H := \left(\frac{N-p}{p}\right)^p$؛ برای مثال مقاله [۱۳] را ببینید.

بنابر قضیه نشاندهی سوبولوف یک ثابت مثبت C وجود دارد به طوریکه

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c\|u\| \quad (\forall u \in X), \tag{۸}$$

جاییکه $p^* := \frac{pN}{N-p}$ ([۱۷]، گزاره ۷B. را ببینید). بهترین مقدار ثابت c که در (۸) ظاهر می‌شود به صورت زیر است:

$$c := \frac{۱}{N\sqrt{\pi}} \left(\frac{N!\Gamma(\frac{N}{۲})}{۲\Gamma(\frac{N}{p})\Gamma(N+۱-\frac{N}{p})} \right)^{۱/N} \left(\frac{N(p-۱)}{N-p} \right)^{۱-\frac{۱}{p}}. \tag{۹}$$

جاییکه Γ تابع گاما تعریف شده بصورت زیر می‌باشد:

$$\Gamma(t) := \int_۰^{+\infty} z^{t-۱} e^{-z} \, dz \quad (\forall t > ۰) \tag{۱۰}$$

(برای مثال [۱۸] را ببینید). دوباره از نشاندهی فشرده $X \hookrightarrow L^s(\Omega)$ برای هر $s \in [۱, p^*]$ که ثابت مثبت c_s وجود دارد به طوری که

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq c_s\|u\| \quad (\forall u \in X), \tag{۱۱}$$

که c_s بهترین ثابت نشاندهی فوق است. با توجه به (۹) یک نتیجه ساده از نامساوی هولدر به صورت زیر را داریم:

$$c_s := \frac{|\Omega|^{\frac{p^*-s}{p^*s}}}{N\sqrt{\pi}} \left(\frac{N!\Gamma(\frac{N}{2})}{2\Gamma(\frac{N}{p})\Gamma(N+1-N/p)} \right)^{1/N} \left(\frac{N(p-1)}{N-p} \right)^{1-\frac{1}{p}}, \qquad (12)$$

که $|\Omega|$ اندازه لبگ مجموعه Ω می‌باشد.

در این مقاله فرض می‌کنیم که تابع $\mathbf{A}$ در نامساوی زیر برای هر $x \in \Omega$ و $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ و برای برخی ثابت مثبت m صدق می‌کند:

$$\mathbf{A}(x, \xi+\eta)(\xi+\eta) \leq m\left(\mathbf{A}(x,\xi) + \mathbf{A}(x,\eta)\right)(\xi+\eta). \qquad (13)$$

و یک پتانسیل $\rho : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ بطوریکه ρ در مفروضات بعدی صدق می‌کند، دارد.

$(\mathcal{A})$ $\rho = \rho(x,\xi)$ یک تابع پیوسته در $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$ با یک مشتق پیوسته با to respect ξ و $\mathbf{A} = \partial_\xi \rho$. بعلاوه:

(a) برای هر $x \in \Omega$ و $\xi \in \mathbb{R}^N$، $\rho(x,\xi) = \rho(x,-\xi)$ و $\rho(x,0) = 0$.

(b) برای هر $x \in \Omega$، $\rho(x,\cdot)$ در $\mathbb{R}^N$ بطور اکید محدب است.

(c) ثابت‌های a_1, a_2، $0 < a_1 \leq a_2$ وجود دارند بطوریکه برای همه $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$:

$$\mathbf{A}(x,\xi)\cdot\xi \geq a_1|\xi|^p \quad \text{و} \quad |\mathbf{A}(x,\xi)| \leq a_2|\xi|^{p-1}.$$

تذکر ۱.۲. از فرضیات (a) $(\mathcal{A})$ و (c) $(\mathcal{A})$ بدست می‌آید که برای هر $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$:

$$a_1|\xi|^p \leq p\rho(x,\xi) \leq a_2|\xi|^p$$

([۸] را ببینید).

لم ۱.۲. ([۸]، لم ۵.۲) فرض کنید ρ در شرایط $(\mathcal{A})$ از (a) تا (c) صدق کند. آنگاه تابعک $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ تعریف شده به صورت

$$J(u) = \int_\Omega \rho(x, \nabla u(x))\, dx$$

محدب، نیم پیوسته پایینی ضعیف و از کلاس C^1 در $W_0^{1,p}(\Omega)$ است.

اجازه دهید برای هر $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ تعریف کنیم $F(x,t) := \int_0^t f(x,\xi)\, d\xi$ و برای هر $t \in \mathbb{R}$، $H(t) = \int_0^t h(\xi)\, d\xi$. همچنین معرفی می‌کنیم تابعک $I_\lambda : X \to \mathbb{R}$ مرتبط با (۱)،

$$I_\lambda(u) := \Phi(u) - \lambda\Psi(u), \qquad (14)$$

و برای هر $u \in X$ جاییکه

$$\Phi(u) := \int_\Omega \rho(x, \nabla u(x))\, dx + \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|x|^p}\, dx, \tag{۱۵}$$

$$\Psi(u) := \int_\Omega \Big(F(x, u(x)) + \frac{\mu}{\lambda}\alpha(x)H(u(x))\Big)\, dx. \tag{۱۶}$$

مشخص است که $\Phi, \Psi \in C^1(W^{1,p}_0(\Omega), \mathbb{R})$ و برای هر $u, v \in W^{1,p}_0(\Omega)$:

$$\Phi'(u)(v) := \int_\Omega \mathbf{A}(x, \nabla u(x)) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega \frac{|u(x)|^{p-2}}{|x|^p} u(x)v(x)\, dx,$$
$$\Psi'(u)(v) := \int_\Omega \Big(f(x, u(x)) + \frac{\mu}{\lambda}\alpha(x)h(u(x))\Big)\, v(x)\, dx.$$

طبق لم ۱.۲، Φ محدب است و همچنین بنابر نتیجه ۳.۹ از [۶]، Φ نیم پیوسته پایینی ضعیف است. واضح است $\inf_X \Phi = 0$. همچنین Ψ نیمه پیوسته بالایی ضعیف دنباله‌ای است ([۸]، لم ۲-۳) و تابعک بطور پیوسته مشتق پذیر گاتو که مشتق آن فشرده است. از نامساوی هاردی (۷) و از تذکر ۱.۲ بدست می‌آید که برای هر $u \in X$:

$$\frac{a_1}{p}\|u\|^p \le \Phi(u) \le \frac{(a_2 H + 1)}{pH}\|u\|^p. \tag{۱۷}$$

از (۱۷) در می‌یابیم که Φ اجباری است.

گزاره ۱۷. تابع $\Phi' : W^{1,p}_0(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ جاییکه $W^{-1,p'}$ فضای دوگان $W^{1,p}_0$ است یک معکوس پیوسته در $W^{-1,p'}(\Omega)$ دارد.

گزاره ۱۸. هر جواب ضعیف غیر بدیهی از مساله (۱) غیر منفی است.

اثبات. فرض کنید که $u_0 \neq 0$ یک جواب ضعیف برای مساله (۱) باشد. از آنجاییکه نقاط بحرانی I_λ دقیقاً جواب‌های ضعیف (۱) هستند در می‌یابیم که برای هر $v \in W^{1,p}_0(\Omega)$، $I'_\lambda(u_0)(v) = 0$. بنابراین داریم:

$$\int_\Omega \mathbf{A}(x, \nabla u_0(x)) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega \frac{|u_0(x)|^{p-2}}{|x|^p} u_0(x)v(x)\, dx$$
$$= \lambda \int_\Omega \Big(f(x, u_0(x)) + \frac{\mu}{\lambda}\alpha(x)h(u_0(x))\Big)\, v(x)\, dx. \tag{۱۸}$$

انتخاب می‌کنیم $v(x) = -u_n^-(x) = -\max\{-u_n(x), 0\}$. قرار دهید : $E = \{x \in \Omega : u_n(x) < 0\}$ و با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم که E مجموعه غیر تهی است. از (۱۸) و با استفاده از $\mathbf{A}_{(a)}$ و $\mathbf{A}_{(c)}$ داریم:

$$\begin{aligned} a_1\|u_n^-\|^p &\le \int_E \mathbf{A}(x, -\nabla u_n^-(x)) \cdot (-\nabla u_n^-(x))\, dx \\ &= \int_E \mathbf{A}(x, \nabla u_n(x)) \cdot (-\nabla u_n^-(x))\, dx \\ &\le -\int_E \frac{|u_n(x)|^{p-2}}{|x|^p} u_n(x) u_n^-(x)\, dx \\ &= -\lambda \int_E \left(f(x, u_n(x)) + \frac{\mu}{\lambda}\alpha(x)h(u_n(x))\right)(u_n^-(x))\, dx \le 0. \end{aligned}$$

در نتیجه $\|u_n^-\| = 0$ و بنابراین برای هر $x \in \Omega$، $u_n^- = 0$ و این یک تناقض است پس E تهی است و این بدین معناست که برای همه $x \in \Omega$، $u_n \ge 0$. □

تعریف ۱.۲. تابع مشتق پذیر گاتو I در شرایط PS صدق می‌کند اگر هر دنباله $\{u_n\}$ به طوری که

(a) $\{I(u_n)\}$ کراندار است.

(b) $\lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{X^*} = 0$،

یک زیر دنباله همگرا داشته باشد.

یک حالت غیر استاندارد بیان شرایط PS معرفی شده در [۲] به صورت زیر است.

تعریف ۲.۲. قرار دهید $r_1 < r_2$ و $r_1, r_2 \in [-\infty, +\infty]$. یک تابع مشتق پذیر گاتو I صادق در شرایط PS از پایین در r_1 و از بالا در r_2 قطع می‌کند (به طور خلاصه شرایط $PS^{[r_1]}_{[r_2]}$) اگر هر دنباله $\{u_n\}$ بطوریکه

(a) $\{I(u_n)\}$ کراندار است،

(b) $\lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{X^*} = 0$،

(c) $r_1 < \Phi(u_n) < r_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$،

یک زیر دنباله همگرا داشته باشد.

گزاره ۱۹. ([۲]، گزاره ۲.۱) فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی انعکاسی باشد. $\Phi : X \to \mathbb{R}$ یک تابع بطور پیوسته مشتق پذیر گاتو، نیمه پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای و اجباری باشد به طوری که مشتق گاتوی آن دارای یک وارون پیوسته روی X^* است و $\Psi : X \to \mathbb{R}$ یک تابع بطور پیوسته مشتق

پذیر گاتو که مشتق گاتوی آن فشرده است. آنگاه برای همه $r_1, r_2 \in [-\infty, +\infty]$ که $r_1 < r_2$، تابع $\Phi - \Psi$ در شرایط $^{[r_1]}PS^{[r_2]}$ صدق می‌کند.

تذکر ۲.۲. اگر تابعک خطی $I_\lambda : X \to \mathbb{R}$ تعریف شده در (۱۴) را بررسی کنیم آنگاه طبق گزاره ۱۹، I_λ در شرایط $^{[r_1]}PS^{[r_2]}$ برای هر $r_1, r_2 \in]-\infty, +\infty[$ که $r_1 < r_2$ است صدق می‌کند.

۳ یک جواب غیر بدیهی ضعیف

قبل از بیان ابزار اصلی خود در این بخش، نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم.
برای ثابت $x_\cdot \in \Omega$ فرض کنید $B(x_\cdot, R(x_\cdot))$، یک توپ با مرکز $x_\cdot$ و شعاع $R(x_\cdot) = d(x_\cdot, \partial\Omega)$ باشد. واضح است که $B(x_\cdot, R(x_\cdot)) \subseteq \Omega$. همچنین $|B(0,1)| = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\frac{N}{2}\Gamma(\frac{N}{2})}$ نشان دهنده توپ واحد Nـبعدی از $\mathbb{R}^N$ باشد. برای ساده‌سازی مراحل اثبات قضایای مهم این مقاله، عبارات زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\tau = \tau(x_\cdot) = \left[\left(\frac{R(x_\cdot)}{2} \right)^{N-p} (2^N - 1)|B(0,1)| \right]^{1/p}, \qquad (19)$$

برای هر $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ که $r_1 < r_2$، قرار می‌دهیم

$$\beta(r_1, r_2) = \frac{\Psi(u) - \Psi(v)}{r_2 - \Phi(v)}, \qquad (20)$$

و

$$\rho(r_1, r_2) = \sup_{v \in \Phi^{-1}(]r_1, r_2[)} \frac{\Psi(v) - \sup_{u \in \Phi^{-1}(]-\infty, r_2[)} \Psi(u)}{\Phi(v) - r_1}. \qquad (21)$$

اکنون ابزار اصلی خود در این بخش را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. ([۲]، قضیه ۱.۵) فرض کنید X فضای حقیقی باناخ باشد $\Phi, \Psi : X \to \mathbb{R}$ دو تابع به طور پیوسته گاتو باشند و فرض کنیم که $r_1 < r_2$ و $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ به طوریکه $\beta(r_1, r_2) < \rho(r_1, r_2)$، جاییکه ρ و β داده شده در (۲۱) و (۲۰) باشند و برای هر $\lambda \in \left] \frac{1}{\rho(r_1,r_2)}, \frac{1}{\beta(r_1,r_2)} \right[$ تابع $I_\lambda = \Phi - \lambda\Psi$ در شرایط $^{[r_1]}PS^{[r_2]}$ صدق می‌کند آنگاه برای هر $\lambda \in \left] \frac{1}{\rho(r_1,r_2)}, \frac{1}{\beta(r_1,r_2)} \right[$ وجود دارد $u_{\cdot,\lambda} \in \Phi^{-1}(]r_1, r_2[)$ بطوریکه $I_\lambda(u_{\cdot,\lambda}) \leq I_\lambda(u)$ برای همه $u \in \Phi^{-1}(]r_1, r_2[)$ و $I'_\lambda(u_{\cdot,\lambda}) = 0$.

نتیجه مهم این بخش قضیه زیر است.

قضیه ۲.۳. فرض کنید $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع کاراتئودوری غیر منفی است بطوریکه شرایط (f_1) برقرار باشد. همچنین فرض کنید که وجود داشته باشد $x_0 \in \Omega$ و $\eta > 0$ با

$$\frac{(a_2 H + 1)}{pH}(\tau\eta)^p < 1 \qquad (22)$$

بطوریکه

$$\Theta := \frac{\left(\frac{R(x_0)}{2}\right)^N |B(0,1)| \operatorname{ess\,inf}_{x \in B(x_0, \frac{R(x_0)}{2})} F(x,\eta)}{\frac{(a_2 H+1)}{pH}(\tau\eta)^p} > \left(\frac{p}{a_1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(k_1 c_1 + \frac{k_2}{q} c_q^q \left(\frac{p}{a_1}\right)^{\frac{q-1}{p}}\right), \qquad (23)$$

آنگاه برای هر

$$\lambda \in \left] \frac{\frac{(a_2 H+1)}{pH}(\tau\eta)^p}{\left(\frac{R(x_0)}{2}\right)^N |B(0,1)| \operatorname{ess\,inf}_{x \in B(x_0, \frac{R(x_0)}{2})} F(x,\eta)}, \frac{\left(\frac{a_1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}}{k_1 c_1 + \frac{k_2}{q} c_q^q \left(\frac{p}{a_1}\right)^{\frac{q-1}{p}}} \right[, \qquad (24)$$

و برای هر تابع کراندار و پیوسته غیر منفی $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد $\delta_{\lambda,h} > 0$ داده شده توسط

$$\delta_{\lambda,h} = \frac{\left(\frac{p}{a_1}\right)^{\frac{1}{p}} - \lambda \left(k_1 c_1 + \frac{k_2}{q} c_q^q \left(\frac{p}{a_1}\right)^{\frac{q-1}{p}}\right)}{\left(\sup_{t \in \mathbb{R}} h(t)\right) \|\alpha\|_{L^\gamma(\Omega)} c_{\gamma'}}, \qquad (25)$$

جاییکه γ' توان مزدوج از γ است بطوریکه برای هر $\mu \in]0, \delta_{\lambda,h}[$ مساله (۱) حداقل یک جواب ضعیف غیر بدیهی دارد.

به عنوان مثال از قضیه ۲.۳، نتیجه زیر را ارائه می‌کنیم.

نتیجه ۱.۳. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع غیر صفر و پیوسته غیر منفی باشد بطوریکه

$$f(t) \leq k_1 + k_2 |t|^{q-1} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad (26)$$

جاییکه k_1, k_2 دو ثابت مثبت و $1 < q \leq p$. همچنین فرض کنید

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{t^p} = +\infty, \qquad (27)$$

جاییکه برای همه $t \in \mathbb{R}$، $F(t) = \int_0^t f(\xi)\, d\xi$. آنگاه برای هر $\lambda \in]0, \lambda'[$ جاییکه

$$\lambda' = \frac{\left(\frac{a_1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}}{k_1 c_1 + \frac{k_2}{q} c_q^q \left(\frac{p}{a_1}\right)^{\frac{q-1}{p}}}, \tag{۲۸}$$

و برای هر تابع کراندار و پیوسته غیر منفی $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد $\underline{\delta}_{\lambda,h} > 0$ بطوریکه برای هر $\mu \in]0, \underline{\delta}_{\lambda,h}[$ مساله

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(x, \nabla u) + \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = \lambda f(u) + \mu \alpha(x) h(u) & \text{در } \Omega, \\ u = 0 & \text{روی } \partial\Omega, \end{cases} \tag{۲۹}$$

حداقل یک جواب ضعیف غیر بدیهی دارد.

اثبات. فرض کنید که $\lambda \in]0, \lambda'[$ ثابت باشد. از (۲۷)، $\underline{\eta} > 0$ به اندازه کافی کوچک وجود دارد بطوریکه

$$\frac{(a_2 H + 1)}{pH} (\tau \underline{\eta})^p < 1,$$

و

$$\frac{\left(\frac{R(x.)}{2}\right)^N |B(0,1)|}{\frac{(a_2 H+1)}{pH} \tau^p} \frac{F(\underline{\eta})}{\underline{\eta}^p} > \frac{1}{\lambda}.$$

بنابراین داریم

$$\lambda \in]0, \lambda'[\subseteq \left] \frac{\frac{(a_2 H+1)}{pH} \tau^p}{\left(\frac{R(x.)}{2}\right)^N |B(0,1)|} \frac{\underline{\eta}^p}{F(\underline{\eta})}, \frac{\left(\frac{a_1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}}{k_1 c_1 + \frac{k_2}{q} c_q^q \left(\frac{p}{a_1}\right)^{\frac{q-1}{p}}} \right[.$$

اکنون می‌توانیم قضیه ۲.۳ را بکار برده تا نتیجه بدست آید. □

مثال ۱.۳. قرار دهید

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 + t \sin t + \cos t - 1, & t \geq 0, \\ -\frac{1}{2}t^2 - t \sin t - \cos t + 1, & t < 0, \end{cases} \tag{۳۰}$$

به عنوان پتانسیلی از تابع $f(t) = |t| + |t|(۱ + \cos t)$، برای هر $t \in \mathbb{R}$.

اگر فرض کنیم که $p > ۲$ آنگاه یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که شرایط (۲۶) و (۲۷) صدق می‌کنند. بنابراین وجود دارد $\lambda' > ۰$ بطوریکه برای هر $\lambda \in]۰, \lambda'[$ مساله

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(x, \nabla u) + \dfrac{|u|^{p-۲}u}{|x|^p} = \lambda |u|(۱ + \cos u) & \text{در} \Omega, \\ u = ۰ & \text{روی} \partial\Omega, \end{cases}$$

حداقل یک جواب ضعیف غیربدیهی دارد.

۴ سه جواب ضعیف

در این بخش، ابزار اصلی ما قضیه سه نقطه بحرانی است که در اینجا در یک فرم مناسب یادآوری می‌کنیم.

قضیه ۱.۴. ([۳]، نتیجه ۱-۳) فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی و انعکاسی باشد. تابعک $\Phi : X \to \mathbb{R}$ محدب اجباری و مشتق پذیری گاتو بطور پیوسته باشد که مشتق آن دارای یک وارون پیوسته روی X^* است و $\Psi : X \to \mathbb{R}$ یک تابعک بطور پیوسته مشتق پذیر گاتو باشد که مشتق آن فشرده است بطوریکه

(۱) $\inf_X \Phi = \Phi(۰) = \Psi(۰) = ۰$.

(۲) برای هر $\lambda > ۰$ و برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ که مینیمم‌های موضعی برای تابعک $\Phi - \lambda\Psi$ هستند بطوریکه $\Psi(x_۱) \geq ۰$ و $\Psi(x_۲) \geq ۰$ داریم

$$\inf_{s \in [۰,۱]} \Psi(sx_۱ + (۱ - s)x_۲) \geq ۰.$$

فرض کنید که ثابت‌های مثبت $r_۱, r_۲$ و $\underline{x} \in X$ وجود دارند که $r_۱ < \Phi(\underline{x}) < \frac{r_۲}{۲}$، بطوریکه

$$(b_۱) \quad \frac{\sup_{x \in \Phi^{-۱}(]-\infty, r_۱[)} \Psi(x)}{r_۱} < \frac{۲\Psi(\underline{x})}{۳\Phi(\underline{x})},$$

$$(b_۲) \quad \frac{\sup_{x \in \Phi^{-۱}(]-\infty, r_۲[)} \Psi(x)}{r_۲} < \frac{\Psi(\underline{x})}{۳\Phi(\underline{x})}.$$

آنگاه برای هر

$$\lambda \in \left(\frac{۳\Phi(\underline{x})}{۲\Psi(\underline{x})}, \min\left\{ \frac{r_۱}{\sup_{x \in \Phi^{-۱}(]-\infty, r_۱[)} \Psi(x)}, \frac{\frac{r_۲}{۲}}{\sup_{x \in \Phi^{-۱}(]-\infty, r_۲[)} \Psi(x)} \right\} \right),$$

تابعک $\Phi - \lambda\Psi$ حداقل دارای سه نقطه بحرانی متمایز می‌باشد که در $\Phi^{-1}(]-\infty, r_2[)$ قرار دارند.

اکنون نتیجه مهم این بخش را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲.۴. فرض کنید $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودوری غیر منفی باشد بطوریکه شرایط (f_1) برقراراست. همچنین فرض کنید $x_0 \in \Omega$ و سه ثابت مثبت θ_1, θ_2 و η وجود دارند با

$$\frac{2^{1/p}}{\tau}\theta_1 < \eta < \left(\frac{a_1 H}{2(a_2 H + 1)}\right)^{1/p} \frac{1}{\tau}\theta_2, \tag{۳۱}$$

جاییکه H در (۷) تعریف شده است بطوریکه

$$(i_1) \quad \frac{p}{a_1}\left(k_1 c_1 \theta_1^{1-p} + \frac{k_2}{q} c_q^q \theta_1^{q-p}\right) < \frac{pH(R(x_0))^p}{3[2^{p-1}(2^N - 1)](a_2 H + 1)} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{x \in B(x_0, \frac{R(x_0)}{2})} F(x, \eta)}{\eta^p},$$

$$(i_2) \quad \frac{p}{a_1}\left(k_1 c_1 \theta_2^{1-p} + \frac{k_2}{q} c_q^q \theta_2^{q-p}\right) < \frac{pH(R(x_0))^p}{3[2^p(2^N - 1)](a_2 H + 1)} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{x \in B(x_0, \frac{R(x_0)}{2})} F(x, \eta)}{\eta^p}.$$

آنگاه برای هر

$$\lambda \in \Lambda := \left]\frac{3[2^{p-1}(2^N - 1)](a_2 H + 1)}{pH(R(x_0))^p} \frac{\eta^p}{\operatorname{ess\,inf}_{x \in B(x_0, \frac{R(x_0)}{2})} F(x, \eta)}, \min\left\{\frac{a_1}{p}\left(\frac{1}{k_1 c_1 \theta_1^{1-p} + \frac{k_2}{q} c_q^q \theta_1^{q-p}}\right), \frac{a_1}{2p}\left(\frac{1}{k_1 c_1 \theta_2^{1-p} + \frac{k_2}{q} c_q^q \theta_2^{q-p}}\right)\right\}\right[, \tag{۳۲}$$

و برای هر تابع کراندار و پیوسته غیر منفی $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد $\delta'_{\lambda,h} > 0$ با

$$\delta'_{\lambda,h} := \min\left\{\frac{a_1 - p\lambda(k_1 c_1 \theta_1^{1-p} + \frac{k_2}{q} c_q^q \theta_1^{q-p})}{p\,(\sup_{t \in \mathbb{R}} h(t))\,\|\alpha\|_{L^\gamma(\Omega)} c_{\gamma'} \theta_1^{1-p}}, \frac{a_1 - 2p\lambda(k_1 c_1 \theta_2^{1-p} + \frac{k_2}{q} c_q^q \theta_2^{q-p})}{2p\,(\sup_{t \in \mathbb{R}} h(t))\,\|\alpha\|_{L^\gamma(\Omega)} c_{\gamma'} \theta_2^{1-p}}\right\}, \tag{۳۳}$$

بطوریکه برای هر $\mu \in [0, \delta'_{\lambda,h}[$ مساله (۱) حداقل سه جواب ضعیف غیر منفی متمایز u_i $(i = 1, 2, 3)$ دارد بطوریکه $\|u_i\| < \theta_2$.

وقتی که غیرخطی بودن f وابسته به x نیست آنگاه قضیه ۲.۴ بصورت زیر می‌شود.

قضیه ۳.۴. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته غیر منفی باشد بطوریکه

$$f(t) \le k_1 + k_2 |t|^{q-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{۳۴}$$

جاییکه k_1, k_2 ثابت‌های مثبت و $1 < q \le p$. برای همه $t \in \mathbb{R}$ قرار دهید $F(t) = \int_0^t f(\xi)\,d\xi$. همچنین فرض کنید که $x_0 \in \Omega$ وجود دارد با $R(x_0) = \max_{x \in \Omega} R(x)$ و سه ثابت مثبت θ_1, θ_2

و η صادق در (۳۱) بطوریکه

$$(i'_1)\quad \frac{p}{a_1}\left(k_1c_1\theta_1^{1-p}+\frac{k_2}{q}c_q^q\theta_1^{q-p}\right)<\frac{pH(R(x.))^p}{3[2^{p-1}(2^N-1)(a_2H+1)]}\frac{F(\eta)}{\eta^p},$$

$$(i'_2)\quad \frac{p}{a_1}\left(k_1c_1\theta_2^{1-p}+\frac{k_2}{q}c_q^q\theta_2^{q-p}\right)<\frac{pH(R(x.))^p}{3[2^p(2^N-1)(a_2H+1)]}\frac{F(\eta)}{\eta^p}.$$

آنگاه برای هر

$$\lambda\in\Lambda':=\left]\frac{3[2^{p-1}(2^N-1)](a_2H+1)}{pH(R(x.))^p}\frac{\eta^p}{F(\eta)},\min\left\{\frac{a_1}{p}\left(\frac{1}{k_1c_1\theta_1^{1-p}+\frac{k_2}{q}c_q^q\theta_1^{q-p}}\right),\frac{a_1}{2p}\left(\frac{1}{k_1c_1\theta_2^{1-p}+\frac{k_2}{q}c_q^q\theta_2^{q-p}}\right)\right\}\right[, \tag{۳۵}$$

و برای هر تابع کراندار و پیوسته غیر منفی $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ وجود دارد $\delta''_{\lambda,h}>0$ داده شده توسط

$$\delta''_{\lambda,h}:=\min\left\{\frac{a_1-p\lambda(k_1c_1\theta_1^{1-p}+\frac{k_2}{q}c_q^q\theta_1^{q-p})}{p(\sup_{t\in\mathbb{R}}h(t))c_1\theta_1^{1-p}},\frac{a_1-2p\lambda(k_1c_1\theta_2^{1-p}+\frac{k_2}{q}c_q^q\theta_2^{q-p})}{2p(\sup_{t\in\mathbb{R}}h(t))c_1\theta_2^{1-p}}\right\}, \tag{۳۶}$$

بطوریکه برای هر $\mu\in\left[0,\delta''_{\lambda,h}\right[$ مساله

$$\begin{cases}-\operatorname{div}A(x,\nabla u)+\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^p}=\lambda f(u)+\mu h(u) & \text{در}\ \Omega,\\ u=0 & \text{روی}\ \partial\Omega,\end{cases} \tag{۳۷}$$

حداقل سه جواب ضعیف غیر منفی متمایز u_i $(i=1,2,3)$ دارد بطوریکه $\|u_i\|<\theta_2$.

اثبات. فرض کنید $\gamma'=1$ و $\gamma=\infty$ و $\alpha\equiv 1$. بنابراین با بکار بردن قضیه ۲.۴ نتیجه بدست می‌آید. □

تذکر ۱.۴. همانطور که قبلاً در قضیه ۳.۴ نشان داده شده بود با انتخاب $R(x.)=\max_{x\in\Omega}R(x)$، طول بازه Λ' افزایش می‌یابد و در این مورد ما انتخاب‌های بیشتری برای λ جهت پیدا کردن جواب مساله (۱) خواهیم داشت.

تذکر ۲.۴. همانطور که دیده شد، قضیه ۲.۴ به هیچ رفتار خاصی از $f(x,0)$ در صفر نیازی ندارد. اگر یک نوع خاص از $(p-1)$ـبالاخطی در صفر را اضافه کنیم، ممکن است یک بازه بیکران از λ برای یک مورد خاص از مساله (۱) را بدست آوریم.

قضیه ۴.۴. فرض کنید $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع کاراتئودوری غیر منفی باشد بطوریکه برای همه $1<q<p$ شرط (f_1) برقرار باشد و

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{|t|^{p-1}}=0\quad \text{تقریباً همه جا یکنواخت در}\ \Omega. \tag{۳۸}$$

بعلاوه فرض کنید که $\eta > ۰$ و $x_{۰} \in \Omega$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$\operatorname{ess\,inf}_{x\in B(x_{۰},\frac{R(x_{۰})}{۲})} F(x,\eta) > ۰.$$

آنگاه برای هر $\lambda > \lambda^{*}$ جاییکه

$$\lambda^{*} = \frac{۳[۲^{p-۱}(۲^{N}-۱)](a_{۲}H+۱)}{pH(R(x_{۰}))^{p}} \frac{\eta^{p}}{\operatorname{ess\,inf}_{x\in B(x_{۰},\frac{R(x_{۰})}{۲})} F(x,\eta)}, \qquad (۳۹)$$

مساله

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(x,\nabla u) + \dfrac{|u|^{p-۲}u}{|x|^{p}} = \lambda f(x,u) & \text{در}\Omega, \\ u = ۰ & \text{روی}\partial\Omega, \end{cases} \qquad (۴۰)$$

حداقل سه جواب ضعیف غیر منفی دارد.

اثبات. از (۳۸) برای هر $\varepsilon > ۰$ وجود دارد $\delta \in]۰,۱[$ مستقل روی ε بطوریکه $f(x,t) \le \varepsilon|t|^{p-۱}$ تقریباً همه جا در Ω و برای همه $-\delta < t < \delta$. محاسبات استاندارد نشان می‌دهد که

$$f(x,t) \le \varepsilon|t|^{p-۱} + k_{۳}|t|^{\tau-۱} \quad \text{و برای همه}\Omega\text{تقریباً همه جا در } t\in\mathbb{R}, \qquad (۴۱)$$

جاییکه $\tau \in]p, \frac{p^{*}}{\gamma'}[$ و $k_{۳} = \max\left\{\varepsilon, \frac{k_{۱}+k_{۲}}{\delta^{\tau-۱}}\right\}$.

از (۱۱) و (۴۱) و همچنین با در نظر گرفتن $\mu = ۰$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{\sup_{u\in\Phi^{-۱}(]-\infty,r[)}\Psi(u)}{r} &\le \frac{\frac{\varepsilon}{p}\int_{\Omega}|u(x)|^{p}\,dx + \frac{k_{۳}}{\tau}\int_{\Omega}|u(x)|^{\tau}\,dx}{r} \\ &\le \lim_{r\to ۰^{+}} \frac{\frac{\varepsilon}{a_{۱}}c_{p}^{p}r + \frac{k_{۳}}{\tau}c_{\tau}^{\tau}\left(\frac{pr}{a_{۱}}\right)^{\frac{\tau}{p}}}{r} \\ &= \lim_{r\to ۰^{+}} \left(\frac{\varepsilon}{a_{۱}}c_{p}^{p} + \frac{k_{۳}}{\tau}c_{\tau}^{\tau}\left(\frac{p}{a_{۱}}\right)^{\frac{\tau}{p}} r^{\frac{\tau}{p}-۱}\right). \end{aligned}$$

بنابراین از آنجایی که $\varepsilon > ۰$ و $\tau > p$ دلخواه فرض شده‌اند پس داریم

$$\lim_{r\to ۰^{+}} \frac{\sup_{u\in\Phi^{-۱}(]-\infty,r[)}\Psi(u)}{r} = ۰.$$

از این رو برای ثابت $\lambda' \in]\lambda^{*}, +\infty[$ وجود دارند $r'_{۱}, r'_{۲}$ مستقل روی λ' به قدر کافی کوچک بطوریکه

$$\frac{\sup_{u\in\Phi^{-۱}(]-\infty,r'_{۱}[)}\Psi(u)}{r'_{۱}} < \frac{۱}{\lambda'} < \frac{۱}{\lambda^{*}} \le \frac{۲}{۳}\frac{\Psi(u_{\eta})}{\Phi(u_{\eta})}, \qquad (۴۲)$$

و

$$\frac{۲\sup_{u\in\Phi^{-۱}(]-\infty,r'_۲[)}\Psi(u)}{r'_۲}<\frac{۱}{\lambda'}<\frac{۱}{\lambda^*}\leq\frac{۲}{۳}\frac{\Psi(u_\eta)}{\Phi(u_\eta)}, \tag{۴۳}$$

جاییکه $u_\eta\in X$ تابع تعریف شده در (مرجع مربوطه) است. بنابراین شرایط $b_۱$ و $b_۲$ از قضیه ۱.۴ صادق هستند با $r_۲=r'_۲$ و $r_۱=r'_۱$ و $\underline{x}=u_\eta$ و بنابراین نتیجه مطلوب از قضیه بدست می‌آید. □

اکنون به یکی از پیامدهای قضیه ۴.۴ اشاره می‌کنیم.

نتیجه ۱.۴. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته غیر صفر و غیرمنفی باشد بطوریکه (۲۶) برقرار و

$$\lim_{t\to۰^+}\frac{f(t)}{t^{p-۱}}=۰. \tag{۴۴}$$

همچنین فرض کنید که $\eta>۰$ و $x_۱\in\Omega$ وجود دارد بطوریکه $F(\eta)>۰$. آنگاه برای هر $\lambda>\lambda_*$ جاییکه

$$\lambda_*=\frac{۳[۲^{p-۱}(۲^N-۱)](a_۲H+۱)}{pH(R(x.))^p}\frac{\eta^p}{F(\eta)}, \tag{۴۵}$$

مساله

$$\begin{cases}-\operatorname{div}A(x,\nabla u)+\dfrac{|u|^{p-۲}u}{|x|^p}=\lambda f(u) & \text{در}\Omega,\\ u=۰ & \text{روی}\partial\Omega,\end{cases} \tag{۴۶}$$

حداقل سه جواب ضعیف غیر منفی دارد.

مثال ۱.۴. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع تعریف شده بصورت زیر باشد:

$$f(t)=|t|^{p-۱}\ln(۲-\cos t).$$

ساده است که همه فرضیات نتیجه ۱.۴ در آن صدق می‌کند. از این رو $\lambda_*>۰$ وجود دارد بطوریکه برای هر $\lambda>\lambda_*$ مساله

$$\begin{cases}-\operatorname{div}A(x,\nabla u)+\dfrac{|u|^{p-۲}u}{|x|^p}=\lambda|u|^{p-۱}\ln(۲-\cos u) & \text{در}\Omega,\\ u=۰ & \text{روی}\partial\Omega,\end{cases}$$

حداقل سه جواب ضعیف غیر منفی دارد.

مراجع

[1] D. Arcoya, J. Carmona, A nondifferentiable extension of a theorem of Pucci and Serrin and applications, J. Differential Equations. 235 (2007), 683–700.

[2] G. Bonanno, A critical point theorem via the Ekeland variational principle, Nonlinear Analysis., 75 (2012), 2992–3007.

[3] G. Bonanno, P. Candito, Non-differentiable functionals and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearities, J. Differential Equations. 244 (2008), 3031–3059.

[4] G. Bonanno, P. Candito, R. Livrea, N.S. Papageorgiou, Existence, nonexistence and uniqueness of positive solutions for nonlinear eigenvalue problems, Commun. Pure Appl. Anal. 16 (2017), 1169–1188.

[5] G. Bonanno, G. D, Agu´ı, R. Livrea, Triple solutions for nonlinear elliptic problems driven by a non-homogeneous operator, Nonlinear Anal., 197 (2020), 1-17.

[6] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, in: Universitext, Springer, New York, 2011, xiv+599 pp.

[7] F. Cˆırstea, V. Rˇadulescu, Multiple solutions of degenerate perturbed elliptic problems involving a subcritical Sobolev exponent, Topol. Methods Nonlinear Anal. 15 (2000), 281–298.

[8] F. Colasuonno, P. Pucci, C. Varga, Multiple solutions for an eigenvalue problem involving p-Laplacian type operators, Nonlinear Anal. 75 (2012), 4496–4512.

[9] R. Dautray, J L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, vol. 1: Physical Origins and Classical Methods. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1985.

[10] F. Demengel, E. Hebey, On some nonlinear equations involving the p-Laplacian with critical Sobolev growth, Adv. Differential Equations. 3 (1998), 533–574.

[11] Y. Deng, H. Pi, Multiple solutions for p-harmonic type equations, Nonlinear Anal. 71 (2009), 4952–4959.

[12] F. Faraci and R. Livrea, Bifurcation theorems for nonlinear problems with lack of compactness, Annales Polonici Mathematici. 82 (2003), 77–85.

[13] J. P. Garc´ıa Azorero and I. Peral, Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems, J. Differential Equations. 144 (1998), 441–476.

[14] N.Ghoussoub, C.Yuan, Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents, Trans. Am. Math. Soc. 352 (2000), 5703–5743.

[15] A. Krist´aly, H. Lisei, Cs. Varga, Multiple solutions for p-Laplacian type equations, Nonlinear Anal. 68 (2008), 1375–1381.

[16] N.S. Papageorgiou, P. Winkert, Positive solutions for nonlinear nonhomogeneous Dirichlet problems with concave-convex nonlinearities, Positivity. 20 (2016), 945–979.

[17] P. H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., vol. 65, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[18] G. Talenti, Best constants in sobolev inequality, Ann. Math. Pura Appl. 110 (1976), 353–372.

[19] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications, Springer, Vol. II. BerlinHeidelberg-New York 1985.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

انشعاب هاپف در یک سیستم شکار و شکارچی تاخیری

جواد حدادی [۱] رضا خوشسیر [۲] زهره اسکندری [۳] احمد رئیسی [۴] عقیل خلیلاوی [۵]

[۱,۲] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه شهرکرد
[۳] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه فسا
[۴] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
[۵] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این مطالعه به صورت تحلیلی به بررسی انشعاب هاپف در یک سیستم شکار و شکارچی از نوع تاخیری می پردازیم. در انتها با شبیه سازی عددی، قسمت های تحلیلی مربوط به این انشعاب را مورد تایید قرار می دهیم.

کلمات کلیدی: انشعاب هاپف، زمان تاخیر، شکار و شکارچی

۱ مقدمه

سیستم تاخیری شکار و شکارچی مورد نظر به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{dt} = ax(t)(۱ - x(t))(x(t) - b) - cx(t)y(t - \tau), \qquad (۱)$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(t)}{d + y(t)}(۱ - \frac{y(t)}{e + x(t)}).$$

[1] j1741366@gmail.com
[2] Khoshsiar@sci.sku.ac.ir
[3] z-eskandari@fasau.ac.ir
[4] ahmadreisy@yahoo.com
[5] aghilkh76@gmail.com

که همه پارامترها مثبت هستند و معنای هر پارامتر در مرجع [۲] آمده است. مطالعات بیشتر را در مراجع [۳، ۴] ببینید. به منظور بررسی انشعاب هاپف در این سیستم ابتدا نقاط تعادل آن را بدست می آوریم:

$$ax(۱-x)(x-b)-cxy=۰,$$
$$\frac{y}{d+y}(۱-\frac{y}{e+x})=۰.$$

پس داریم:

$$X_۰=(۰,۰),\qquad X_۱=(۰,e),\qquad X_۲=(b,۰),\qquad X_۳=(۱,۰),$$
$$X_{۴,۵}=(\frac{ab+a-c\mp a\sqrt{(c/a-b-۱)^۲-۴(ce/a+b)}}{۲a}),$$

با توجه به مطالب گفته شده در مرجع [۲] می دانیم احتمال انشعاب هاپف در نقطه تعادل $X_۵$ وجود دارد. از این رو ما نیز به دنبال انشعاب هاپف در این نقطه تعادل می باشیم.

۲ شرایط انشعاب هاپف

ماتریس ژاکوبین سیستم (۱) را در نقطه تعادل $X_۵$ بدست می آوریم. پس داریم:

$$\begin{pmatrix} \left(-۳{x_۵}^۲+(۲b+۲)\,x_۵-b\right)a-cy_۵ & -cx_۵e^{-\lambda\tau} \\ \frac{{y_۵}^۲}{(d+y_۵)(e+x_۵)^۲} & \frac{(e+x_۵-۲y_۵)d-{y_۵}^۲}{(d+y_۵)^۲(e+x_۵)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{۱۱} & c_{۱۲}e^{-\lambda\tau} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{pmatrix}$$

پس معادله مشخصه سیستم (۱) را در نقطه تعادل $X_۵$ به صورت زیر بدست می آوریم:

$$f(\lambda)=\lambda^۲+p_۱\lambda+p_۰+e^{-\lambda\tau}q_۰=۰,$$

که

$$p_۱=\frac{۱}{(d+y_۵)^۲(e+x_۵)^۲}(-۲e-۲x_۵)(-\frac{۳a\,{x_۵}^۲}{۲}+(b+۱)ax_۵-\frac{ba}{۲}-\frac{cy_۵}{۲})\times$$
$$((d^۲+۲dy_۵+{y_۵}^۲)x_۵+e\,{y_۵}^۲+۲edy_۵+d^۲e)-(-e-x_۵)(-de-dx_۵+۲dy_۵+{y_۵}^۲),$$
$$p_۰=-\frac{(۲e+۲x_۵)(-\frac{۳a\,{x_۵}^۲}{۲}+(b+۱)ax_۵-\frac{ba}{۲}-\frac{cy_۵}{۲})(-de-dx_۵+۲dy_۵+{y_۵}^۲)}{(d+y_۵)^۲(e+x_۵)^۲},$$
$$q_۰=\frac{cx_۵\,{y_۵}^۲}{(d+y_۵)(e+x_۵)^۲},$$

چون مرز پایداری و ناپایداری عبور مقدار ویژه از قسمت حقیقی صفر است پس فرض می کنیم تنها یک جفت مقدار ویژه با قسمت حقیقی صفر داشته باشیم یعنی $\lambda = i\omega_.$ و بقیه مقادیر ویژه قسمت حقیقی صفر نداشته باشند. بنابراین داریم:

$$f(I\omega_.) = -\omega_.^۲ + p_. + \cos(\omega_.\tau)\, q_. + \mathrm{I}\,(p_۱\omega_. - \sin(\omega_.\tau)\, q_.) = ۰,$$

با جداسازی قسمت حقیقی از قسمت موهومی و ساده سازی آنها داریم:

$$\omega_.^۴ + \left(p_۱^۲ - ۲p_.\right)\omega_.^۲ + p_.^۲ - q_.^۲ = ۰$$

از حل معادله بالا برحسب $\omega_.$، با شرط مثبت بودن آن، دلیلی برای وجود جفت مقدار ویژه موهومی محض و دلیلی برای وجود انشعاب هاپف است. با یافتن $\omega_.$ می توان τ^* را از رابطه زیر بدست آورد:

$$\tau_k = \frac{\arctan\left(\frac{p_۱\omega_.}{\omega_.^۲ - p_.}\right) + k\pi}{\omega_.}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

مینیمم $\tau_k > ۰$ را τ^* می نامیم و احتمال انشعاب هاپف را در این زمان تاخیر می دهیم. حال شرط تقاطعی انشعاب هاپف را بررسی می کنیم. با ناصفر بودن رابطه زیر

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-۱}\Big|_{\tau=\tau^*} &= -\frac{۲\lambda + p_۱ - \tau^*\,\mathrm{e}^{-\lambda\tau^*}q_.}{\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\tau^*}q_.} = \frac{-\sin(\omega_.\tau^*)\,p_۱ - ۲\cos(\omega_.\tau^*)\,\omega_.}{q_.\omega_.} \\ &= \frac{-۲\omega_.^۲ - p_۱^۲ + ۲p_.}{q_.^۲},\end{aligned}$$

شرط تقاطعی برقرار است. برای بررسی شرط غیر تباهیدگی جهت انشعاب هاپف را بدست می آوریم که در قسمت بعدی مورد بررسی قرار می گیرد.

۳ سناریو انشعاب هاپف

ابتدا با مقیاس کردن زمان به صورت $t \to t/\tau$ و با وارد کردن اختلال کوچک در زمان تاخیر به صورت $\tau = \tau^* + \mu$ سیستم (۱) را به صورت زیر داریم:

$$\dot{X} = L_\mu(X_t) + F(\mu, X_t), \qquad (۲)$$

که $X_t(\theta) = (x(t+\theta), y(t+\theta)^T)$، $L_\mu(x_t)$ قسمت خطی و $F(\mu, x_t)$ قسمت غیر خطی سیستم (۱) می باشند و به صورت زیر بدست می آیند:

$$L_\mu(\phi) = (\tau^* + \mu)\begin{pmatrix} b_{۱۱} & ۰ \\ b_{۲۱} & b_{۲۲}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_۱(۰) \\ \phi_۲(۰)\end{pmatrix} + (\tau^* + \mu)\begin{pmatrix} ۰ & c_{۱۲} \\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_۱(-۱) \\ \phi_۲(-۱)\end{pmatrix},$$

و

$$F(\mu,\phi)=(\tau^*+\mu)\begin{pmatrix} d_۱\phi_۱^۲(۰)+d_۲\phi_۱(۰)\phi_۱(-۱)+h.o.t \\ d_۳\phi_۱^۲(۰)+d_۴\phi_۱(۰)\phi_۲(۰)+d_۵\phi_۲^۲(۰)+h.o.t \end{pmatrix},$$

که

$$d_۱=a\left(b-۳x^*+۱\right),\qquad d_۲=-c,\qquad d_۳=-\frac{{y^*}^۲}{\left(d+y^*\right)\left(e+x^*\right)^۳},$$
$$d_۴=\frac{y^*\left(۲d+y^*\right)}{\left(d+y^*\right)^۲\left(e+x^*\right)^۲},\qquad d_۵=-\frac{d\left(d+e+x^*\right)}{\left(d+y^*\right)^۳\left(e+x^*\right)},$$

و $\phi(t)=(\phi_۱(\theta),\phi_۲(\theta))^T$. با توجه به قضیه نمایش ریس وجود دارد تابعی مانند $\eta(\theta,\mu)$ که $\theta\in[-۱,۰]$ به طوریکه

$$L_\mu(\phi)=\int_{-۱}^{۰} d\eta(\theta,\mu)\phi(\theta),\qquad \theta\in\mathbb{C},$$

و داریم:

$$\eta(\theta,\mu)=(\tau^*+\mu)\begin{pmatrix} b_{۱۱} & ۰ \\ b_{۲۱} & b_{۲۲}\end{pmatrix}\delta(\theta)-(\tau^*+\mu)\begin{pmatrix} ۰ & c_{۱۲} \\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\delta(\theta+۱),$$

که δ، دلتا دیراک است. حال تعریف می کنیم:

$$A(\mu)\phi(\theta)=\begin{cases}\frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta\in[-۱,۰),\\ \int_{-۱}^{۰} d\eta(\theta,\mu)\phi(\theta), & \theta=۰,\end{cases}$$

و

$$R(\mu)\phi(\theta)=\begin{cases}(۰,۰)^T, & \theta\in[-۱,۰),\\ F(\mu,\phi), & \theta=۰,\end{cases}$$

بنابراین

$$\dot{X}_t=A(\mu)x_t+R(\mu)x_t,$$

که $X_t(\theta) = X(t+\theta)$ و $\theta \in [۰, ۱]$، معادل با رابطه (۲) می باشد.حال ماتریس الحاقی A

$$A^*(\mu)\psi(s) = \begin{cases} \frac{-d\psi(s)}{ds}, & s \in [۰, ۱), \\ \int_{-۱}^{۰} d\eta^T(s,\mu)\psi(-s), & s = ۰, \end{cases}$$

و ضرب داخلی زیر را معرفی می کنیم:

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(۰)\phi(۰) - \int_{\theta=-۱}^{۰} \int_{\xi=۰}^{\theta} \bar{\xi}^T(\xi-\theta)d\eta(\theta)\phi(\xi)d\xi,$$

که $\eta(\theta) = \eta(\theta, ۰)$. با توجه به قسمت قبل می دانیم که $\pm iw^*\tau^*$ مقادیر ویژه $A(۰)$ هستند بنابراین مقادیر ویژه ماتریس الحاقی $A^*(۰)$ نیز می باشند. پس بردار ویژه $q(\theta) = (۱, \alpha)^T e^{iw^*\tau^*\theta}$ متناظر با مقدار ویژه $+iw^*\tau^*$ را از ماتریس $A(۰)$ بدست می آوریم و بردار ویژه $q^*(s) = B(۱, \alpha^*)^T e^{iw^*\tau^* s}$، متناظر با مقدار ویژه $-iw^*\tau^*$ را از ماتریس الحاقی $A^*(۰)$ بدست می آوریم. پس داریم:

$$\tau^* \begin{pmatrix} iw^* - b_{۱۱} & -c_{۱۲}e^{-iw^*\tau^*} \\ -b_{۲۱} & iw^* - b_{۲۲} \end{pmatrix} (q(۰)) = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}.$$

بنابراین $q(۰) = (۱, -\frac{b_{۱۱}-\mathrm{i}\omega_۰}{c_{۱۲}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_۰\tau}}) = (۱, \alpha)$ و $q^*(۰) = B(۱, -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_۰\tau}c_{۱۲}}{\mathrm{i}\omega_۰+b_{۲۲}})^T = B(۱, \alpha^*)^T$، حال با توجه $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = ۱$ و $\langle \bar{q}^*(s), q(\theta) \rangle = ۰$ داریم:

$$\begin{aligned} \langle q^*(s), q(\theta) \rangle &= \bar{q}^*(۰)q(۰) - \int_{\theta=-۱}^{۰} \int_{\xi=۰}^{\theta} \overline{q^*}^T(\xi-\theta)d\eta(\theta)q(\xi)d\xi \\ &= \bar{B}(۱ + \alpha\bar{\alpha}^*) - \int_{\theta=-۱}^{۰} \int_{\xi=۰}^{\theta} \bar{B}(۱, \bar{\alpha^*})e^{-i\omega_۰\tau^*(\xi-\theta)}d\eta(\theta)(۱, \alpha)^T e^{i\omega_۰\tau^*\xi}d\xi \\ &= \bar{B}(۱ + \alpha\bar{\alpha}^*) - \int_{\theta=-۱}^{۰} \theta\bar{B}(۱, \bar{\alpha^*})e^{i\omega_۰\tau^*\theta}d\eta(\theta)(۱, \alpha)^T \\ &= \bar{B}\Big(۱ + \alpha\bar{\alpha}^* + \tau^* c_{۱۲}\alpha e^{-i\omega_۰\tau^*}\Big), \end{aligned}$$

پس با نرمال سازی داریم:

$$\bar{B} = \frac{۱}{۱ + \alpha\bar{\alpha}^* + \tau^* c_{۱۲}\alpha e^{-i\omega_۰\tau^*}}.$$

حال به منظور بررسی پایداری جواب های تناوبی ضرایب فرم نرمال زیر را بدست می آوریم. جزییات بیشتر را در مراجع [۱] ببینید.

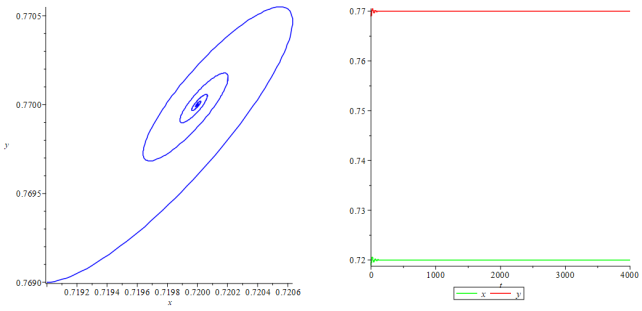
$$g(z,\bar{z}) = \tau^* \bar{B}(1,\bar{\alpha}^*) \begin{pmatrix} d_1 x_{1t}^2(0) + d_2 x_{1t}(0) x_{2t}(-1) \\ d_3 x_{1t}^2(0) + d_4 x_{1t}(0) x_{2t}(0) + d_5 x_{2t}^2(0) + h.o.t \end{pmatrix}$$

که

$$x_{1t}(0) = z + \bar{z} + W_{20}^{(1)}(0)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0) z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + \mathcal{O}(|z,\bar{z}|^3),$$
$$x_{2t}(0) = \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + W_{20}^{(2)}(0)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(0) z\bar{z} + W_{02}^{(2)}(0)\frac{\bar{z}^2}{2} + \mathcal{O}(|z,\bar{z}|^3),$$
$$x_{1t}(-1) = z e^{-i\omega_0\tau^*} + \bar{z} e^{i\omega_0\tau^*} + W_{11}^{(1)}(-1) z\bar{z} + W_{02}^{(1)}(-1)\frac{\bar{z}^2}{2} + \mathcal{O}(|z,\bar{z}|^3),$$
$$x_{2t}(-1) = \alpha z e^{-i\omega_0\tau^*} + \bar{\alpha}\bar{z} e^{i\omega_0\tau^*} + W_{20}^{(2)}(-1)\frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(-1) z\bar{z} + W_{02}^{(2)}(-1)\frac{\bar{z}^2}{2} + \mathcal{O}(|z,\bar{z}|^3$$

بنابراین ضرایب فرم نرمال به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned}
g_{20} =& \tau\bar{B}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w\tau}\alpha d_2 + \left(\alpha^2 d_5 + \alpha d_4 + d_3\right)\alpha^* + d_1\right), \\
g_{11} =& 2\tau\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w\tau}\alpha d_2}{2} + \frac{d_2\bar{\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}w\tau}}{2} + \left(\left(d_5\alpha + \frac{d_4}{2}\right)\bar{\alpha} + \frac{\alpha d_4}{2} + d_3\right)\alpha^* + d_1\right)\bar{B}, \\
g_{02} =& \tau\bar{B}\left(d_2\bar{\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}w\tau} + \left(\bar{\alpha}^2 d_5 + \bar{\alpha} d_4 + d_3\right)\alpha^* + d_1\right), \\
g_{21} =& \frac{\bar{B}\,W_{20}^{(1)}(0)\tau\alpha^*\bar{\alpha}d_4}{2} + \frac{\tau\bar{B}\alpha d_2\,W_{11}^{(1)}(0)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w\tau}} + \frac{\tau\bar{B}d_2\bar{\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}w\tau}\,W_{20}^{(1)}(0)}{2} + \bar{B}\,W_{11}^{(2)}(0)\alpha\tau\alpha^* d_5 + \\
& \bar{B}\,W_{20}^{(2)}(0)\tau\alpha^*\bar{\alpha}d_5 + \bar{B}\,W_{11}^{(1)}(0)\alpha\tau\alpha^* d_4 + 2\tau\bar{B}\,W_{20}^{(2)}(0)d_1 + \tau\bar{B}\,W_{20}^{(1)}(0)d_1 + \\
& \frac{\tau\bar{B}d_2\,W_{20}^{(2)}(1)}{2} + \frac{\tau\bar{B}d_2\,W_{11}^{(2)}(1)}{2} + 2\bar{B}\,W_{11}^{(1)}(0)\tau\alpha^* d_3 + \\
& \bar{B}\,W_{20}^{(1)}(0)\tau\alpha^* d_3 + \frac{\bar{B}\,W_{11}^{(2)}(0)\tau\alpha^* d_4}{2} + \frac{\bar{B}\,W_{20}^{(2)}(0)\tau\alpha^* d_4}{2},
\end{aligned}$$



شکل ۱: نمای فاز سیستم در $\tau = ۰$

پس داریم:

$$C_۱(۰) = \frac{i}{۲\tau w}\left(g_{۱۱}g_{۲۰} - ۲|g_{۱۱}|^۲ - \frac{|g_{۰۲}|^۲}{۳}\right) + \frac{g_{۲۱}}{۲},$$
$$\mu_۲ = -\frac{\Re(C_۱(۰))}{\Re(\lambda'(\tau))},$$
$$\beta_۲ = ۲\Re(C_۱(۰)),$$
$$T_۲ = -\frac{\Im(C_۱(۰)) + \mu_۲\Im(\lambda'(\tau))}{w\tau}$$

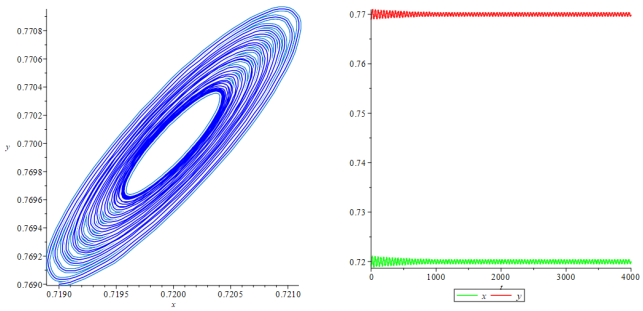
اگر $\mu_۲ > ۰$ $(\mu_۲ < ۰)$ باشد، انشعاب فوق بحرانی (زیر بحرانی) هاپف بوجود می آید و برای $\tau > \tau^*$ $(\tau < \tau^*)$ جواب های تناوبی منشعب شده وجود دارند. اگر $\beta_۲ > ۰$ $(\beta_۲ < ۰)$، جواب های تناوبی بوجود آمده پایدارند (ناپایدارند). اگر $T_۲ > ۰$ $(T_۲ < ۰)$، تناوب افزایش (کاهش) می یابد.

۴ شبیه سازی عددی

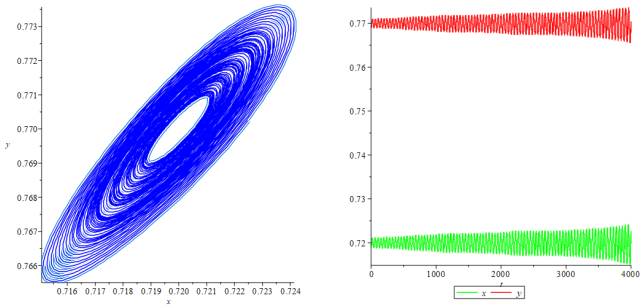
در این قسمت با استفاده از نرم افزار MAPLE به شبیه سازی عددی می پردازیم. با اختیار کردن مقادیر زیر برای پارامترهای سیستم (۱)

$$a = ۵, \quad b = ۰/۵, \quad c = ۰/۴, \quad d = ۳, \quad e = ۰/۰۵$$

در نقطه تعادل $X_۵$ در غیاب تاخیر زمانی ، حالت پایداری اتفاق می افتد. شکل ۱ را ببینید. هر چه زمان تاخیر را افزایش دهیم به سمت انشعاب هاپف پیش می رویم تا در $\tau = \tau^*$ جواب های تناوبی به وضوح مشخص است. شکل ۲ و ۵ را ببینید. حال ضرایب فرم نرمال انشعاب هاپف را بدست می



شکل ۲: نمای فاز سیستم در $\tau = ۰/۶$



شکل ۳: نمای فاز سیستم در $\tau = \tau^* = ۰/۶۴۵۵۶۴۸۴۷۷$

آوریم:

$$g_{۱۱} = -۲/۲۰۵۹۴۳۱۱۹ + ۴/۳۷۵۸۳۲۳۸۲i, \qquad g_{۲۰} = -۲/۳۵۹۱۱۸۵۵۳ + ۰/۱۵۶۶۰۸۲۴۰۵i,$$
$$g_{۲۱} = -۴۳۶/۸۱۰۷۷۹۲ + ۶۱۵/۵۴۱۵۸۶۶i, \qquad g_{۰۲} = -۲/۳۰۸۴۹۳۸۲۴ - ۰/۱۶۹۰۱۵۰۶۸۴i,$$

بنابراین مقادیر زیر را داریم:

$$\beta = -۳۱۶/۲۷, \qquad \mu = -۴۱۸۹/۷۱۷۸۷۲, \qquad C_۱(۰) = -۱۵۸/۱۳۹۹۶۴۴ + ۵۱/۹۰۳۴۱۷۱i,$$
$$T_۲ = -۵۸۶/۳۹۱۵۵۴۹,$$

که $\mu < ۰$ نشان میدهد انشعاب هاپف زیر بحرانی است، $\beta_۲ < ۰$ نشان می دهد جواب های تناوبی بوجود امده ناپایدارند و $T_۲ < ۰$ نشان می دهد تناوب در حال افزایش است.

۵ نتیجه گیری

در این مطالعه به بررسی یک سیستم شکار و شکارچی از نوع تاخیری پرداختیم. انشعاب هاپف از این سیستم را بررسی کردیم و با شبیه سازی عددی نمای فاز سیستم را در قبل و حین انشعاب هاپف رسم کردیم.

مراجع

[1] Hassard, B.D., Kazarinoff, N.D. and Wan, Y.H., 1981. Theory and applications of Hopf bifurcation (Vol. 41). CUP Archive.

[2] Wu, R. and Xiong, W., 2025. Bifurcation in a Leslie–Gower system with fear in predators and strong Allee effect in prey. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 30, pp.1-18.

[3] Surosh, A.H., Alidousti, J. and Ghaziani, R.K., 2022. Stability and Hopf bifurcation analysis for a three-species food chain model with fear and two different delays. Computational and Applied Mathematics, 41(3), p.110.

[4] Surosh, A.H., Ghaziani, R.K. and Alidousti, J., 2023. Stabilization of Unstable Periodic Orbits in a Three-Dimensional Chaotic System Using Time-Delay Autosynchronization Control Method. Journal of Applied Nonlinear Dynamics, 12(03), pp.453-464.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

انشعابات در یک سیستم شکار و شکارچی

جواد حدادی [۱] احمد رئیسی [۲] رضا خوشسیر [۳] زهره اسکندری [۴] عقیل خلیلاوی [۵]

[۱,۳] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه شهرکرد
[۲] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
[۴] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه فسا
[۵] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این مطالعه به بررسی یک سیستم شکار و شکارچی با برداشت ثابت می پردازیم، ابتدا انشعابات هم بعد یک همچون فلیپ و نیمارک-ساکر از آن را تجزیه و تحلیل می کنیم. سپس نمای فاز و دیاگرام انشعابات را رسم می کنیم.

کلمات کلیدی: سیستم شکار و شکارچی، انشعاب فلیپ، انشعاب نیمارک-ساکر

۱ مقدمه

در این مطالعه، یک سیستم شکارچی-شکارچی با برداشت ثابت بررسی می‌شود. ابتدا، انشعابات آن تجزیه و تحلیل می‌شود [۱، ۲، ۳] با استفاده از شبیه‌سازی‌های عددی، رفتارهای دینامیکی سیستم در حضور برداشت ثابت بررسی می‌شود. نتایج این مطالعه می‌تواند به درک بهتر رفتار سیستم‌های شکارچی-شکارچی تحت برداشت مداوم کمک کند و راهکارهایی برای مدیریت بهتر این سیستم‌ها ارائه دهد. سیستم زیر را در نظر بگیرید [۴]:

[1] j1741366@gmail.com
[2] ahmadreisy@yahoo.com
[3] Khoshsiar@sci.sku.ac.ir
[4] z-eskandari@fasau.ac.ir
[5] aghilkh76@gmail.com

$$\begin{cases} x \longrightarrow x + h(x(۱ - x) - xy) \\ y \longrightarrow y + h(y(\delta - \frac{\beta y}{x}) - h_۱) \end{cases} \quad (۱)$$

سیستم دارای دو نقطه ثابت مثبت به صورت زیر است:

$$x_{۲,۳} = \frac{۲\beta + \delta - h_۱ \pm \sqrt{(\delta - h_۱)^۲ - ۴\beta h_۱}}{۲(\beta + \delta)} \quad (۲)$$
$$y_{۲,۳} = ۱ - x_{۲,۳} \Longrightarrow y_{۲,۳} = \frac{\delta + h_۱ \mp \sqrt{(\delta - h_۱)^۲ - ۴\beta h_۱}}{۲(\beta + \delta)}$$

که این دو نقطه تعادل را $E_۲$ و $E_۳$ می نامیم و در حالت ادغام شدن این دو نقطه تعادل آنها را $E_۱$ می نامیم.

۲ انشعابات

۱.۲ انشعاب فلیپ در نقطه ثابت $E_۲$

انشعاب فلیپ را در نقطه ثابت $E_۲$ در $h_. = \hat{h}_۲ = \frac{N + \sqrt{N^۲ + ۴\sqrt{G}}}{\sqrt{G}}$ بررسی میکنیم،ابتدا سیستم را حول نقطه ثابت بازنویسی می کنیم:

$$\begin{cases} x \longrightarrow x + (h_. + h^*)(x(۱ - x) - xy) \\ y \longrightarrow y + (h_. + h^*)(y(\delta - \frac{\beta y}{x}) - h_۱) \end{cases} \quad (۳)$$

که $| h^*| \ll ۱$.سپس نقطه ثابت دستگاه را با تغییر متغیر $u = x - x_۲$ و $v = y - y_۲$ به مبدا منتقل میکنیم:

$$\begin{cases} u \to a_{۱۰}.u + a_{۰۱}.v + a_{۲۰}.u^۲ + a_{۱۱}.uv + a_{۰۱۱}vh^* + a_{۱۰۱}uh^* + a_{۲۰۱}u^۲h^* + a_{۱۱۱}uvh^* \\ v \to b_{۱۰}.u + b_{۰۱}.v + b_{۲۰}.u^۲ + b_{۱۱}.uv + b_{۰۲}.v^۲ + b_{۱۰۱}uh^* + b_{۰۱۱}vh^* + b_{۳۰}.u^۳ + \\ \quad b_{۲۱۰}.u^۲v + b_{۱۲۰}.uv^۲ + b_{۱۱۱}uvh^* + b_{۲۰۱}u^۲h^* + b_{۰۲۱}v^۲h^* + O\big((|u| + |v| + |h^*|)^۴\big) \end{cases}$$

به طوریکه

$$a_{۱..} = -x_۲h_. + ۱ \qquad a_{.۱.} = -x_۲h_. \qquad a_{۲..} = -h_. \qquad a_{۱۱.} = -h_. \qquad a_{۱.۱} = -x_۲$$

$$a_{.۱۱} = -x_۲ \qquad a_{۱۱۱} = -۱ \qquad a_{۲.۱} = -۱$$

$$b_{۱..} = \frac{h_.by_۲^۲}{x_۲^۲} \qquad b_{.۱.} = \frac{-۲bh_.y_۲ + \delta h_.x_۲ + x_۲}{x_۲} \qquad b_{۲..} = -\frac{h_.by_۲^۲}{x_۲^۳} \qquad b_{.۲.} = -\frac{h_.b}{x_۲}$$

$$b_{۱.۱} = \frac{by_۲^۲}{x_۲^۲} \qquad b_{.۱۱} = \frac{-۲by_۲ + dx_۲}{x_۲} \qquad b_{۳..} = \frac{h_.by_۲^۲}{x_۲^۴} \qquad b_{۲۱.} = \frac{-۲bh_.y_۲}{x_۲^۳}$$

$$b_{۱۲.} = \frac{h_.b}{x_۲^۲} \qquad b_{۱۱۱} = \frac{۲by_۲}{x_۲^۲} \qquad b_{۲.۱} = \frac{-by_۲^۲}{x_۲^۳} \qquad b_{.۲۱} = \frac{-b}{x_۲}$$

حال با تبدیل خطی روبه رو قسمت خطی را به فرم جردن تبدیل می کنیم:

$$P = \begin{pmatrix} a_{.۱.} & a_{.۱.} \\ -۱ - a_{۱..} & \lambda - a_{۱..} \end{pmatrix}$$

که $\lambda = \lambda_۲ = \frac{Nh}{۲} + ۱ + \frac{\sqrt{N^۲h^۲ + ۴\sqrt{G}h^۲}}{۲}$ بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

پس دستگاه تبدیل می شود به

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_۱(\tilde{x}, \tilde{y}, h^*) \\ f_۲(\tilde{x}, \tilde{y}, h^*) \end{pmatrix}$$

که

$$\begin{aligned} f_۱(\tilde{x}, \tilde{y}, h^*) =& \Big(\frac{-b_{۲..}a_{.۱.} + a_{۲..}(\lambda - a_{۱..})}{a_{.۱.}(\lambda + ۱)}\Big)u^۲ + \Big(\frac{-b_{۱۱.}a_{.۱.} + (\lambda - a_{۱..})a_{۱۱.}}{a_{.۱.}(\lambda + ۱)}\Big)uv + \Big(\frac{-b_{.} \\ & \Big(\frac{-b_{۱.۱}a_{.۱.} + a_{۱.۱}(\lambda - a_{۱..})}{a_{.۱.}(\lambda + ۱)}\Big)uh^* + \Big(\frac{-b_{.۱۱}a_{.۱.} + a_{.۱۱}(\lambda - a_{۱..})}{a_{.۱.}(\lambda + ۱)}\Big)vh^* + \Big(\frac{-}{\lambda} \\ & \Big(\frac{-b_{۱۲.}}{\lambda + ۱}\Big)uv^۲ + \Big(\frac{-b_{۳..}}{\lambda + ۱}\Big)u^۳ + \Big(\frac{-b_{۲.۱}a_{.۱.} + a_{۲.۱}(\lambda - a_{۱..})}{a_{.۱.}(\lambda + ۱)}\Big)u^۲h^* + \Big(\frac{-b_{.۲۱}}{\lambda + ۱}\Big)v^۲ \\ & \Big(\frac{-b_{۱۱۱}a_{.۱.} + a_{۱۱۱}(\lambda - a_{۱..})}{a_{.۱.}(\lambda + ۱)}\Big)uvh^*, \end{aligned}$$

و

$$u = a_{۰۱۰}\tilde{x} + a_{۰۱۰}\tilde{y}, \qquad v = (-۱ - a_{۱۰۰})\tilde{x} + (\lambda - a_{۱۰۰})\tilde{y}$$

حال با توجه به قضیه منیفلد مرکزی ، منیفلد مرکزی دستگاه را حول همسایگی $h^* = ۰$ بررسی میکنیم

$$\begin{aligned}
W^c(۰,۰,۰) =& (\tilde{x}, \tilde{y}, h^*) \in \Re^۳ : \tilde{y} = c_۱\tilde{x}^۲ + c_۲\tilde{x}h^* + c_۳h^{*۲} + O\big((|\ \tilde{x}|\ + |\ h^*|\ )^۳\big) \\
c_۱ =& \frac{\big[(a_{۱۱۰} + b_{۰۲۰})b_{۱۰۰}^۲ - (b_{۰۱۰} + ۱)(a_{۲۰۰} - b_{۱۱۰})b_{۱۰۰} - b_{۲۰۰}(b_{۰۱۰} + ۱)^۲\big]a_{۰۱۰}^۲}{(b_{۰۱۰} + ۱)(a_{۰۱۰}b_{۱۰۰} + b_{۰۱۰}^۲ - ۱)(\lambda + ۱)} \\
c_۲ =& \frac{-a_{۰۱۰}^۲b_{۱۰۱} - (-b_{۰۱۱} + a_{۱۰۱})(۱ + a_{۱۰۰})a_{۰۱۰} + a_{۰۱۰}(a_{۱۰۰} + ۱)^۲}{\big[۲a_{۰۱۰}b_{۱۰۰}(\lambda - ۲b_{۰۱۰} - ۱)a_{۱۰۰} + (\lambda - ۱)b_{۰۱۰} + ۲\lambda)\big]a_{۰۱۰}} \\
c_۳ =& ۰
\end{aligned}$$

بنابراین نگاشت کاهش یافته به منیفلد مرکزی به صورت زیر بدست می آید:

$$g : \tilde{x} \to -\tilde{x} + d_۱\tilde{x}^۲ + d_۲\tilde{x}h^* + d_۳\tilde{x}^۲h^* + d_۴\tilde{x}h^{*۲} + d_۵\tilde{x}^۳ + +O\big((|\ \tilde{x}|\ + |\ h^*|\ )^۳\big)$$

که d_1، d_2 و d_5 به صورت زیر هستند؛

$$d_1 = -a_{.1.}(-a_{2..}b_{.1.}^3 + (a_{.1.}b_{2..} + a_{11.}b_{1..} - 3a_{2..})b_{.1.}^2 + ((-b_{1..}b_{11.} + 2b_{2..})a_{.1.} + 2a_{11.}b_{1..} - 3a_{2..})b_{.1.} + (b_{.2.}b_{1..}^2 - b_{1..}b_{11.} + b_{2..})a_{.1.} + a_{11.}b_{1..} - a_{2..}) \Big/ ((a_{.1.}b_{.1.}^2 + 2b_{.1.} + 1)(b_{.1.} + 1)),$$

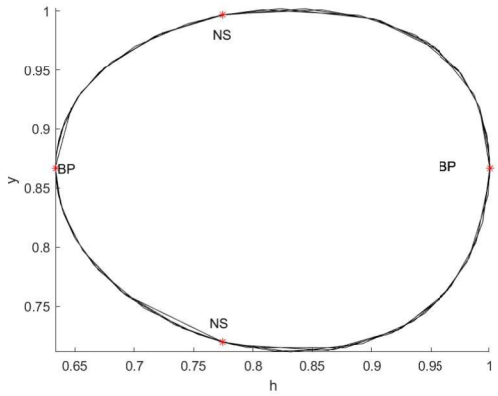
$$d_2 = \frac{a_{1.1}b_{.1.}^2 + (-a_{.1.}b_{1.1} - a_{.11}b_{1..} + 2a_{1.1})b_{.1.} + (b_{.11}b_{1..} - b_{1.1})a_{.1.} - a_{.11}b_{1..} + }{a_{.1.}b_{1..} + b_{.1.}^2 + 2b_{.1.} + 1}$$

$$\begin{aligned} d_5 =& 3a_{.1.}^2((-b_{12.}b_{1..}^2 + b_{21.}(b_{.1.} + 1)b_{1..} - b_{3..}(b_{.1.} + 1)^2)b_{1..}^2a_{.1.}^3 + \\ & 2((-b_{.1.}b_{12.} + b_{11.}(a_{11.} - b_{.2.})/2)b_{1..}^3 + (b_{.1.} + 1)(b_{21.}b_{.1.} - b_{2..}a_{11.} + b_{2..}b_{.2.} \\ & b_{11.}(a_{2..} - b_{11.})/2)b_{1..}^2 - (b_{3..}b_{.1.} - b_{2..}(a_{2..} - (3b_{11.})/2))(b_{.1.} + 1)^2b_{1..} + \\ & b_{2..}^2(b_{.1.} + 1)^3)(b_{.1.} + 1)a_{.1.}^2 + (-(a_{11.} - b_{.2.})(-2b_{.2.} + a_{11.})b_{1..}^3 + \\ & 3(b_{.1.} + 1)(-b_{.1.}b_{12.}/3 + (a_{2..} - (2b_{11.})/3)a_{11.} - (4a_{2..}b_{.2.})/3 + b_{.2.}b_{11.} + b_{12} \\ & (b_{.1.} + 1)^2(a_{11.}b_{2..} - 2a_{2..}^2 + 3a_{2..}b_{11.} + b_{.1.}b_{21.} - 2b_{.2.}b_{2..} - b_{11.}^2 - b_{21.})b_{1..} - \\ & (b_{3..}b_{.1.} + (2a_{2..} - b_{11.})b_{2..} - b_{3..})(b_{.1.} + 1)^3)(b_{.1.} + 1)^2a_{.1.} + a_{11.}((a_{11.} - b_{.2} \\ & (b_{.1.} + 1)(a_{2..} - b_{11.})b_{1..} - b_{2..}(b_{.1.} + 1)^2)(b_{.1.} + 1)^4 \Big/ ((a_{.1.}b_{1..} + \\ & b_{.1.}^2 - 1)(b_{.1.} + 1)(a_{.1.}b_{1..} + (b_{.1.} + 1)^2)^2) \end{aligned}$$

حال شرایط انشعاب فلیپ را بررسی میکنیم که ضریب a_1 باید مخالف صفر باشد و ضریب a_2 نوع پایداری انشعاب را مشخص می کند که اگر ضریب a_2 مثبت بود انشعاب فلیپ پایدار و اگر منفی بود ناپایدار و اگر صفر بود حالت تباهیده فلیپ را خواهیم داشت.

$$a_1 = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial\tilde{x}\partial h^*}\right)\Big|_{(0,0)} = d_2 \neq 0, \qquad a_2 = \left(\frac{1}{4}(\frac{\partial^2 g}{\partial\tilde{x}^2})^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 g}{\partial\tilde{x}^3}\right)\Big|_{(0,0)} = d_1^2 + d_5$$

به عنوان نمونه به ازای مقادیر $\beta = 1, \delta = 8, h_1 = 1/29001139, h_. = 0/63353455$ داریم: $a_1 = -2/8834740888, a_2 = -5/6876$ که نشان می دهد انشعاب فلیپ در نقطه تعادل $E_2 = (0/13312239, 0/86687761)$ رخ داده است. ببینید شکل ۱.



شکل ۱: انشعاب فلیپ

۲.۲ انشعاب نیمارک-ساکر در نقطه ثابت E_3

دستگاه گسسته سازی شده (۲) را در نظر می گیریم، در نقطه ثابت $E_3 = (x_3, y_3)$ اگر داشته باشیم:

$$-2\sqrt[4]{G} < P < 0, \qquad h = \frac{-P}{\sqrt{G}}$$

دو مقدار ویژه با اندازه یک داریم؛حال روی دستگاه اختلال کوچکی با تغیر پارامتر h^* به اندازه کوچک $|h^*| \ll 1$ ایجاد می کنیم و دستگاه را با تغیر متغیر $u = x - x_3$ و $v = y - y_3$ به مبدا منتقل می کنیم که معادله سرشت نما به صورت زیر می باشد:

$$f(\lambda) = \lambda^2 - m(h^*)\lambda + n(h^*),$$

که

$$m(h^*) = -2 - P(h + h^*), \qquad n(h^*) = \sqrt{G}(h + h^*)^2 + P(h + h^*) + 1$$

که از این معادله مقادیر ویژه به صورت زیر بدست می آیند:

$$\lambda, \bar{\lambda} = 1 + \frac{P(h + h^*)}{2} \pm \frac{i(h + h^*)}{2}\sqrt{4\sqrt{G} - P^2}$$

حال شرط تقاطعی را برای انشعاب نیمارساکر باید بررسی کرد که با توجه به رابطه زیر شرط تقاطعی را داراست:

$$|\lambda| = \sqrt{n(h^*)}, \qquad \left.\frac{d|\lambda|}{dh^*}\right|_{h^*=0} = \frac{-P}{2}$$

سپس شرط $\lambda^t, \bar{\lambda}^t \neq 1, t = 1, 2, 3, 4$ که متناظر است با

$$m(0) \neq -2, 0, 1, 2 \Rightarrow P^2 \neq 0, \sqrt{G}, 3\sqrt{G}, 4\sqrt{G}.$$

حال دستگاه رو حول $(u, v, h^*) = (۰, ۰, ۰)$ به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{cases} u \to a_{۱۰}.u + a_{۰۱}v + a_{۲۰}.u^{۲} + a_{۱۱}uv \\ v \to b_{۱۰}.u + b_{۰۱}v + b_{۲۰}.u^{۲} + b_{۱۱}uv + b_{۰۲}v^{۲} + b_{۳۰}.u^{۳} + b_{۲۱}u^{۲}v + b_{۱۲}uv^{۲} + O\big((|u| + |v| \end{cases}$$

که

$$a_{۱۰} = ۱ + h.(۱ - ۲x_{۳} - y_{۳}), \qquad a_{۰۱} = -h.x_{۳}, \qquad a_{۲۰} = -۲h., \qquad a_{۱۱} = -h.$$
$$b_{۱۰} = \frac{۲bh.y_{۳}^{۲}}{x_{۳}^{۲}}, \qquad b_{۰۱} = \frac{-۴bh.y_{۳} + ۲\delta h.x_{۳} + x_{۳}}{x_{۳}},$$
$$b_{۲۰} = \frac{-۲bh.y_{۳}^{۲}}{x_{۳}^{۳}}, \qquad b_{۱۱} = \frac{۲bh.y_{۳}}{x_{۳}^{۲}}, \qquad b_{۰۲} = \frac{-۲bh.}{x_{۳}},$$
$$b_{۳۰} = \frac{۶bh.y_{۳}^{۲}}{x_{۳}^{۴}}, \qquad b_{۲۱} = \frac{-۴bh.y_{۳}}{x_{۳}^{۳}}, \qquad b_{۱۲} = \frac{۲bh.}{x_{۳}^{۲}}$$

حال با تبدیل خطی روبه رو قسمت خطی را به فرم جردن تبدیل می کنیم؛

$$T = \begin{pmatrix} a_{۰۱} & a_{۰۱} \\ \lambda - a_{۱۰} & \bar{\lambda} - a_{۱۰} \end{pmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

پس دستگاه تبدیل می شود به

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & ۰ \\ ۰ & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{۱}(z, \bar{z}) \\ f_{۲}(z, \bar{z}) \end{pmatrix}$$

$$f_{۱}(z, \bar{z}) = c_{۲۰}.z^{۲} + c_{۱,۱}z\bar{z} + c_{۰۲}\bar{z}^{۲} + c_{۳۰}.z^{۳} + c_{۲۱}z^{۲}\bar{z} + c_{۱۲}z\bar{z}^{۲} + c_{۰۳}\bar{z}^{۳} + O\big((|z| + |\bar{z}|)^{۴}\big)$$
$$f_{۲}(z, \bar{z}) = d_{۲۰}.z^{۲} + d_{۱,۱}z\bar{z} + d_{۰۲}\bar{z}^{۲} + d_{۳۰}.z^{۳} + d_{۲۱}z^{۲}\bar{z} + d_{۱۲}z\bar{z}^{۲} + d_{۰۳}\bar{z}^{۳} + O\big((|z| + |\bar{z}|)^{۴}\big)$$

که

$$\frac{c_{۲۰}}{۲} = ((-a_{۱۱}+b_{۰۲})a_{۱۰}^{۲} + (\lambda_۱(a_{۱۱}-۲b_{۰۲}) + a_{۰۱}(-b_{۱۱}+a_{۲۰}) + a_{۱۱}\lambda_۲)a_{۱۰} +$$
$$b_{۰۲}\lambda_۱^{۲} + (a_{۰۱}b_{۱۱} - a_{۱۱}\lambda_۲)\lambda_۱ + b_{۲۰}a_{۰۱}^{۲} - a_{۰۱}a_{۲۰}\lambda_۲) \Big/ \lambda_۱ - \lambda_۲$$

$$c_{۱۱} = (-a_{۱۱}\lambda_۲^{۲} + ((۳a_{۱۱}-۲b_{۰۲})a_{۱۰} + (-a_{۱۱}+۲b_{۰۲})\lambda_۱ - ۲a_{۰۱}(a_{۲۰} - b_{۱۱}/۲))\lambda_۲ +$$
$$(-۲a_{۱۱}+۲b_{۰۲})a_{۱۰}^{۲} + (\lambda_۱(a_{۱۱}-۲b_{۰۲}) + ۲a_{۰۱}(-b_{۱۱}+a_{۲۰}))a_{۱۰} + ۲b_{۲۰}a_{۰۱}^{۲} +$$
$$a_{۰۱}b_{۱۱}\lambda_۱) \Big/ \lambda_۱ - \lambda_۲$$

$$\frac{c_{۰۲}}{۲} = ((-a_{۱۱}+b_{۰۲})\lambda_۲^{۲} + ((۲a_{۱۱}-۲b_{۰۲})a_{۱۰} - a_{۰۱}(-b_{۱۱}+a_{۲۰}))\lambda_۲ + (-a_{۱۱}+b_{۰۲})a_{۱۰}^{۲} +$$
$$a_{۰۱}(-b_{۱۱}+a_{۲۰})a_{۱۰} + b_{۲۰}a_{۰۱}^{۲}) \Big/ \lambda_۱ - \lambda_۲$$

$$\frac{c_{۳۰}}{۶} = \frac{a_{۰۱}(b_{۳۰}a_{۰۱}^{۲} - b_{۲۱}(-\lambda_۱ + a_{۱۰})a_{۰۱} + b_{۱۲}(-\lambda_۱ + a_{۱۰})^{۲})}{\lambda_۱ - \lambda_۲}$$

$$\frac{c_{۲۱}}{۲} = \frac{۳a_{۰۱}(b_{۳۰}a_{۰۱}^{۲} - b_{۲۱}(a_{۱۰} - \frac{۲\lambda_۱}{۳} - \frac{\lambda_۲}{۳})a_{۰۱} + (-\lambda_۱ + a_{۱۰})(a_{۱۰} - \frac{\lambda_۱}{۳} - \frac{۲\lambda_۲}{۳})b_{۱۲})}{\lambda_۱ - \lambda_۲}$$

$$\frac{c_{۱۲}}{۲} = \frac{۳a_{۰۱}(b_{۳۰}a_{۰۱}^{۲} - b_{۲۱}(a_{۱۰} - \frac{\lambda_۱}{۳} - \frac{۲\lambda_۲}{۳})a_{۰۱} + (-\lambda_۲ + a_{۱۰})b_{۱۲}(a_{۱۰} - \frac{۲\lambda_۱}{۳} - \lambda_۲/۳))}{\lambda_۱ - \lambda_۲}$$

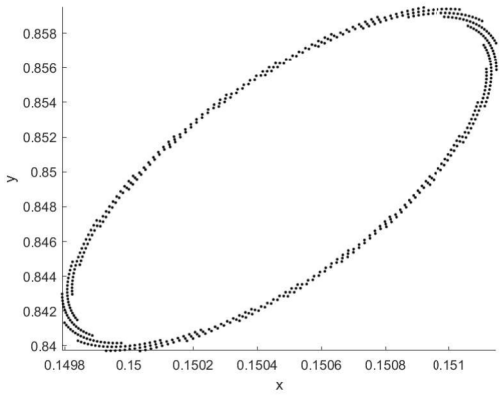
$$\frac{c_{۰۳}}{۶} = \frac{(b_{۳۰}a_{۰۱}^{۲} - b_{۲۱}(-\lambda_۲ + a_{۱۰})a_{۰۱} + b_{۱۲}(-\lambda_۲ + a_{۱۰})^{۲})a_{۰۱}}{\lambda_۱ - \lambda_۲},$$

که $\lambda_۱ = \lambda, \lambda_۲ = \bar{\lambda}$ می باشد.

حال شرط غیر تباهیدگی $d(۰) \neq ۰$ را چک می کنیم و می دانیم اگر $d(۰) < ۰$ شبه سیکل پدید آمده پایدار و در صورت $d(۰) > ۰$ ناپایدار است و اگر $d(۰) = ۰$ حالت تباهیده نیمارساکر اتفاق می افتد که در انشعابات دو پارامتری بررسی می شود.

$$d(۰) = \Re(\frac{\bar{\lambda}c_{۲۱}}{۲}) - \Re\left(\frac{(۱-۲\lambda)\bar{\lambda}^{۲}}{۲(۱-\lambda)}c_{۲۰}c_{۱۱}\right) - \frac{۱}{۲}|c_{۱۱}|^{۲} - \frac{۱}{۴}|c_{۰۲}|^{۲}$$

به عنوان نمونه به ازای مقادیر $\beta = ۱, \delta = ۸, h_۱ = ۲, h_۰ = ۰/۶۵۰۴۷۲۰۷۷۹$ انشعاب نیمارک-ساکر را داریم که ضریب فرم نرمال آن هست $d(۰) = ۴/۶۰۴۵$ که نشان می دهد سیکل نا پایدار از نقطه تعادل $E_۳ = (۰/۱۵۰۴۷۲۰۷۶۵, ۰/۸۴۹۵۲۷۹۲۳۵)$ منشعب می شود. ببینید شکل ۲.



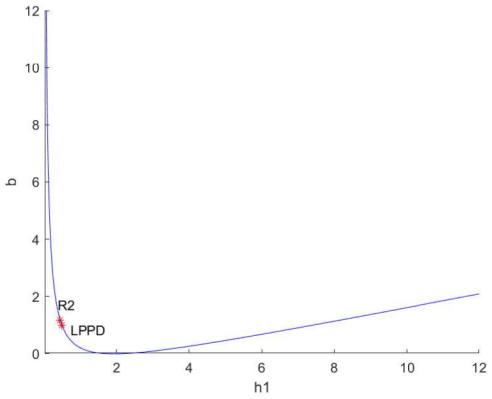
شکل ۲: انشعاب نیمارک-ساکر زیر بحرانی

۳ شبیه سازی عددی

در این قسمت با استفاده از پکیج مت کنت ام از متلب به شبیه سازی عددی می پردازیم. در نقطه تعادل $E_۱ = (۰/۶, ۰/۴)$ در مقادیر

$$\delta = ۸, \quad \beta = ۴/۵, \quad h_۱ = ۲, \quad h_. = ۰/۶۵۰۴۷۲۰۸$$

انشعاب فولد باضریب فرم نرمال ۴/۱۰۶۷ رخ می دهد.



شکل ۳: انشعاب فولد-فلیپ و رزنانس ۱:۲

انشعاب فولد-فلیپ با ضریب فرم نرمال $[a/e, be] = -۵/۳۸۲۵ \times ۱۰^{-۱}, -۵/۸۰۳۷ \times ۱۰^{۵}$ در مقادیر

$$\delta = ۱/۹۱۴۲۱۳۶, \quad \beta = ۱, \quad h_۱ = ۰/۵, \quad h_. = ۲۳/۳۱۳۷۰۹$$

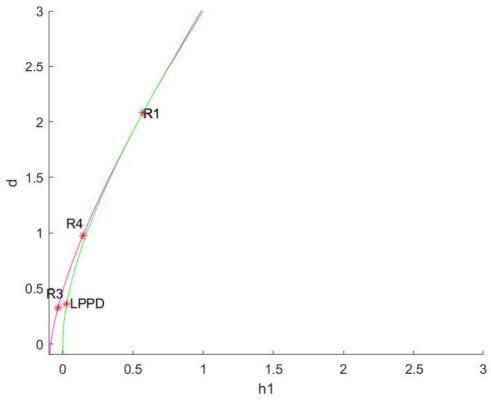
در نقطه تعادل $E_۱ = (۰/۵۸۵۷۸۶۴۴, ۰/۴۱۴۲۱۳۵۶)$ ظاهر می شود. ببینید شکل ۱ . در مقادیر

$$\delta = ۱/۹۱۴۲۱۳۶, \quad \beta = ۱/۱۸۱۱۵۰۶, \quad h_۱ = ۰/۴۵۲۳۲۶۰۸, \quad h_. = ۲۳/۳۱۳۷۰۹$$

در نقطه تعادل $E_۱ = (۰/۶۱۶۵۳۹۶۴, ۰/۳۸۳۴۶۰۳۶)$ انشعاب رزنانس ۲:۱ ظاهر می شود که ضرایب آن به صورت $[c, d] = ۲/۵۹۲۱ \times ۱۰^۶, -۶/۵۴۸۶ \times ۱۰^۶$. ببینید شکل ۱ .
در مقادیر

$$\delta = ۲/۰۷۹۵۹۵۷, \quad \beta = ۱, \quad h_۱ = ۰/۵۶۹۸۴۰۳۱, \quad h_. = ۲/۴۰۷۴۰۴۱$$

در نقطه تعادل $E_۲ = (۰/۵۶۹۸۴۰۲۹, ۰/۴۳۰۱۵۹۷۱)$ انشعاب رزنانس ۱:۱ باضریب فرم نرمال -۱ رخ می دهد. ببینید شکل ۴.



شکل ۴: رزنانس ۱:۱ ورزنانس ۴:۱ و رزنانس ۳:۱ و انشعاب فولد - فلیپ

در مقادیر

$$\delta = ۰/۳۵۸۰۴۱۲۹, \quad \beta = ۱, \quad h_۱ = ۰/۰۲۷۳۴۰۷۱۷, \quad h_. = ۲/۴۰۷۴۰۴۱$$

در نقطه تعادل $E_۲ = (۰/۸۵۸۱۱۱۰۹, ۰/۱۴۱۸۸۸۹۱)$ انشعاب فولدـفلیپ باضریب فرم نرمال $[a/e, be] = -۱/۰۵۲۴, -۷/۰۷۵۳ \times ۱۰^{-۱}$ رخ می دهد. ببینید شکل ۴.
در مقادیر

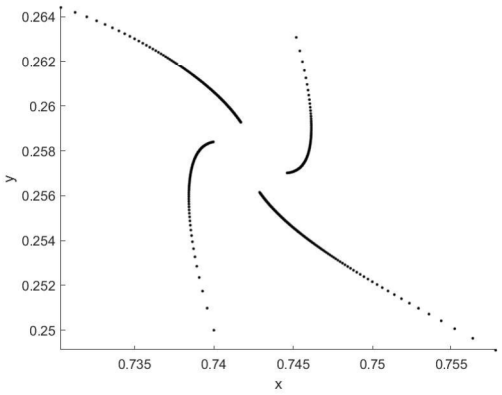
$$\delta = ۲/۰۷۹۵۹۵۷, \quad \beta = ۳/۱۲۲۰۳۵۸, \quad h_۱ = ۰/۲۵۶۵۸۵۶۷, \quad h_. = ۲/۴۰۷۴۰۴۱$$

در نقطه تعادل $E_۲ = (۰/۷۴۲۲۶۶۳۴, ۰/۲۵۷۷۳۳۶۶)$ انشعاب رزنانس ۴:۱ باضریب فرم نرمال $A = -۹/۱۳۵۵ - ۵/۵۲۵۱i$ رخ می دهد. ببینید شکل ۴.
در مقادیر

$$\delta = ۲/۰۷۹۵۹۵۷, \quad \beta = ۷/۱۵۸۴۱, \quad h_۱ = ۰/۱۲۴۱۸۱۹۵, \quad h_. = ۲/۴۰۷۴۰۴۱$$

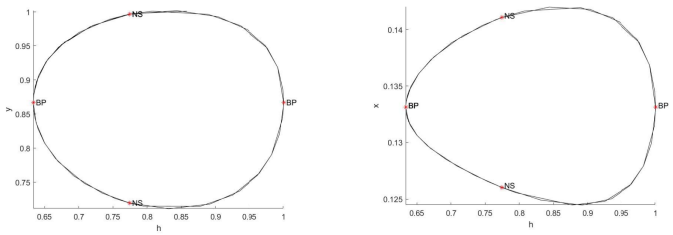
در نقطه تعادل $E_۲ = (۰/۷۴۲۲۶۶۳۴, ۰/۲۵۷۷۳۳۶۶)$ انشعاب رزنانس ۳:۱ باضریب فرم نرمال $\Re(c_۱) = -۱/۷۰۸۴$ رخ می دهد. ببینید شکل ۴.

به ازای مقادیر $\beta = ۳/۱۲۲۰۳۵۸، \delta = ۲/۰۷۹۵۹۵۷، h_۱ = ۰/۲۵۶۵۸۵۶۷، h_۰ = ۲/۴۰۷۴۰۳۶$ داریم: $d(۰) = -۲/۳۹۴۹ \times ۱۰^{۲}$ که نشان می دهد شبه سیکل پایدار از نقطه تعادل $E_۳ = (۰/۷۴۲۲۶۶۳۴, ۰/۲۵۷۷۳۳۶۶)$ منشعب می شود و رزنانس ۴:۱ را داریم. شکل ۵ را ببینید.



شکل ۵: رزنانس ۴:۱

به ازای مقادیر $\beta = ۱, \delta = ۸, h_۱ = ۱/۲۹۰۰۱۳۹, h_۰ = ۰/۶۳۳۵۳۴۵۵$ انشعاب فلیپ با ضریب فرم نرمال $a_۲ = ۱/۴۷۷۲ \times ۱۰^{+۱}$ را داریم که نشان می دهد انشعاب فلیپ در نقطه تعادل $E_۳ = (۰/۱۳۳۱۲۲۳۹, ۰/۸۶۶۸۷۷۶۱)$ رخ داده است. ببینید شکل ۴.



(b) (a)

شکل ۶: انشعاب فلیپ فوق بحرانی

۴ نتیجه گیری

در این مقاله یک سیستم شکار و شکارچی با برداشت ثابت مورد تجزیه تحلیل قرار گرفت. انشعابات این مدل از جمله انشعاب فلیپ و انشعاب نیمارک-ساکر به صورت تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار گرفت . همچنین انشعابات با بعد بالاتر در این مقاله به تصویر کشیده شد.

مراجع

[1] Eskandari, Z., Avazzadeh, Z., Khoshsiar Ghaziani, R. and Li, B., 2025. Dynamics and bifurcations of a discrete-time Lotka–Volterra model using nonstandard finite difference discretization method. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 48(7), pp.7197-7212.

[2] Hadadi, J., Alidousti, J., Khoshsiar Ghaziani, R. and Eskandari, Z., 2025. Bifurcations and complex dynamics of a two dimensional neural network model with delayed discrete time. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 48(7), pp.8091-8102.

[3] Hadadi, J., Ghaziani, R.K., Alidousti, J. and Eskandari, Z., 2024. Dynamics and bifurcations of a discrete-time neural network model with a single delay. Journal of Mathematical Modeling (JMM), 12(3).

[4] Huang, J., Gong, Y. and Ruan, S., 2013. Bifurcation analysis in a predator-prey model with constant-yield predator harvesting. Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B, 18(8), pp.2101-2121.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

کنترل پایداری نقطه تعادل در یک سیستم شکارو شکارچی تاخیری

جواد حدادی [۱] رضا خوشسیر [۲] زهره اسکندری [۳] احمد رئیسی [۴] عقیل خلیلاوی [۵]

[۱,۲] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه شهرکرد
[۳] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه فسا
[۴] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
[۵] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این مقاله، دینامیک یک مدل شکار و شکارچی با تاخیر زمانی را مورد بررسی قرار می دهیم. سپس با اضافه کردن کنترل گر به سیستم پایداری نقاط تعادل را بهبود و تحت کنترل قرار دادیم. در انتها با شبیه سازی عددی، قسمت های تحلیلی را مورد تایید قرار می دهیم.

کلمات کلیدی: انشعاب هاپف، کنترل گر، زمان تاخیر، سیستم شکار و شکارچی

۱ مقدمه

در دنیای امروز، مدل‌سازی پدیده‌های زیستی و اکولوژیکی به یکی از حوزه‌های مهم تحقیقاتی تبدیل شده است. سیستم‌های شکار و شکارچی از جمله مدل‌هایی هستند که برای بررسی تعاملات بین گونه‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به ماهیت پیچیده این سیستم‌ها، عوامل متعددی می‌توانند بر پایداری نقاط تعادل آن‌ها تأثیر بگذارند. یکی از این عوامل، تأخیر زمانی در پاسخ شکارچی و شکار است که می‌تواند پویایی سیستم را دستخوش تغییرات اساسی کند.

[1] j1741366@gmail.com
[2] Khoshsiar@sci.sku.ac.ir
[3] z-eskandari@fasau.ac.ir
[4] ahmadreisy@yahoo.com
[5] aghilkh76@gmail.com

در این پژوهش، با افزودن یک کنترل‌گر به سیستم شکار و شکارچی دارای تأخیر، تلاش شده است تا پایداری نقاط تعادل بهبود یابد و تحت کنترل قرار گیرد. با استفاده از روش‌های تحلیلی و عددی، رفتار سیستم مورد بررسی قرار گرفته و نتایج شبیه‌سازی عددی برای تأیید یافته‌های نظری ارائه شده است. این مطالعه می‌تواند زمینه‌ساز تحقیقات بیشتری در حوزه کنترل و مدیریت اکولوژیکی باشد.
سیستم تاخیری شکار و شکارچی مورد نظر به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{dt} = ax(t)(۱ - x(t))(x(t) - b) - cx(t)y(t-\tau), \qquad (۱)$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(t)}{d + y(t)}(۱ - \frac{y(t)}{e + x(t)}).$$

که همه پارامترها مثبت هستند و معنای هر پارامتر در مرجع [۲] آمده است. به منظور بررسی انشعاب هاپف و بهبود پایداری نقطه تعادل در این سیستم، ابتدا نقاط تعادل آن را بدست می آوریم:

$$ax(۱ - x)(x - b) - cxy = ۰,$$
$$\frac{y}{d + y}(۱ - \frac{y}{e + x}) = ۰.$$

پس داریم:

$$X_۰ = (۰, ۰), \qquad X_۱ = (۰, e), \qquad X_۲ = (b, ۰),$$
$$X_{۴,۵} = (\frac{ab + a - c \mp a\sqrt{(c/a - b - ۱)^۲ - ۴(ce/a + b)}}{۲a}, e + \frac{ab + a - c \mp a\sqrt{(c/a - b - ۱)^۲ -}}{۲a}$$

با توجه به مطالب گفته شده در مرجع [۲] می دانیم احتمال انشعاب هاپف در نقطه تعادل $X_۵$ وجود دارد. از این رو ما نیز به دنبال انشعاب هاپف و بهبود پایداری در این نقطه تعادل می باشیم.

۲ اضافه کردن کنترل گر به سیستم

حال به سیستم (۱) یک کنترل گر اضافه می کنیم

$$\dot{x}(t) = ax(t)(۱ - x(t))(x(t) - b) - cx(t)y(t), \qquad (۲)$$
$$\dot{y}(t) = \frac{y(t)}{d + y(t)}(۱ - \frac{y(t)}{e + x(t)}) + K(y(t) - y(t-\tau)). \qquad (۳)$$

بنابراین قسمت خطی سیستم در نقطه تعادل (x^*, y^*) به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\left(-3x^{*2} + (2b+2)\,x^* - b\right)a - cy^* & -cx^*\\ \frac{y^{*2}}{(d+y^*)(e+x^*)^2} & \frac{(e+x^*-2y^*)d-y^{*2}}{(d+y^*)^2(e+x^*)} + K\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -K\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},$$

بنابراین معادله مشخصه را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$f(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_0 + e^{-\lambda\tau}(q_1\lambda - q_0), \qquad (4)$$

که

$$p_1 = \frac{1}{(e+x^*)(d+y^*)^2}\Bigg(3a(d+y^*)^2x^{*3} - 2(d+y^*)^2a(b - \frac{3e}{2} + 1)x^{*2} + (c\,y^{*3} + (2dc+$$
$$((-2b-2)e+b)a - K)y^{*2} - 2(-\frac{dc}{2} + ((2b+2)e - b)a + K)dy^* - d(1+$$
$$(((2b+2)e-b)a+K)d))x^* + ce\,y^{*3} + (aeb + 2ced - eK + 1)y^{*2} -$$
$$2d(-aeb - \frac{1}{2}ced + eK - 1)y^* - ed(1 + (-ab+K)d)\Bigg)$$

$$
\begin{aligned}
p_{۰} = & \frac{-۳a(Kd^{۲}+۲dy^{*}K+y^{*۲}K+d)x^{*۴}}{(d+y^{*})^{۲}(e+x^{*})^{۲}} \\
& + \frac{۲\left[(-۳eK+(b+۱)K+\frac{۳}{۲})y^{*۲}+۲d(-۳eK+(b+۱)K+\frac{۳}{۲})y^{*}\right]}{(d+y^{*})^{۲}(e+x^{*})^{۲}} \\
& + \frac{(b-۳e+۱)d(Kd+۱)ax^{*۳}}{(d+y^{*})^{۲}(e+x^{*})^{۲}} \\
& + \frac{(-۳e^{۲}K+((۴b+۴)K+۳)e-Kb-۲b-۲)y^{*۲}ax^{*۲}}{(d+y^{*})^{۲}(e+x^{*})^{۲}} \\
& + \frac{-۲((eK-۱)y^{*۲}+d(۲eK-\frac{۳}{۲})y^{*})y^{*}cx^{*}}{(d+y^{*})^{۲}(e+x^{*})^{۲}} \\
& - \frac{e((eK-۱)y^{*۲}+(۲eK-۲)dy^{*}+de(Kd+۱))(ab+cy^{*})}{(d+y^{*})^{۲}(e+x^{*})^{۲}}
\end{aligned}
$$

$$
q_{۱} = -K, \qquad q_{۰} = K(۳a\,x^{*۲} - ۲a(b+۱)x^{*} + ab + cy^{*}),
$$

اگر $\tau = ۰$ باشد یعنی سیستم بدون تاخیر را داشته باشیم. در صورتی که $p_{۱}+q_{۱} > ۰$ و $p_{۲}+q_{۲} > ۰$ سیستم مجانبی پایدار است. اگر تاخیر $\tau \neq ۰$ را در نظر بگیریم و فرض کنیم قسمت حقیقی مقدار ویژه از صفر بگذرد یعنی $\lambda = iw_{۰}$، که $w_{۰} > ۰$ است. به سادگی دیده می شود روابط (۵)، (۶) و (۷) به ترتیب برای پیدا کردن $\omega_{۰}$، τ_{k} و شرط تقاطعی برقرار است.

$$
w_{۰} = -۱/۲\,p_{۱}^{۲} + ۱/۲\,q_{۱}^{۲} + p_{۰} \pm ۱/۲\,\sqrt{(p_{۱}^{۲} - q_{۱}^{۲} - ۲\,p_{۰})^{۲} - ۴\,p_{۰}^{۲} + ۴\,q_{۰}^{۲}}. \tag{۵}
$$

اگر $(p_{۱}^{۲} - q_{۱}^{۲} - ۲\,p_{۰})^{۲} - ۴\,p_{۰}^{۲} + ۴\,q_{۰}^{۲} > ۰$ باشد، وجود مقدار ویژه موهومی محض ممکن است. پس از معادله (۴) می توان نتیجه گرفت:

$$
\begin{aligned}
\cos(\omega_{۰}\tau) &= -\frac{\omega_{۰}^{۲}p_{۱}q_{۱} - \omega_{۰}^{۲}q_{۰} + p_{۰}q_{۰}}{\omega_{۰}^{۲}q_{۱}^{۲} + q_{۰}^{۲}}, \\
\sin(\omega_{۰}\tau) &= -\frac{\omega_{۰}\left(\left(-\omega_{۰}^{۲} + p_{۰}\right)q_{۱} - p_{۱}q_{۰}\right)}{\omega_{۰}^{۲}q_{۱}^{۲} + q_{۰}^{۲}},
\end{aligned}
$$

پس داریم:

$$
\tau_{k} = -\frac{۱}{\omega_{۰}}\arctan\left(\frac{\left(\omega_{۰}^{۲}q_{۱} - p_{۰}q_{۱} + p_{۱}q_{۰}\right)\omega_{۰}}{\omega_{۰}^{۲}p_{۱}q_{۱} - \omega_{۰}^{۲}q_{۰} + p_{۰}q_{۰}}\right) + \frac{k\pi}{\omega_{۰}}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{۶}
$$

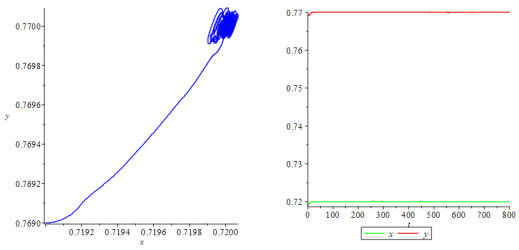
مینیمم $\tau_k > ۰$ را τ^* در نظر می گیریم، جایی که برای اولین بار مقدار ویژه موهومی محض پدید می آید. بنابراین احتمال انشعاب هاپف وجود دارد . پس شرط تقاطعی را چک می کنیم:

$$\left(\frac{d\Re(\lambda(\tau))}{d\tau}\right)^{-۱}\Big|_{\lambda=i\omega_۰,\tau=\tau^*} = -\frac{۲\,\lambda + p_۱ - \tau\,\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\,(\lambda\,q_۱ + q_۰) + \mathrm{e}^{-\lambda\tau}q_۱}{\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\,(\lambda\,q_۱ + q_۰)}\Big|_{\lambda=i\omega_۰,\tau=\tau^*}$$
$$= \frac{-۲\,\omega_۰^{۲} - {p_۱}^{۲} + {q_۱}^{۲} + ۲\,p_۰}{{q_۱}^{۲}\omega_۰^{۲} + q_۰^{۲}} \neq ۰, \qquad (۷)$$

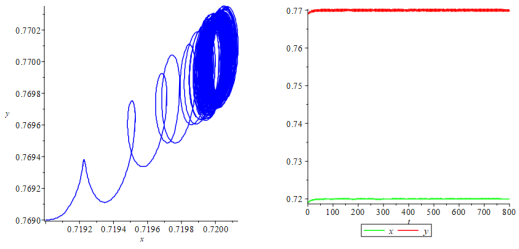
شرط لازم برای وجود مقدار ویژه موهومی محض برای مقادیر

$$a = ۵, \quad b = ۰/۵, \quad c = ۰/۴, \quad d = ۳, \quad e = ۰/۰۵,$$

$K \leq ۰/۰۱۷۹۴۱۵۱۴۱۱$ است. مشاهده می شود اگر به عنوان مثال $\tau = ۰/۴۸۶۶۳۵۰۴۶۳$ ثابت در نظر گرفته شود، برای $K = ۲$ انشعاب هاپف رخ می دهد، برای مقادیر $K < ۲$ نقطه تعادل (x^*, y^*) پایدار و برای $K > ۲$ نقطه تعادل (x^*, y^*) ناپایدار است. پس بدین ترتیب می توان پایداری نقطه تعادل سیستم را با کنترل گر K تغیر داد و آن را بهبود بخشید. شکل ۱ و ۲ را ببینید.



شکل ۱: نمای فاز سیستم در $K = ۱$



شکل ۲: نمای فاز سیستم در $K = ۲$

۳ نتیجه گیری

در این مطالعه به بررسی یک سیستم شکار و شکارچی از نوع تاخیری پرداختیم. با اضافه کردن یک کنترل گر به سیستم انشعاب هاپف را تحت کنترل در آوردیم و با شبیه سازی عددی نمای فاز سیستم را در حین انشعاب هاپف و موقعی که با تغیر مقدار کنترل گر پایداری نقطه تعادل را تحت کنترل قرار دادیم، رسم کردیم.

نتایج به‌دست‌آمده از تحلیل‌های نظری و شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهند که کنترل مناسب می‌تواند تأثیر بسزایی در مدیریت پویایی‌های این سیستم داشته باشد. این یافته‌ها می‌توانند در تحقیقات آینده جهت بهینه‌سازی روش‌های کنترل در سیستم‌های زیستی و اکولوژیکی مورد استفاده قرار گیرند.

مطالعه حاضر نه تنها از دیدگاه ریاضی و نظری اهمیت دارد، بلکه کاربردهای عملی نیز می‌تواند در زمینه‌هایی نظیر حفاظت از منابع طبیعی و مدیریت جمعیت گونه‌ها داشته باشد. نتایج این تحقیق راه را برای مطالعات گسترده‌تر در حوزه‌های مرتبط با کنترل و پایداری سیستم‌های پیچیده هموار می‌کند.

مراجع

[1] Hassard, B.D., Kazarinoff, N.D. and Wan, Y.H., 1981. Theory and applications of Hopf bifurcation (Vol. 41). CUP Archive.

[2] Wu, R. and Xiong, W., 2025. Bifurcation in a Leslie–Gower system with fear in predators and strong Allee effect in prey. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 30, pp.1-18.

[3] Surosh, A.H., Alidousti, J. and Ghaziani, R.K., 2022. Stability and Hopf bifurcation analysis for a three-species food chain model with fear and two different delays. Computational and Applied Mathematics, 41(3), p.110.

[4] Surosh, A.H., Ghaziani, R.K. and Alidousti, J., 2023. Stabilization of Unstable Periodic Orbits in a Three-Dimensional Chaotic System Using Time-Delay Autosynchronization Control Method. Journal of Applied Nonlinear Dynamics, 12(03), pp.453-464.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

بررسی پایداری نقاط ثابت در یک سیستم شکارو شکارچی

جواد حدادی [۱] احمد رئیسی [۲] زهره اسکندری [۳] رضا خوشسیر [۴] عقیل خلیلاوی [۵]

[۱,۴] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه شهرکرد
[۲] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان
[۳] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه فسا
[۵] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این مطالعه به بررسی یک سیستم شکار و شکارچی با برداشت ثابت می پردازیم و پایداری نقاط تعادل آن را بررسی می کنیم.

کلمات کلیدی: سیستم شکار و شکارچی، پایداری، نقاط ثابت

۱ مقدمه

سیستم‌های شکارچی_شکارچی به عنوان یکی از مدل‌های مهم در بوم‌شناسی و پویایی جمعیت شناخته می‌شوند. این سیستم‌ها به دلیل تعاملات پیچیده بین گونه‌های شکارچی و طعمه، رفتارهای پویای متنوعی از خود نشان می‌دهند. یکی از عوامل مهم در مطالعه این سیستم‌ها، برداشت ثابت [۱] است که می‌تواند اثرات قابل توجهی بر پایداری و انشعابات سیستم داشته باشد [۲، ۳، ۴]. در این مطالعه، یک سیستم شکارچی_شکارچی با برداشت ثابت بررسی می‌شود. سیستم زیر را در نظر بگیرید [۱]:

[1] j1741366@gmail.com
[2] ahmadreisy@yahoo.com
[3] z-eskandari@fasau.ac.ir
[4] Khoshsiar@sci.sku.ac.ir
[5] aghilkh76@gmail.com

$$\begin{cases} \dot{x} = x(۱ - x) - xy \\ \dot{y} = y(\delta - \frac{\beta y}{x}) - h_۱ \end{cases} \quad (۱)$$

با استفاده از گام اویلر سیستم (۱) را به صورت زیر گسسته سازی می کنیم:

$$\begin{cases} x \longrightarrow x + h(x(۱ - x) - xy) \\ y \longrightarrow y + h(y(\delta - \frac{\beta y}{x}) - h_۱) \end{cases} \quad (۲)$$

چون x در مخرج است و مخالف صفر و هچنین h طول گام است و آن هم مخالف صفر پس نقاط ثابت سیستم (۲) به صورت زیر بدست می آوریم:

$$x + h(x(۱ - x) - xy) = x \Longrightarrow ۱ - x - y = ۰$$
$$y + h(y(\delta - \frac{\beta y}{x}) - h_۱) = y \Longrightarrow y(\delta - \frac{\beta y}{x}) - h_۱ = ۰,$$

با جایگذاری $y = ۱ - x$ داریم:

$$x^۲(\delta + \beta) + x(-\delta - ۲\beta + h_۱) + \beta = ۰ \quad (۳)$$

معادله مبین تابع درجه دو بالا به صورت زیر می باشد:

$$\triangle = (\delta - h_۱)^۲ - ۴\beta h_۱$$

و ریشه های آن به صورت زیر بدست می آیند:

$$\triangle = ۰ \Longrightarrow h_{۱۱,۱۲} = \delta + ۲\beta \pm ۲\sqrt{\beta(\beta + \delta)}$$

$h_۱$ نمی تواند مقادیر بین $h_{۱۱}$ و $h_{۱۲}$را اختیار کند چون بین دو ریشه مخالف علامت $(\delta + \beta)$می باشد که معادله مبین را منفی می کند و معادله (۳) ریشه حقیقی ندارد پس حالتی را در نظر می گیریم که $h_۱ \geqslant h_{۱۲}$ یا $h_۱ \leqslant h_{۱۱}$ ،اگر $h_۱ \geqslant h_{۱۲}$ دو ریشه منفی می شوند که مناسب نیست چون جمعیت شکار نمی تواند منفی باشد، حال اگر $h_۱ \leqslant h_{۱۱}$ ، دو حالت اتفاق می افتد یا $h_۱ = h_{۱۱}$ که سیستم دارای یک نقطه ثابت به صورت

$$x_۱ = \frac{\delta + ۲\beta - h_۱}{۲\delta + ۲\beta} \Longrightarrow x_۱ = \frac{\delta + h_۱}{\delta - h_۱} \quad , \quad y_۱ = ۱ - x_۱ \Longrightarrow y_۱ = \frac{۲h_۱}{\delta + \beta} \quad (۴)$$

می باشد و اگر $h_1 < h_{11}$ سیستم دارای دو نقطه ثابت مثبت به صورت زیر دارد:

$$x_{2,3} = \frac{2\beta + \delta - h_1 \pm \sqrt{(\delta - h_1)^2 - 4\beta h_1}}{2(\beta + \delta)}$$
$$y_{2,3} = 1 - x_{2,3} \Longrightarrow y_{2,3} = \frac{\delta + h_1 \mp \sqrt{(\delta - h_1)^2 - 4\beta h_1}}{2(\beta + \delta)} \quad (5)$$

۲ پایداری نقاط ثابت

۱.۲ پایداری نقطه ثابت E_1

ماتریس ژاکوبین سیستم (۲) را در نظر بگیرید:

$$J_(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + h(1 - 2x - y) & -hx \\ \frac{hy^2\beta}{x^2} & 1 + h(\delta - \frac{2\beta y}{x}) \end{pmatrix}$$

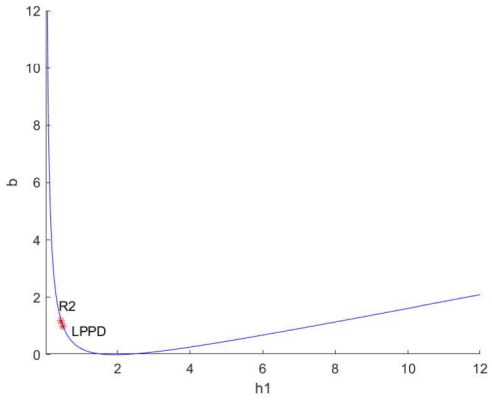
ماتریس ژاکوبین را در نقطه ثابت $E_1 = (x_1, y_1)$ که $x_1 = \frac{\delta + h_1}{\delta - h_1}, y_1 = \frac{2h_1}{\delta - h_1}$ می باشند مقدار دهی میکنیم و داریم:

$$tr(J) = 2 + h(1 - 2x_1 - y_1) + h(\delta - \frac{2\beta y_1}{x_1}),$$
$$det(J) = (1 + h(1 - 2x_1 - y_1))(1 + h(\delta - \frac{2\beta y_1}{x_1})) - (-hx_1)(\frac{hy_1^2\beta}{x_1^2})$$

بنابراین

$$f(\lambda) = \lambda^2 - tr(J)\lambda + det(J)$$
$$f(1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1 \qquad , f(-1) = -4Mh + 4$$
$$M = \frac{\beta(\beta + \delta + \frac{1}{2}) + (-\beta - \frac{\delta}{2})(\sqrt{\beta(\beta + \delta)})}{\sqrt{\beta(\beta + \delta)}}$$

اگر $h < \frac{1}{M}$ باشد مقادیر ویژه به صورت $\lambda_1 = 1, |\lambda_2| < 1$ هستند و اگر $h > \frac{1}{M}$ مقادیر



شکل ۱: انشعاب فولد-فلیپ و رزنانس ۲:۱

ویژه به صورت $|\lambda_۲| > ۱, \lambda_۱ = ۱$ می باشند و اگر $h = \frac{۱}{M}$ دو مقدار ویژه یک و منفی یک داریم و در این نقطه انشعاب فیلیپ-فولد ظاهر می شود. ببینید شکل ۱.

۲.۲ پایداری نقاط ثابت $E_۲$

حال پایداری نقطه ثابت $E_۲ = (x_۲, y_۲)$ رابررسی میکنیم، بدین منظور با توجه به ماتریس ژاکوبین دستگاه (۲) در نقطه ثابت $E_۲ = (x_۲, y_۲)$ داریم:

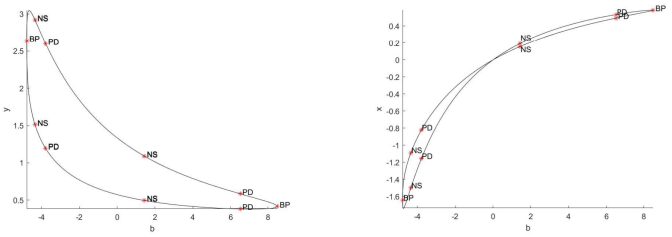
$$tr(J) = \frac{f(۱) - f(-۱)}{۲}, \qquad det(J) = \frac{f(۱) + f(-۱)}{۲} - ۱$$

که

$$f(۱) = -\sqrt{G}h^۲, \qquad f(-۱) = -\sqrt{G}h^۲ + ۲Nh + ۴,$$
$$G = h_۱^۲ + (-۴b - ۲\delta)h_۱ + \delta^۲,$$
$$N = \frac{۱}{(\beta+\delta)(۲\beta+\delta-h_۱+\sqrt{G})}((\delta^۲ + (۳\beta - ۱)\delta + ۲\beta^۲ - ۲\beta + h_۱)(\sqrt{G}) +$$
$$\delta^۳ + (\beta - h_۱ - ۱)\delta^۲ + ((-۳h_۱ - ۲)\beta + ۲h_۱)\delta + (-۲h_۱ - ۲)\beta^۲ + ۴h_۱\beta - h_۱^۲),$$

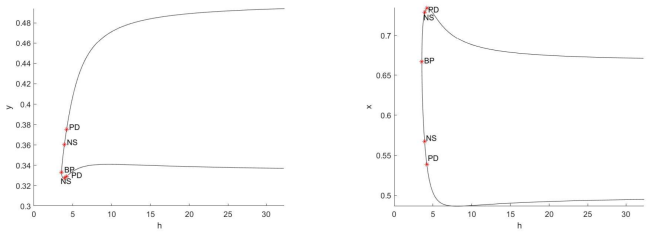
پس مقادیر ویژه را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$f(\lambda) = \lambda^۲ - tr(J)\lambda + det(J) = ۰$$
$$\lambda_۱ = \frac{Nh}{۲} + ۱ - \frac{\sqrt{N^۲h^۲ + ۴\sqrt{G}h^۲}}{۲}, \quad \lambda_۲ = \frac{Nh}{۲} + ۱ + \frac{\sqrt{N^۲h^۲ + ۴\sqrt{G}h^۲}}{۲}$$



(b) (a)

شکل ۲: انشعاب فلیپ



(b) (a)

شکل ۳: انشعاب فلیپ

با توجه به این که

$$f(۱) < ۰, f(-۱) = ۰ \Rightarrow -\sqrt{G}h^{۲} + ۲Nh + ۴ = ۰ \Rightarrow \hat{h}_{۱,۲} = \frac{N \mp \sqrt{N^{۲} + ۴\sqrt{G}}}{\sqrt{G}}$$

اگر

$$h = \hat{h_{۲}} \Rightarrow \lambda_{۱} = -۱, |\lambda_{۲}| > ۱$$

نقطه ثابت $E_{۲} = (x_{۲}, y_{۲})$ ناپایدار می باشد و دارای انشعاب فلیپ می باشد. شکل ۲ و ۳ را ببینید.
اگر

$$\hat{h_{۱}} < h < \hat{h_{۲}} \Rightarrow |\lambda_{۱}| < ۱, |\lambda_{۲}| > ۱$$

نقطه ثابت از نوع زین می باشد و اگر $h > \hat{h_{۲}}$ آنگاه $|\lambda_{۱}| > ۱, |\lambda_{۲}| > ۱$ که این نقطه ثابت را ناپایدار می کند.

۳.۲ پایداری نقاط ثابت $E_{۳}$

پایداری نقطه ثابت $E_{۳} = (x_{۳}, y_{۳})$ را با یک لم بررسی می کنیم.

لم: فرض کنید $f(\lambda)=\lambda^۲-P\lambda+Q$ و $f(۱)>۰$ و $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ ریشه های $f(\lambda)=۰$ باشند آنگاه

۱- $|\lambda_۱|<۱,|\lambda_۲|<۱$ اگر و تنها اگر $f(-۱)>۰, Q<۱$

۲- $|\lambda_۱|>۱,|\lambda_۲|>۱$ اگر و تنها اگر $f(-۱)>۰, Q>۱$

۳- $|\lambda_۱|>۱,|\lambda_۲|<۱$ یا $|\lambda_۱|<۱,|\lambda_۲|>۱$ اگر و تنها اگر $f(-۱)<۰$

۴- $\lambda_۱=-۱,|\lambda_۲|\neq ۱$ اگر و تنها اگر $f(-۱)=۰$، $P\neq ۰,۲$

۵- دو ریشه مختلط با $|\lambda_۱|=۱,|\lambda_۲|=۱$ وجود دارد اگر و تنها اگر $Q=۱, P^۲-۴Q<۰$

بنابراین با توجه به لم بالا و اطلاعات مساله در این نقطه ثابت داریم:

$$f(۱)=\sqrt{G}h^۲,\qquad f(-۱)=\sqrt{G}h^۲+۲Ph+۴,$$

$$P=\frac{۱}{(\beta+\delta)(۲\beta+\delta-h_۱-\sqrt{G})}((\delta^۲+(۳\beta-۱)\delta+۲\beta^۲-۲\beta+h_۱)(-\sqrt{G})+$$
$$\delta^۳+(\beta-h_۱-۱)\delta^۲+((-۳h_۱-۲)\beta+۲h_۱)\delta+(-۲h_۱-۲)\beta^۲+۴h_۱\beta-h_۱^۲).$$

به منظور پیدا کردن مقادیر ویژه داریم:

$$f(\lambda)=\lambda^۲-tr(J)+det(J)=۰$$

$$\lambda_۱=\frac{Ph}{۲}+۱-\frac{\sqrt{P^۲h^۲-۴\sqrt{G}h^۲}}{۲},\quad \lambda_۲=\frac{Ph}{۲}+۱+\frac{\sqrt{P^۲h^۲-۴\sqrt{G}h^۲}}{۲}.$$

حال اگر

$$-۲\sqrt[۴]{G}\leqslant P<۰,\qquad ۰<h<-\frac{P}{\sqrt{G}}$$

ویا

$$P<-۲\sqrt[۴]{G},\qquad ۰<h<\frac{-P-\sqrt{P^۲-۴\sqrt{G}}}{\sqrt{G}}$$

نقطه ثابت از نوع چاه است و اگر

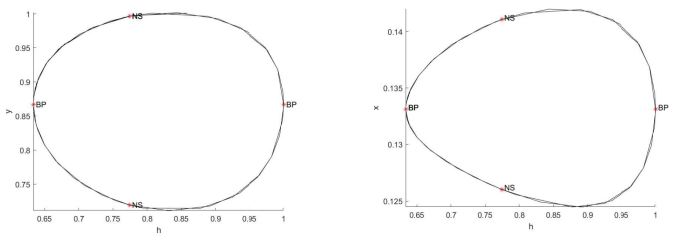
$$-۲\sqrt[۴]{G}\leqslant P<۰,\qquad h>-\frac{P}{\sqrt{G}}$$

و یا

$$P<-۲\sqrt[۴]{G},\qquad h>\frac{-P+\sqrt{P^۲-۴\sqrt{G}}}{\sqrt{G}}$$

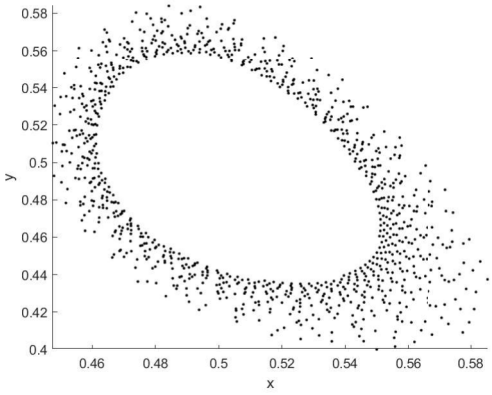
و یا $P\geqslant ۰$ نقطه ثابت از نوع چشمه است و اگر

$$-۲\sqrt[۴]{G}\leqslant P<۰,\qquad \frac{-P-\sqrt{P^۲-۴\sqrt{G}}}{\sqrt{G}}<h<\frac{-P+\sqrt{P^۲-۴\sqrt{G}}}{\sqrt{G}}$$



(b) (a)

شکل ۴: انشعاب فلیپ فوق بحرانی



شکل ۵: انشعاب نیمارک-ساکر فوق بحرانی

نقطه ثابت زین است و اگر

$$P < -۲\sqrt[۴]{G}, \qquad h = \frac{-P \mp \sqrt{P^۲ - ۴\sqrt{G}}}{\sqrt{G}}, h \neq \frac{-۲}{P}, \frac{-۴}{P}$$

مقدار ویژه حقیقی منفی یک داریم و انشعاب فلیپ رخ می دهد. ببینید شکل ۴. در پایان اگر

$$-۲\sqrt[۴]{G} < P < ۰, \qquad h = \frac{-P}{\sqrt{G}}$$

دو مقدار ویژه مختلط با اندازه یک داریم و می توان انشعاب نیمارساکر را به ازای این پارامتر ها بررسی کرد. ببینید شکل ۵.

۳ نتیجه گیری

در این مطالعه به بررسی یک سیستم شکار و شکارچی پرداختیم. پایداری نقاط تعادل از این سیستم را بررسی کردیم و نمای فاز و دیاگرام انشعاب را برای برخی انشعابات موجود در آن رسم کردیم.

مراجع

[1] Huang, J., Gong, Y. and Ruan, S., 2013. Bifurcation analysis in a predator-prey model with constant-yield predator harvesting. Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B, 18(8), pp.2101-2121.

[2] Hadadi, J., Alidousti, J., Khoshsiar Ghaziani, R. and Eskandari, Z., 2025. Bifurcations and complex dynamics of a two dimensional neural network model with delayed discrete time. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 48(7), pp.8091-8102.

[3] Hadadi, J., Ghaziani, R.K., Alidousti, J. and Eskandari, Z., 2024. Dynamics and bifurcations of a discrete-time neural network model with a single delay. Journal of Mathematical Modeling (JMM), 12(3).

[4] Eskandari, Z., Avazzadeh, Z., Khoshsiar Ghaziani, R. and Li, B., 2025. Dynamics and bifurcations of a discrete-time Lotka–Volterra model using nonstandard finite difference discretization method. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 48(7), pp.7197-7212.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

ارزیابی پیشرفت و پسرفت بهره وری سود با استفاده از اندیس مالم کوئیسن گلوبال

اسماعیل ممبینی [۱] سیدعلی خالقی [۲]

[۱] گروه ریاضی، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاد اسلامی، رامهرمز، ایران
[۲] گروه ریاضی، واحد دهدشت، دانشگاه آزاد اسلامی، دهدشت، ایران

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش ناپارامتری در اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌باشد. از نظر هر مدیر پیشرفت یا پسرفت واحدی که مدیریت آن را به عهده دارد بسیار مهم است، چرا که برنامه‌ریزی و اتخاذ سیاست‌های آینده سازمان و یا واحد تصمیم‌گیرنده را منطقی‌تر و علمی‌تر می‌کند. روش‌های مختلفی جهت محاسبه پیشرفت و پسرفت واحدهای تحت ارزیابی با اندیس مالم کوئیست مورد استفاده قرار گرفته است. در این مقاله واحدها از نظر میزان مصرف هزینه و تولید درآمد و کسب سود در چند دوره زمانی مورد بررسی قرار گرفتند و میزان پیشرفت یا پسرفت هر کدام از این واحدها از نظر استفاده مینیمم از منابع و مصرف هزینه کمتر و تولید درآمد بیشتر و کسب سود ماکزیمم مورد بررسی قرار گرفتند و پیشرفت یا پسرفت هزینه، درآمد و سود هر واحد با ارائه یک روش که مبتنی بر حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی است، محاسبه کردیم.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی اقتصادی، مالم کوئیست گلوبال، پیشرفت، پسرفت

۱ مقدمه

مفهوم کارایی هزینه که توانایی یک واحد تصمیم‌گیرنده برای تولید خروجی‌ها با کمترین هزینه قیمت ورودی را می‌سنجد، فارل در ۱۹۵۷ آغاز کرد. او کارایی هزینه را نسبت مینیمم هزینه به هزینه واقعی تعریف کرد [۷]. از سال ۱۹۷۸ چارنز، کوپر و رودز تحلیل پوششی داده‌ها را به شکل کنونی آغاز کردند [۸] و به صورت گسترده تبدیل به اسباب مناسبی در بین پژوهشگران برای بررسی کارایی بنگاه‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌ها و تکنولوژی‌های تولید تبدیل گردید. از جنبه‌های مهم کاربرد تحلیل تولید واحدهای تصمیم‌گیرنده اندازه‌گیری کارایی هزینه و درآمد است [۷].

از دیگر موضوعات پایه‌ای و مهم در DEA، اولین بار در سال ۱۹۵۳ اندیس مالم کوئیست به عنوان یک اندیس کیفی در تحلیل ورودی‌های مصرفی توسط استن مالم کوئیست ارائه شد و در بین پژوهشگران بنام خودش معروف شد. در سال ۱۹۸۲ کیوس و همکاران به منظور بهره‌وری در DEA آن

[1] esmaeil.mombini@iau.ac.ir
[2] sa.khaleggi@iau.ac.ir

را مطرح کردند [۷]. فار و همکاران در سال ۱۹۹۴ ایده‌های اندازه‌گیری کارایی فارل و اندازه‌گیری بهره‌وری را از کیو ترکیب کردند و اندیس بهره‌وری مالم کوئیست را به صورت حاصل ضرب تغییرات کارایی تکنیکی و تغییرات مرز تکنولوژی تجزیه کردند.

۲ کارایی

یک روش ناپارامتری برای اندازه‌گیری کارایی هاDMU تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) است.

۱.۲ کارایی تکنیکی

فرض n واحد تصمیم‌گیرنده ($DMU_j, j = ۱, ۲, ۳, ..., n$) داشته باشیم که m ورودی را برای تولید s خروجی به کار می‌برند و بردارهای $x_j = (x_{۱j}, ..., x_{mj})$ و $y_j = (y_{۱j}, ..., y_{sj})$ به ترتیب ورودی‌ها و خروجی‌ها باشند. به طوری که $x_j \geq ۰$ و $y_j \geq ۰$ و $x_j \neq ۰$ و $y_j \neq ۰$. کارایی تکنیکی ورودی محور برای $DMU_.$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i.}, \quad i = ۱, \ldots, m \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{r.}, \quad r = ۱, \ldots, s \\
&\lambda_j \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n
\end{aligned}
$$

۲.۲ کارایی اقتصادی (کارایی هزینه، درآمد و سود)

مسئله حداقل‌سازی هزینه یک شرکت با ورودی‌هایی برای تولید خروجی‌ها و بردار هزینه c ($c = (c_۱, \ldots, c_m)$ و $c_i > ۰$) را در نظر می‌گیریم. حداقل هزینه کل برای تولید بردار خروجی $y_.$ را با حل مدل زیر به دست می‌آوریم:

$$\min \sum_{i=۱}^{m} c_i x_i$$

s.t.

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_i, \quad i = ۱, \ldots, m$$

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{r۰}, \quad r = ۱, \ldots, s$$

$$\lambda_j \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n$$

$$x_i \geq ۰, \quad i = ۱, \ldots, m$$

کارایی هزینه نسبت حداقل هزینه به هزینه واقعی است:

$$CE = \frac{\sum_{i=۱}^{m} c_i x_i^*}{\sum_{i=۱}^{m} c_i x_{i۰}}$$

اگر بخواهیم برای هاDMU حداکثرسازی درآمد را انجام دهیم درآمد واقعی به شرطی که بردار قیمت‌های خروجی r ($r = (r_۱, \ldots, r_s)$ و $r_r > ۰$) مشخص باشد ماکسیمم درآمد به دست آمده از بردار ورودی $x_۰$ از حل مدل زیر به دست می‌آید:

$$\max \sum_{r=۱}^{s} r_r y_r$$

s.t.

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{i۰}, \quad i = ۱, \ldots, m$$

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_r, \quad r = ۱, \ldots, s$$

$$\lambda_j \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n$$

$$y_r \geq ۰, \quad r = ۱, \ldots, s$$

و کارایی درآمد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$RE = \frac{\sum_{r=۱}^{s} r_r y_{r۰}}{\sum_{r=۱}^{s} r_r y_r^*}$$

همچنین کارایی سود یک $DMU_.$ به صورت مدل زیر است:

$$\max \sum_{r=۱}^{s} r_r y_r - \sum_{i=۱}^{m} c_i x_i$$

s.t.

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_i, \quad i = ۱, \ldots, m$$

$$\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_r, \quad r = ۱, \ldots, s$$

$$\lambda_j \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n$$

$$x_i \geq ۰, \quad i = ۱, \ldots, m$$

$$y_r \geq ۰, \quad r = ۱, \ldots, s$$

۳ محاسبه پیشرفت و پسرفت کارایی اقتصادی (هزینه، درآمد و سود)

پس از اجرای مدل CCR کارایی اقتصادی، به دنبال آن هستیم که آیا واحدهای مختلف تصمیم‌گیرنده با توجه به نوع عملکردشان در طی دوره‌های زمانی مختلف دارای پیشرفت، پسرفت و یا بدون تغییر بوده‌اند. در این خصوص برای هر واحد تصمیم‌گیرنده با توجه به شاخص مالم کوئیست بین دو دوره زمانی t و $t+۱$ می‌بایست چهار تابع مسافت را محاسبه کرد که این خود مستلزم حل چهار مسئله برنامه‌ریزی خطی است.

برای کارایی هزینه چهار مسئله به شرح زیر مطرح و حل خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
& D_c^t(x_{\cdot}^t, y_{\cdot}^t) = \min \theta \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^t \leq \theta x_{\cdot}^t \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^t \geq y_{\cdot}^t \\
& \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& D_c^{t+1}(x_{\cdot}^{t+1}, y_{\cdot}^{t+1}) = \min \theta \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^{t+1} \leq \theta x_{\cdot}^{t+1} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^{t+1} \geq y_{\cdot}^{t+1} \\
& \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& D_c^t(x_{\cdot}^{t+1}, y_{\cdot}^{t+1}) = \min \theta \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^t \leq \theta x_{\cdot}^{t+1} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^t \geq y_{\cdot}^{t+1} \\
& \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_c^{t+1}(x_\cdot^t, y_\cdot^t) = \min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^{t+1} \le \theta x_\cdot^t \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^{t+1} \ge y_\cdot^t \\
&\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

و در آخر برای بررسی و تحلیل کارایی سود نیز باید چهار مدل به شرح زیر مطرح و حل گردد:

$$
\begin{aligned}
&D_p^t(x_\cdot^t, y_\cdot^t) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^t \le x_\cdot^t \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^t \ge \phi y_\cdot^t \\
&\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_p^{t+1}(x_\cdot^{t+1}, y_\cdot^{t+1}) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^{t+1} \le x_\cdot^{t+1} \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^{t+1} \ge \phi y_\cdot^{t+1} \\
&\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& D_p^t(x_{\cdot}^{t+1}, y_{\cdot}^{t+1}) = \max \phi \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^t \leq x_{\cdot}^{t+1} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^t \geq \phi y_{\cdot}^{t+1} \\
& \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& D_p^{t+1}(x_{\cdot}^t, y_{\cdot}^t) = \max \phi \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^{t+1} \leq x_{\cdot}^t \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^{t+1} \geq \phi y_{\cdot}^t \\
& \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

اندیس مالم کوئیست برای کارایی سود $DMU_{\cdot}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$
M_{\cdot} = \left[\frac{D_c^t(x_{\cdot}^t, y_{\cdot}^t)}{D_c^{t+1}(x_{\cdot}^t, y_{\cdot}^t)} \times \frac{D_c^t(x_{\cdot}^{t+1}, y_{\cdot}^{t+1})}{D_c^{t+1}(x_{\cdot}^{t+1}, y_{\cdot}^{t+1})} \right]^{1/2}
$$

۴ محاسبه پیشرفت و پسرفت کارایی اقتصادی با اندیس مالم کوئیست گلوبال

اگر واحدها در دوره‌های زمانی $t = 1, 2, 3, ..., T$ ارزیابی شده باشند در روش مالم کوئیست گلوبال همه واحدها را یک جا بررسی می‌کنیم و مدل کارایی هزینه برای $DMU_{\cdot}$ در زمان k به صورت زیر نوشته می‌شود. در این قسمت هر DMU در دوره‌های زمانی مختلف با خودش مقایسه می‌شود و بررسی می‌کنیم که در دو دوره مانند p و q پیشرفت و پسرفت داشته است و یا خیر:

$$
\begin{aligned}
&D_c^G(x_{\cdot}^k, y_{\cdot}^k) = \min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq \theta x_{\cdot}^k \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq y_{\cdot}^k \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_c^G(x_{\cdot}^p, y_{\cdot}^p) = \min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq \theta x_{\cdot}^p \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq y_{\cdot}^p \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_c^G(x_{\cdot}^q, y_{\cdot}^q) = \min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq \theta x_{\cdot}^q \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq y_{\cdot}^q \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T
\end{aligned}
$$

مدل کارایی درآمد برای $DMU_{\cdot}$ در زمان K به صورت زیر نوشته می‌شود. و هر DMU در دوره‌های زمان مختلف با خودش مقایسه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&D_r^G(x_\cdot^k, y_\cdot^k) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq x_\cdot^k \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq \phi y_\cdot^k \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_r^G(x_\cdot^p, y_\cdot^p) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq x_\cdot^p \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq \phi y_\cdot^p \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_r^G(x_\cdot^q, y_\cdot^q) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq x_\cdot^q \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq \phi y_\cdot^q \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T
\end{aligned}
$$

و کارایی درآمد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R^G_{\cdot} = \frac{D^G_r(x^p_{\cdot}, y^p_{\cdot})}{D^G_r(x^q_{\cdot}, y^q_{\cdot})}$$

برای بررسی $DMU_{\cdot}$ در زمان p نسبت به زمان q در مدل قرار می‌دهیم $K = p, q$ و دو مسئله مطرح و حل می‌شوند. اندیس مالم کوئیست گلوبال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M^G_{\cdot} = \frac{D^G_c(x^p_{\cdot}, y^p_{\cdot})}{D^G_c(x^q_{\cdot}, y^q_{\cdot})}$$

مدل کارآیی سود برای $DMU_{\cdot}$ در زمان K را به صورت زیر می‌نویسیم و هر DMU را در دوره‌های زمانی مختلف با خودش مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&D^G_\pi(x^k_{\cdot}, y^k_{\cdot}) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda^t_j x^t_j \le x^k_{\cdot} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda^t_j y^t_j \ge \phi y^k_{\cdot} \\
&\lambda^t_j \ge ۰, \quad j = ۱, \dots, n, \quad t = ۱, \dots, T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D^G_\pi(x^p_{\cdot}, y^p_{\cdot}) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda^t_j x^t_j \le x^p_{\cdot} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda^t_j y^t_j \ge \phi y^p_{\cdot} \\
&\lambda^t_j \ge ۰, \quad j = ۱, \dots, n, \quad t = ۱, \dots, T
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& D_{\pi}^{G}(x_{\cdot}^{q}, y_{\cdot}^{q}) = \max \phi \\
& \text{s.t.} \\
& \sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_{j}^{t} x_{j}^{t} \leq x_{\cdot}^{q} \\
& \sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_{j}^{t} y_{j}^{t} \geq \phi y_{\cdot}^{q} \\
& \lambda_{j}^{t} \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T
\end{aligned}
$$

و کارایی سود را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

$$\Pi_{\cdot}^{G} = \frac{D_{\pi}^{G}(x_{\cdot}^{p}, y_{\cdot}^{p})}{D_{\pi}^{G}(x_{\cdot}^{q}, y_{\cdot}^{q})}$$

برای بررسی $DMU_{\cdot}$ در زمان p نسبت به زمان q قرار می‌دهیم $K = p, q$. و دو مسئله مطرح و حل می‌شوند. اندیس مالم کوئیست گلوبال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_{\pi,\cdot}^{G} = \left[\frac{D_{\pi}^{G}(x_{\cdot}^{p}, y_{\cdot}^{p})}{D_{\pi}^{G}(x_{\cdot}^{q}, y_{\cdot}^{q})} \right]^{۱/۲}$$

- اگر $M_{\pi,\cdot}^{G} > ۱$ باشد، واحد پیشرفت داشته است.
- اگر $M_{\pi,\cdot}^{G} < ۱$ باشد، واحد پسرفت داشته است.
- اگر $M_{\pi,\cdot}^{G} = ۱$ باشد، واحد بدون تغییر است.

در این مقاله پیشرفت و پسرفت کارایی اقتصادی را با استفاده از مالم کوئیست و مالم کوئیست گلوبال با روش جدیدی بررسی کردیم.

مراجع

[1] Ahangari, T., Rostamy - Malkhalifeh, M. Measurement of profit inefficiency in presence of interval data using the directional distance function. Received 16 March 2016; accepted 26 May 2020.

[2] Akhlaghi, R. Rostamy-Malkhalifeh, M. A linear programing DEA model for selecting a single efficient unit International jornal of industrial engineering and operational research volume 1, No. 1, 2019.

[3] Biresh K. Sahoo, Mahmood Mehdiloozad, Kaoru Tone (2014). Cost, revenue and profit efficiency measurement in DEA: A directional distance function approach.

[4] Emrouznejad, A. Yang, G-L. A framework for measuring global malmquist - Leunberger productivity index with CO2 emissions on Chinese manufacturing industries. Energy, 115, (2023), 840 - 856.

[5] Esmaeil, Mombini, Mohsen, Rostamy-Malkhalifeh, MEASUREMENT and CONTROL, 2020, 53(7-8) 1278-1285

[6] Fare and Grosskopf S, Norris M, Zhang Z. 1994. productivity growth, technical progress and efficiency change in industrialized countries", American economic Review, 84 (1): 66 - 83.

[7] Farrell, M.J., 1957. The measurement of productive efficiency. Journal of the Royal statistical society, series A 120: 253 - 281.

[8] Jahanshahloo, G.R., Lotfi, F.H., Malkhalifeh, M.R.: A generalized model for data envelopment analysis with interval data. Math. comput. Model. 33 (7), 3237-3244 (2009).

[9] Mehdi toloo,Nazila Aghayi,Mohsen Rostamy-Malkhalifeh.Measuring Overall Profit Efficiency with interval data[J].Applied Mathematics and Computation,2008,201:640-649.

[10] Pejman Peykani, Emran Mohammadi, Ali Emrouznejad, Mirsaman Pishvaee, Mohsen Rostamy-Malkhalifeh. Fuzzy Data Envelpment Analysis: An Adjustable Approach Expert Systems With Applications (2019) 50957-4174 (19) 30439 - 7.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC
Islamic World Science Citation Center
۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

اندیس مالم کوئیست گلوبال و کاربرد آن در سنجش بهره‌وری اقتصادی

اسماعیل ممبینی [۱] نسترن ممبینی [۲]

[۱] گروه ریاضی، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاد اسلامی، رامهرمز، ایران
[۲] دانشکده ریاضی، تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان، ایران

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها روشی است ناپارامتری برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده. پیشرفت یا پسرفت واحدها برای مدیران یا تصمیم‌گیرندگان واحدها اهمیت فراوان دارد، تا بتوانند در برنامه‌ریزی و اتخاذ سیاست‌های آینده سازمان و یا واحد تصمیم‌گیرنده بهتر عمل کنند. در این نوشتار واحدها را در چند دوره زمانی از نظر میزان مصرف هزینه و تولید درآمد و کسب سود مورد بررسی قرار داده‌ایم و اندازه پیشرفت یا پسرفت هر کدام از این واحدها از نظر استفاده مینیمم از منابع و مصرف هزینه کمتر و تولید درآمد بیشتر و کسب سود ماکزیمم مورد بررسی قرار داده‌ایم. و پیشرفت یا پسرفت هزینه، درآمد و سود هر واحد با معرفی روشی که براساس حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی است، محاسبه کردیم.

کلمات کلیدی: واحد تصمیم‌گیرنده، کارایی، مالم کوئیست گلوبال، بهره‌وری، سود

۱ مقدمه

فارل در ۱۹۵۷ کارایی هزینه را نسبت مینیمم هزینه به هزینه واقعی تعریف کرد [۶]. در سال ۱۹۷۸ چارنز، کوپر و رودز تحلیل پوششی داده‌ها را تبیین کردند [۷] و در بین پژوهشگران به شکل گسترده برای بررسی کارایی سازمان‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌ها و تکنولوژی‌های تولید تبدیل گردید.

از دیگر موضوعات پایه‌ای و مهم در DEA، اولین بار در سال ۱۹۵۳ اندیس مالم کوئیست به عنوان یک اندیس کیفی در تحلیل ورودی‌های مصرفی توسط استن مالم کوئیست ارائه شد و در بین پژوهشگران به اندیس مالم کوئیست معروف شد. بعدها کیوس و همکاران از آن برای بررسی بهره‌وری استفاده کردند.

۲ کارایی

یک روش ناپارامتری برای اندازه‌گیری کارایی هاDMU تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) است.

[1] esmaeil.mombini@iau.ac.ir
[2] nastaran.mombini@iau.ac.ir

۳ محاسبه پیشرفت و پسرفت کارایی اقتصادی (هزینه، درآمد و سود)

پس از اجرای مدل CCR کارایی اقتصادی، به دنبال آن هستیم که آیا واحدهای مختلف تصمیم‌گیرنده با توجه به نوع عملکردشان در طی دوره‌های زمانی مختلف دارای پیشرفت، پسرفت و یا بدون تغییر بوده‌اند. در این خصوص برای هر واحد تصمیم‌گیرنده با توجه به شاخص مالم کوئیست بین دو دوره زمانی t و $t+۱$ می‌بایست چهار تابع مسافت را محاسبه کرد که این خود مستلزم حل چهار مسئله برنامه‌ریزی خطی است.

برای کارایی هزینه چهار مسئله به شرح زیر مطرح و حل خواهد شد.

$$
\begin{aligned}
&D_c^t(x_\cdot^t, y_\cdot^t) = \min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j^t \le \theta x_\cdot^t, \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j^t \ge y_\cdot^t, \\
&\lambda_j \ge ۰, \quad j = ۱, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_c^{t+۱}(x_\cdot^{t+۱}, y_\cdot^{t+۱}) = \min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j^{t+۱} \le \theta x_\cdot^{t+۱}, \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j^{t+۱} \ge y_\cdot^{t+۱}, \\
&\lambda_j \ge ۰, \quad j = ۱, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_c^t(x_{\cdot}^{t+۱}, y_{\cdot}^{t+۱}) = \min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j^t \le \theta x_{\cdot}^{t+۱}, \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j^t \ge y_{\cdot}^{t+۱}, \\
&\lambda_j \ge ۰, \quad j = ۱, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_c^{t+۱}(x_{\cdot}^t, y_{\cdot}^t) = \min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j^{t+۱} \le \theta x_{\cdot}^t, \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j^{t+۱} \ge y_{\cdot}^t, \\
&\lambda_j \ge ۰, \quad j = ۱, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

و در آخر برای بررسی و تحلیل کارایی سود نیز باید چهار مدل به شرح زیر مطرح و حل گردد.

$$
\begin{aligned}
&D_p^t(x_{\cdot}^t, y_{\cdot}^t) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j^t \le x_{\cdot}^t, \\
&\sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j^t \ge \phi y_{\cdot}^t, \\
&\lambda_j \ge ۰, \quad j = ۱, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_p^{t+1}(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^{t+1} \le x_o^{t+1}, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^{t+1} \ge \phi y_o^{t+1}, \\
&\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_p^{t}(x_o^{t+1}, y_o^{t+1}) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^{t} \le x_o^{t+1}, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^{t} \ge \phi y_o^{t+1}, \\
&\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_p^{t+1}(x_o^{t}, y_o^{t}) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^{t+1} \le x_o^{t}, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^{t+1} \ge \phi y_o^{t}, \\
&\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

اندیس مالم کوئیست برای کارایی سود DMU_o از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$
M_o = \left[\frac{D_c^t(x_o^t, y_o^t)}{D_c^{t+1}(x_o^t, y_o^t)} \times \frac{D_c^t(x_o^{t+1}, y_o^{t+1})}{D_c^{t+1}(x_o^{t+1}, y_o^{t+1})} \right]^{1/2}.
$$

۴ محاسبه پیشرفت و پسرفت کارایی اقتصادی با اندیس مالم کوئیست گلوبال

اگر واحدها در دوره‌های زمانی $t = ۱, ۲, ۳, \ldots, T$ ارزیابی شده باشند در روش مالم کوئیست گلوبال همه واحدها را یک جا بررسی می‌کنیم و مدل کارایی هزینه برای $DMU_{\cdot}$ در زمان k به صورت زیر نوشته می‌شود. در این قسمت هر DMU در دوره‌های زمانی مختلف با خودش مقایسه می‌شود و بررسی می‌کنیم که در دو دوره مانند p و q پیشرفت و پسرفت داشته است و یا خیر.

$$
\begin{aligned}
&D_c^G(x_{\cdot}^k, y_{\cdot}^k) = \min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq \theta x_{\cdot}^k, \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq y_{\cdot}^k, \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_c^G(x_{\cdot}^p, y_{\cdot}^p) = \min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq \theta x_{\cdot}^p, \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq y_{\cdot}^p, \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_c^G(x_\cdot^q, y_\cdot^q) = \min \theta \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq \theta x_\cdot^q, \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq y_\cdot^q, \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T.
\end{aligned}
$$

مدل کارایی درآمد برای $DMU_\cdot$ در زمان K به صورت زیر نوشته می‌شود. و هر DMU در دوره‌های زمان مختلف با خودش مقایسه می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&D_r^G(x_\cdot^k, y_\cdot^k) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq x_\cdot^k, \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq \phi y_\cdot^k, \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_r^G(x_\cdot^p, y_\cdot^p) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq x_\cdot^p, \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq \phi y_\cdot^p, \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_r^G(x_\cdot^q, y_\cdot^q) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq x_\cdot^q, \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq \phi y_\cdot^q, \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T.
\end{aligned}
$$

و کارایی درآمد از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$R_\cdot^G = \frac{D_r^G(x_\cdot^p, y_\cdot^p)}{D_r^G(x_\cdot^q, y_\cdot^q)}.$$

برای بررسی $DMU_\cdot$ در زمان p نسبت به زمان q در مدل قرار می‌دهیم $K = p, q$ و دو مسئله مطرح و حل می‌شوند. اندیس مالم کوئیست گلوبال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_\cdot^G = \frac{D_c^G(x_\cdot^p, y_\cdot^p)}{D_c^G(x_\cdot^q, y_\cdot^q)}.$$

مدل کارآیی سود برای $DMU_\cdot$ در زمان K را به صورت زیر می‌نویسیم و هر DMU را در دوره‌های زمانی مختلف با خودش مقایسه می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
&D_\pi^G(x_\cdot^k, y_\cdot^k) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq x_\cdot^k, \\
&\sum_{t=۱}^{T} \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq \phi y_\cdot^k, \\
&\lambda_j^t \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, n, \quad t = ۱, \ldots, T.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_{\pi}^{G}(x_{\cdot}^{p}, y_{\cdot}^{p}) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq x_{\cdot}^{p}, \\
&\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq \phi y_{\cdot}^{p}, \\
&\lambda_j^t \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad t = 1, \ldots, T.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_{\pi}^{G}(x_{\cdot}^{q}, y_{\cdot}^{q}) = \max \phi \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^t x_j^t \leq x_{\cdot}^{q}, \\
&\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^t y_j^t \geq \phi y_{\cdot}^{q}, \\
&\lambda_j^t \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad t = 1, \ldots, T.
\end{aligned}
$$

و کارایی سود را از رابطه زیر به دست می‌آوریم.

$$\Pi_{\cdot}^{G} = \frac{D_{\pi}^{G}(x_{\cdot}^{p}, y_{\cdot}^{p})}{D_{\pi}^{G}(x_{\cdot}^{q}, y_{\cdot}^{q})}.$$

برای بررسی $DMU_{\cdot}$ در زمان p نسبت به زمان q قرار می‌دهیم $K = p, q$. و دو مسئله مطرح و حل می‌شوند. اندیس مالم کوئیست گلوبال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_{\pi,\cdot}^{G} = \left[\frac{D_{\pi}^{G}(x_{\cdot}^{p}, y_{\cdot}^{p})}{D_{\pi}^{G}(x_{\cdot}^{q}, y_{\cdot}^{q})} \right]^{1/2}.$$

- اگر $M_{\pi,\cdot}^{G} > 1$ باشد، واحد پیشرفت داشته است.
- اگر $M_{\pi,\cdot}^{G} < 1$ باشد، واحد پسرفت داشته است.
- اگر $M_{\pi,\cdot}^{G} = 1$ باشد، واحد بدون تغییر است.

در این نوشتار پیشرفت و پسرفت کارایی اقتصادی با استفاده از مالم کوئیست گلوبال با ایده نوین بررسی کردیم.

مراجع

[1] Akhlaghi, R. Rostamy-Malkhalifeh, M. A linear programing DEA model for selecting a single efficient unit International jornal of industrial engineering and operational research volume 1, No. 1, 2019.

[2] Biresh K. Sahoo, Mahmood Mehdiloozad, Kaoru Tone (2014). Cost, revenue and profit efficiency measurement in DEA: A directional distance function approach.

[3] Emrouznejad, A. Yang, G-L. A framework for measuring global malmquist - Leunberger productivity index with CO2 emissions on Chinese manufacturing industries. Energy, 115, (2023), 840 - 856.

[4] Esmaeil, Mombini, Mohsen, Rostamy-Malkhalifeh, MEASUREMENT and CONTROL, 2020, 53(7-8), 1278-1285

[5] Fare and Grosskopf S, Norris M, Zhang Z. 1994. productivity growth, technical progress and efficiency change in industrialized countries", American economic Review, 84 (1): 66 - 83.

[6] Farrell, M.J., 1957. The measurement of productive efficiency. Journal of the Royal statistical society, series A 120: 253 - 281.

[7] Jahanshahloo, G.R., Lotfi, F.H., Malkhalifeh, M.R.: A generalized model for data envelopment analysis with interval data. Math. comput. Model. 33 (7), 3237-3244 (2009).

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

مسئله جابجاشدگی کمین و ثابت توکشیدگی بهین در فضاهای باناخ

نسترن ممبینی [۱] اسماعیل ممبینی [۲]

[۱] دانشکده ریاضی، تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان، ایران
[۲] گروه ریاضی، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاد اسلامی، رامهرمز، ایران

چکیده

در این مقاله برای برخی از فضاهای باناخ، مشخصه جابجاشدگی کمین $\psi_k(X)$ را تعیین کرده و یا تخمینی مناسبی از آنرا بدست می‌آوریم. همچنین برای برخی از فضاهای باناخ کران‌های بالا و یا پایینی از ثابت توکشی بهین ارائه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: نگاشت‌های لیپشیتزی، جابجاشدگی کمین، ثابت توکشی، توکشی بهین

۱ مقدمه

مطالعه مسئله جابجاشدگی کمین در سال ۱۹۷۳ توسط گوبل شروع شد. مقدار جابجاشدکی کمین در فضای بعد نامتناهی به صورت $d_T = \inf\{\|x - Tx\| : \ x \in B_X\}$ تعریف می‌شود که B_X یک گوی یکه است. گوبل نشان داد برای نگاشت‌های لیپشیتزی مقدار d_T می‌تواند مثبت باشد. سپس ثابت کرد برای $k \geq 0$، $d \leq 1 - \frac{1}{k}$ و مجموعه‌ها و فضاهایی وجود دارند که $d = 1 - \frac{1}{k}$، این فضاها را فرینه می‌گویند. همچنین برای هر فضای باناخ X تابع مشخصه جابجاشدگی کمین : $\psi_X : [1, \infty] \longrightarrow [0, \infty]$ را به‌صورت $\psi_X(k) = \sup_{T \in \mathcal{L}(k)} \inf_{x \in B_X} \|x - Tx\| = \sup_{T \in \mathcal{L}(k)} d_T$ برای $k \geq 1$ تعریف می‌کند. می‌دانیم که برای هر فضای X، $\psi_X(k) \leq 1 - \frac{1}{k}$ و برای فضاهای فرینه مانند $BC(\mathbb{R})$، C، C_0، $C^n[a, b]$، ℓ^∞ و $\psi_X(k) = 1 - \frac{1}{k}$ است. لین و استرنفلد نشان دادند برای $k > 1$، $\psi(k) > 0$ است. در تعدادی از فضاها کران پایین مشخصه جابجاشدگی کمین را بدست می‌آوریم. برای فضای ℓ^∞ تعیین کران پایین مشخصه جابجاشدگی کمین همچنان باز است.

[1] nastaran.mombini@iau.ac.ir
[2] esmaeil.mombini@iau.ac.ir

هدف از این تابع مطالعه مسئله جابجاشدگی کمین است.
در سال ۱۹۸۳ بنیامینی و استرنفلد نشان دادند که در هر فضای باناخ بعد نامتناهی، کره یکه یک توکشی لیپشیتزی از گوی یکه است. پس نظیر به هر فضای باناخ ثابت

$$k.(X) = \inf\{k \mid \exists R : B_X \longrightarrow S_X, \|Rx - Ry\| \leqslant k\|x - y\| \; \forall x, y \in X, Rx = x, \forall x \in S_X\}$$

تعریف می‌شود. برای هیچ فضای باناخی مقدار ثابت k را نمی‌دانیم. تخمین‌های گوناگونی برای این ثابت تاکنون بدست آمده است، می‌دانیم که برای هر فضای باناخ $k(X) > ۳$ ولی این نابرابری را می‌توان برای برخی از فضاهای باناخ بهبود بخشید. برای نمونه $k.(H) \geq ۴/۵۵$، $k.(\ell^۱) \geq ۴$. برای هر فضای باناخ فرینه X، $k.(X) \leq ۳۰/۸۴$، این تقریب را نیز می‌توان بهبود بخشید $k.(C[۰, ۱] \leq ۲۳/۳۱$، $k.(H) \leq ۲۸/۹۹$. کسینی و آنونی نشان دادند که بهترین تقریب مربوط به فضای $\ell^۱$ است و $k.(\ell^۱) \leq ۸$. هدف پیدا کردن تقریب مناسبی برای $k.(X)$ می‌باشد که تاکنون به‌دست نیامده است.

۲ فضاهای باناخ

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\mathbb{F}$ نشان‌گر میدان اعداد حقیقی و یا میدان اعداد مختلط باشد. یک فضای برداری X بر میدان اسکالر $\mathbb{F}$ را فضای نرم‌دار گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$ یک عدد حقیقی $\|x\|$ نسبت داده شود به‌قسمی‌که

(الف) $\|x\| \geqslant ۰$ و $\|x\| = ۰ \iff x = ۰$،

(ب) به ازای هر $x \in X$ و هر اسکالر α ، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

(پ) به ازای هر $x, y \in X$ ، $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

فضای نرم‌دار $(X, \|.\|)$ را یک فضای باناخ گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در X همگرا باشد.
اگر X یک فضای نرم‌دار باشد $B_X = \{x \in X : \; \|x\| \leqslant ۱\}$ و $S_X = \{x \in X : \; \|x\| = ۱\}$ را به‌ترتیب گوی یکه و کره یکه‌ی X می‌نامیم.

تعریف ۲.۲. فضای متری (X, d) و فضای متری (Y, ρ) را هم‌متر گوییم اگر یک نگاشت یک به‌یک و پوشای $f : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد بطوری‌که

$$\rho(fx, fy) = d(x, y), \;\; \forall x, y \in X.$$

قضیه ۱.۲. نگاشت تصویری نزدیکترین نقطه در فضای هیلبرت، $P_C : H \longrightarrow C$ غیر انبساطی است. یعنی P_C در نابرابری زیر صدق می‌کند:

$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\|, \;\; \forall x, y \in H.$$

قضیه ۲.۲. (نگاشت تصویری نزدیکترین نقطه) [۱] فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و $C \subseteq H$ محدب، بسته و ناتهی باشد و $x \in H$. در این صورت یک نقطه یکتا مانند $y \in C$ وجود دارد که $d(x, C) = \inf\{\|x - u\| : \ u \in C\} = \|x - y\|$. y را با $P_C(x)$ نمایش می‌دهیم. در واقع $P_C : H \longrightarrow C$ نگاشتی است که $P_C|_C = I$ به ویژه $P_C(x)$ با نابرابری زیر مشخص می‌شود:

$$\forall u \in C, \langle x - P_C(x), u - P_C(x)\rangle \leq ۰ \Leftrightarrow d(x, C) = \|x - P_C(x)\|.$$

تعریف ۳.۲. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد. نگاشت $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت لیپشیتزی است هرگاه یک مقدار ثابت نامنفی k وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\|Tx - Ty\| \leqslant k\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in X.$$

اگر $۰ \leqslant k < ۱$ ، نگاشت T را انقباضی و اگر $k = ۱$ نگاشت را غیر انبساطی می‌گوییم. خانواده‌ی همه نگاشت‌های kـلیپشیتزی را با نماد $\mathcal{L}(k)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۲. اگر $A \subseteq X$، غلاف محدب A را که با $co(A)$ نشان داده می‌شود عبارت است از اشتراک تمام مجموعه‌های محدب که A را شامل هستند.

تعریف ۵.۲. اگر X یک فضای برداری و $A \subseteq X$، کوچکترین مجموعه محدب و بسته شامل مجموعه A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Conv(A) = \overline{co}(A) = \{y = \Sigma_{i=۱}^{n}\alpha_i x_i, \alpha_i \geq ۰, x_i \in A \ s.t \ \Sigma_{i=۱}^{n}\alpha_i = ۱, i \in \mathbb{N}\}$$

قضیه ۳.۲. [۸] فرض کنید A یک زیر فضای دلخواه از فضای هیلبرت H باشد و فرض کنید $T : A \longrightarrow H$ یک نگاشت kـلیپشیتزی است. آنگاه یک گسترش k ـلیپشیتزی $\widetilde{T} : H \longrightarrow Conv(T(A))$ از T وجود دارد.

تعریف ۶.۲. فرض کنید X یک فضای باناخ و $C \subseteq X$ یک زیر مجموعه بسته و محدب از فضای X و $T : C \longrightarrow C$ یک نگاشت باشد. می‌گوییم T به طور یکنواخت لیپشیتزی است اگر یک مقدار ثابت $k \geqslant ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\|T^n x - T^n y\| \leqslant k\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

تعریف ۷.۲. مجموعه X و نگاشت $T : X \longrightarrow X$ داده شده اند. نقطه $x \in X$ را یک نقطه ثابت T گوییم اگر $x = Tx$.

قضیه ۴.۲. [۱۱] اگر X یک فضای باناخ دلخواه باشد و $X \subseteq \ell^\infty$ آنگاه نگاشت تصویری $P : X \longrightarrow \ell^\infty$ با نرم ۱ وجود دارد.

۳ مسئله جابجاشدگی کمین

لم ۱.۳. در هر فضای باناخ X و برای هر $k \geqslant ۱$ ، $\psi_X(k) \leqslant ۱ - \frac{۱}{k}$.

قضیه ۱.۳. [۶] اگر فضای باناخ X هر یک از فضاهای $c_۰$، $C[۰,۱]$ و یا $BC(\mathbb{R})$ (همه توابع پیوسته و کراندار $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ مجهز به نرم $\|.\|_\infty$) باشد، آنگاه برای هر $k \geq ۱$، $\psi_X(k) = ۱ - \frac{۱}{k}$.

می‌خواهیم مشخصه‌ی جابه‌جایی کمین را برای تعدادی از فضاهای باناخ بررسی کنیم.

لم ۲.۳. فرض کنید K یک زیر مجموعه‌ی نافشرده، کراندار و بسته از یک فضای باناخ X با $۰ \in K$ باشد. آنگاه عدد $r > ۰$ و دنباله $\{x_n\}$ از نقاط K برای هر $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$dist(x_{n+۱}, span\{x_۱, \cdots, x_n\}) \geq r > ۰.$$

لم ۳.۳. هوموморفیسم H از Δ به روی $\Delta(K)$ وجود دارد که H و $H^{-۱}$ هردو لیپشیتزی هستند.

لم ۴.۳. توکشی $\Delta \longrightarrow \Delta$ وجود دارد که روی $\ell^\infty(\mathbb{N}_۰)$ لیپشیتزی است.

۴ مسئله توکشی بهین

برای هر فضای X، ثابت $k_۰(X)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$k_۰(X) = \inf\{k \mid \exists R : B_X \longrightarrow S_X, \|Rx - Ry\| \leqslant k\|x - y\| \quad \forall x, y \in X, Rx = x, \forall x \in S_X\}$$

این مقدار را ثابت توکشی بهین فضای X می‌نامیم.

تعریف ۱.۴. فضای باناخ X را محدب یکنواخت گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in B_X$ اگر $\|x - y\| < \varepsilon$ آنگاه $\|\frac{۱}{۲}(x + y)\| > ۱ - \delta$. فضای باناخ X به‌طور یکنواخت نامربعی است اگر محدب یکنواخت باشد.

نکته ۱.۴. [۴] برای هر $n = ۱, ۲, \cdots$ داریم $\|x - T^n x\| \leq \Sigma_{i=۰}^{n-۱} \|T^i x - T^{i+۱} x\| \leq n\|x - Tx\|$.

تعریف ۲.۴. فضای باناخ X را محدب یکنواخت گوییم هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in B_X$ اگر $\|x - y\| < \varepsilon$ آنگاه $\|\frac{۱}{۲}(x + y)\| > ۱ - \delta$. فضای باناخ X به‌طور یکنواخت نامربعی است اگر محدب یکنواخت باشد.

قضیه ۱.۴. برای هر فضای باناخ داریم $k_۰(X) \geqslant ۳$.

لم ۱.۴. برای فضاهای محدب یکنواخت $k > ۳$.

قضیه ۲.۴. ثابت توکشی $k.(X)$ برای فضاهای هم‌متر یکسان است.

حال رابطه‌ی بین تابع $\psi_X(k)$ و مقدار ثابت $k.(X)$ را بدست می‌آوریم. برای هر نگاشت T ثابت کمین لیپشیتزی $k(T)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$k(T) = \sup_{x \neq y} \frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|}$$

P را تصویر شعاعی از X به B_X در نظر می‌گیریم،

$$Px = \begin{cases} x & \|x\| \leq ۱, \\ \dfrac{x}{\|x\|} & \|x\| > ۱. \end{cases}$$

می‌دانیم که برای همه فضاها $۱ \leq k(P) \leq ۲$ ، برای فضاهای هیلبرت $k(H) = ۱$ و برای فضاهای به‌طور یکنواخت نامربعی $k(P) < ۲$. برای x و y بیرون گوی $B_r = rB_X$ داریم:

$$\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\| = \|P(\frac{x}{r}) - P(\frac{y}{r})\| \leq \frac{k(P)}{r}\|x - y\|.$$

توکشی لیپشیتزی $R : B_X \longrightarrow S_X$ و $۰ < \epsilon < ۱$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت $T_\epsilon : B_X \longrightarrow B_X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_\epsilon x = \begin{cases} -R(\dfrac{x}{\epsilon}) & \|x\| \leq \epsilon, \\ -\dfrac{x}{\|x\|} & \|x\| > \epsilon. \end{cases}$$

اگر $\|x\|, \|y\| \leq \epsilon$ آن‌گاه داریم:

$$\|T_\epsilon x - T_\epsilon y\| = \|R(\frac{x}{\epsilon}) - R(\frac{y}{\epsilon})\| \leq \frac{k(R)}{\epsilon}\|x - y\|,$$

و اگر $\|x\| > \epsilon$،$\|y\| > \epsilon$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} \|T_\epsilon x - T_\epsilon y\| &= \| - \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\| \\ &\leq \frac{۲}{\{\|x\|, \|y\|\}}\|x - y\| \\ &\frac{۲}{\epsilon}\|x - y\| \\ &\leq \frac{k.(R)}{\epsilon}\|x - y\| \end{aligned}$$

بنابراین $k(T_\epsilon) \leq \frac{k(R)}{\epsilon}$. حال نشان می‌دهیم برای هر $x \in B_X$، $\|x - T_\epsilon x\| \geq ۱ - \epsilon$.
اگر $\|x\| \leq \epsilon$،

$$\|x - T_\epsilon x\| = \|x + R(\frac{x}{\epsilon})\| \geq \|R(\frac{x}{\epsilon})\| - \|x\| \geq ۱ - \epsilon,$$

اگر $\|x\| > \epsilon$،

$$\|x - Tx\| = \|x + \frac{x}{\|x\|}\| = ۱ + \|x\| \geq ۱ + \epsilon \geq ۱ - \epsilon.$$

قرار می‌دهیم $k = \frac{k(R)}{\epsilon}$ و رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\psi_X(k) \geq ۱ - \frac{k(R)}{k}$$

لذا

$$\psi_X(k) \geq ۱ - \frac{k_\cdot(X)}{k}.$$

هرگاه مجموعه‌ی $\{Var_f(p) : [a,b] \text{ یک افراز روی } p\}$ کراندار باشد. می‌گوییم f در $[a,b]$ دارای تغییرات کراندار است. دسته همه‌ی توابعی که در $[a,b]$ تغییر کراندارند به صورت $BV[a,b]$ نمایش میدهیم.
اگر $f \in BV[a,b]$ باشد $\{\text{یک افراز روی } [a,b] : Var_f(p)\}$ را تعریف $Var_f[a,b] = \sup$ می‌کنیم. عدد $Var_f[a,b]$ را تغییر کل f در $[a,b]$ می‌نامیم.

۱.۴ ثابت توکشی بهین در فضاهای هیلبرت

فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. در این حالت تصویر شعاعی $P : H \longrightarrow B_X$ از رده $\mathcal{L}(۱)$ می‌باشد و برای هر $x \in H \backslash B_X$ و $y \in B_X$ ، با توجه به قضیه ۲.۴ نابرابری $(x - Px, Px - y) \geq ۰$، ایجاب می‌کند که $\|x - y\| \geq \|Px - y\|$. برای هر $r > ۰$ و برای تصویر شعاعی P_r به توی گوی $B_r = rB_X$ شرایط حفظ می‌شود.
فرض کنید $T_\cdot : B_X \longrightarrow B_X$ یک نگاشت از رده $\mathcal{L}(k)$ با $d_{T_\cdot} = d > ۰$ باشد. با توجه به گوی یکه، نگاشت $T : B_X \longrightarrow B_X$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$Tx = \frac{k}{k+۱} T_۴(\frac{k+۱}{k}x),$$

از رده $\mathcal{L}(k)$ به‌طوری‌که $T(S_X) = \{۰\}$ و $d_T \geq (\frac{k}{k+۱}d)$. نگاشت توکشی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$Rx = \frac{x - Tx}{\|x - Tx\|} = P(\frac{x - Tx}{d_T}) = P(\frac{k+۱}{k}\frac{x - Tx}{d}),$$

که $P \in \mathcal{L}(۱)$ و $T.$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که d نزدیک به $\psi_H(k)$ است. و چون $R \in \mathcal{L}(\frac{(k+۱)^۲}{kd})$، به تقریب زیر می‌رسیم:

$$k.(H) \leq \frac{(k+۱)^۲}{k\psi_H(k)}, \quad \forall\, k > ۱.$$

بنابراین با توجه به ویژگی (g) تابع ψ،

$$k.(H)\psi'_H(۱) \leq \min_{k>۱} \frac{(k+۱)^۲}{k-۱} = ۸,$$

که در نقطه‌ی $k = ۳$ مینیمم می‌شود. با توجه به رابطه‌ی (۱.۴)، نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$k.(H)\frac{k\psi_H(k)}{k-۱} \leq \frac{(k+۱)^۲}{k-۱},$$

و مقدار بهینه‌ی k را در $k = ۳$ می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$k.(H)\psi_H(۳) \leq \frac{۱۶}{۳}.$$

،کران پایین ψ در فضای هیلبرت را به‌دست آوردیم. لذا

$$۰/۲k.(H) \leq k.(H)\psi_H(۳) \leq \frac{۱۶}{۳},$$
$$k.(H) \leq \frac{۱۶}{۳} \times \frac{۱۰}{۲} = \frac{۸۰}{۳} = ۲۶/۶\cdots.$$

۵ نتایج

مسئله‌ی مشخص کردن $\psi_X(k)$ برای بسیاری از فضاهای باناخ از جمله ℓ_∞ و $L_۱[۰, ۱]$ همچنان باز مانده است.

مراجع

[1] A. Bressan, *Lecture Notes on Functional Analysis*, American Math. Soc., 2013.

[2] E. Casini, *Minimal displacement in Hilbert spaces*, Studia Mathematica, (165) (2004), 215-219.

[3] K. Bolibok, *The minimal displacement problemma in the space ℓ^∞*, Institute of Cent. Eur. J. Math. (1990), 2211-2214.

[4] K. Goebel, *Concise Course on Fixed Point Theorems*, Yokohoma Publishers. 2002.

[5] K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory.* Cambridge University Press , (1990).

[6] K. Goebel, *On the problemma of retracting balls onto their boundary*, University M. Curie- sklodowskiej,(2001) 101-110.

[7] K. Goebel, G. Marino, L. Muglia, R.Volpe, *The retraction constant and Minimal displacement characteristic of some Banach spaces*, Nonlinear Anal., 67(2007), 735-744.

[8] L. Piasecki, *Classification of Lipschitz Mappings*, Pure and applied Mathematics, CRC Press, 2014.

[9] L. Piasecki, *Retracting a ball onto a sphere in some Banach spaces*, Nonlinear Anal., 74(2), (2011), 396-399.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

معرفی واژه‌نامه‌های تخصصی حوزه ریاضی: هزارواژه، واژه‌نامه برخط و اصطلاحنامه ریاضی

فاطمه احمدی‌نسب [۱] زهره‌سادات ناصری [۲]

[۱,۲] گروه زبان و ادبیات انگلیسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

با توجه به اهمیت واژگان تخصصی در تبادلات علمی به ویژه در حوزه ریاضیات به عنوان یک دانش کاربردی و همچنین مورد نیاز حوزه‌های مختلف دانش، و لزوم دقت و شفافیت در معادل‌یابی برای این واژگان به منظور تسهیل آموزش و رواج آن، در این مقاله، به بررسی و مقایسه سه مرجع واژگانی مهم ریاضی، هزارواژه فرهنگستان زبان و ادب فارسی، واژه‌نامه برخط انجمن ریاضی ایران و اصطلاحنامه پژوهشگاه علوم و فناوری اطلاعات ایران پرداخته و نقاط قوت و ضعف هر کدام ارائه شده است.

کلمات کلیدی: واژگان تخصصی حوزه ریاضی، واژه‌نامه برخط انجمن ریاضی ایران، هزارواژه فرهنگستان زبان و ادب فارسی، اصطلاحنامه پژوهشگاه علوم و فناوری اطلاعات ایران.

۱ مقدمه

واژگان تخصصی هر حوزه از دانش بیانگر مفاهیم اصلی آن حوزه به شمار می‌روند و بدون آنها ارتباط علمی مختل می‌شود. از این رو، واژه‌نامه‌ها از اهمیت بسزایی برخوردارند چرا که پژوهشگران با مراجعه به آن، مناسب‌ترین معادل فارسی را برای بیان مفهوم مورد نظر خود می‌یابند. در حوزه ریاضی فرهنگ و واژه‌نامه‌ها و دانشنامه‌های ریاضی مختلفی- تک‌زبانه یا دوزبانه تدوین و یا ترجمه شده است که مهمترین آنها هزارواژه فرهنگستان زبان و ادب فارسی، واژه‌نامه برخط انجمن ریاضی ایران و اصطلاحنامه برخط پژوهشگاه علوم و فناوری اطلاعات ایران (ایرانداک) است. بررسی‌ها نشان می‌دهد که مطالعه‌ای در خصوص واژه‌نامه و فرهنگهای فارسی مختلف ریاضی صورت نگرفته است. لذا با توجه به اهمیت واژه‌نامه‌های علمی ریاضی در بهبود ارتباط علمی بین پژوهشگران این حوزه، این مطالعه به معرفی هزارواژه فرهنگستان، واژه‌نامه برخط انجمن ریاضی و اصطلاحنامه ایرانداک پرداخته شده است.

[1] f.ahmadinasab@scu.ac.ir
[2] z.naseri@scu.ac.ir

۲ هزارواژه ریاضی فرهنگستان

فرهنگستان در قالب گروه‌های تخصصی واژه‌گزینی به انتخاب برابرنهاده برای واژگان تخصصی و عمومی فارسی اقدام می‌کند. فرهنگستان پس از واژه‌گزینی و تصویب این واژه‌ها وقتی که تعداد آنها در هر حوزه دانشی به هزار واژه برسد، آنها را در قالب فرهنگ هزارواژه منتشر ساخته تا توسط متخصصان و پژوهشگران آن حوزه موضوعی به کار رود. از انتشارات فرهنگستان زبان و ادب فارسی می‌توان به هزارواژهٔ فیزیک، هزارواژهٔ علوم زمین، و...اشاره نمود. با به‌کارگیری این واژگان مصوّب، مخصوصاً توسط پژوهشگران و نویسندگان حوزه‌های تخصصی است که زبان فارسی می‌تواند پویایی خود را حفظ کند و به تدریج قابلیتهای یک زبان علمی را به دست آورد.

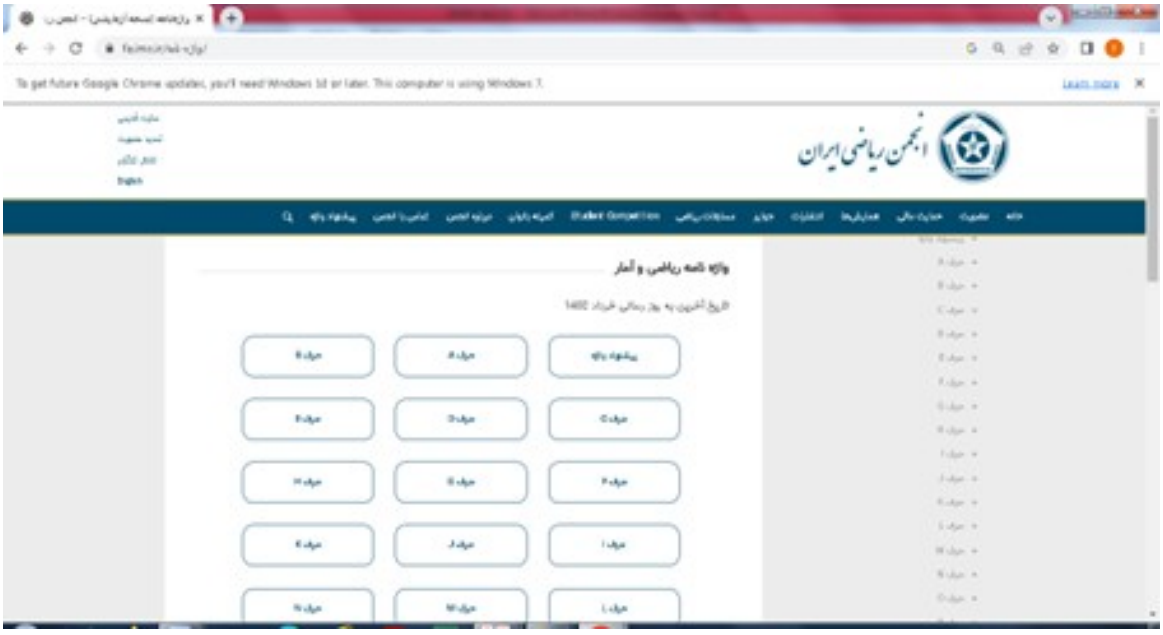
گروه واژه‌گزینی ریاضی فرهنگستان در سال ۱۳۷۹ و گروه واژه‌گزینی آمار در سال ۱۳۹۱ کار خود را آغاز کرده است. فرهنگ هزارواژه ریاضی (چاپ اول، ۱۳۹۵) در واقع مجموعه واژگان مصوب این دو گروه از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۴ است. این هزارواژه واژه‌های مصوب فرهنگستان را هم به ترتیب الفبای فارسی، هم لاتین و هم بر اساس شاخه یا گروه مرتب کرده است.

۳ واژه‌نامه برخط انجمن ریاضی ایران

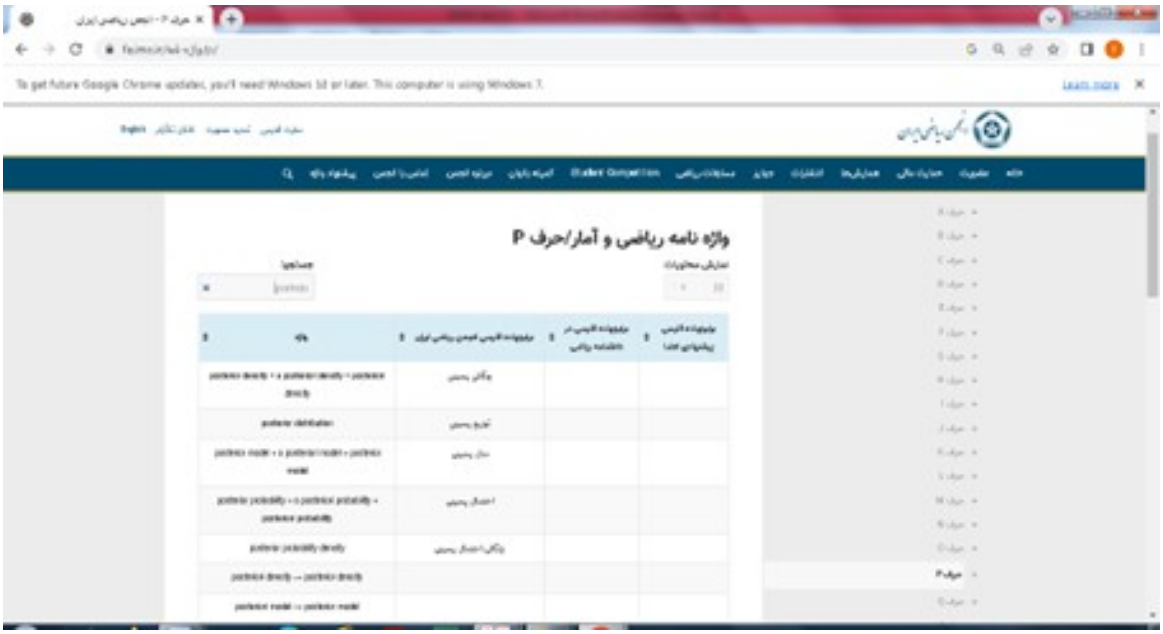
با مراجعه به وبگاه انجمن یاضی ایران می‌توان از نسخه آزمایشی واژه‌نامه برخط ریاضی و آمار این انجمن استفاده نمود. با جستجوی الفبای لاتین می‌توان به معادلهای فارسی آنها دست یافت. البته هر حرف با گزینه‌ای جدا قابل جستجو است، اگرچه بهتر بود امکان جستجوی همه حروف هم در یک فضای واحد فراهم می‌شد، چرا که خروج از فضای یک حرف برای جستجوی حرفی دیگر زمان‌بر است. با این حال، نکته قابل تحسین این واژه‌نامه گزینه «پیشنهاد واژه» است. پژوهشگران می‌توانند معادل فارسی پیشنهادی خود را برای اصطلاحات انگلیسی حوزه ریاضی و آمار ثبت کنند. تصویر ۱، شِمای کلی واژه‌نامه برخط را ارائه می‌دهد. علاوه بر این، می‌توان معادلهای اصطلاحاتی را که با حرف p آغاز می‌شود، دید. اکیداً پیشنهاد می‌شود که در اطلاعات پیشنهادی واژه، در ستون سوم (از سمت چپ)، معادل مصوب فرهنگستان قرار گیرد و به عنوان معادل مرجح که استفاده از آن الزام‌آور است به پژوهشگران معرفی شود.

۴ اصطلاحنامه ریاضی ایرانداک

تنها اصطلاحنامه فارسی ریاضی اصطلاحنامه ریاضیات (حسینی بهشتی، وفایی و نوروزی، ۱۳۹۳) است و به صورت برخط نیز در وبگاه ایرانداک قابل جستجو است. نباید اصطلاحنامه را با واژه‌نامه یکسان دانست. بر طبق تعریف استاندارد ملی آمریکا، اصطلاحنامه واژگان کنترل شده‌ای است که بر طبق الگویی مشخص سازمان‌دهی شده تا بتواند روابط بین اصطلاحات را به روشنی به نمایش گذارد.

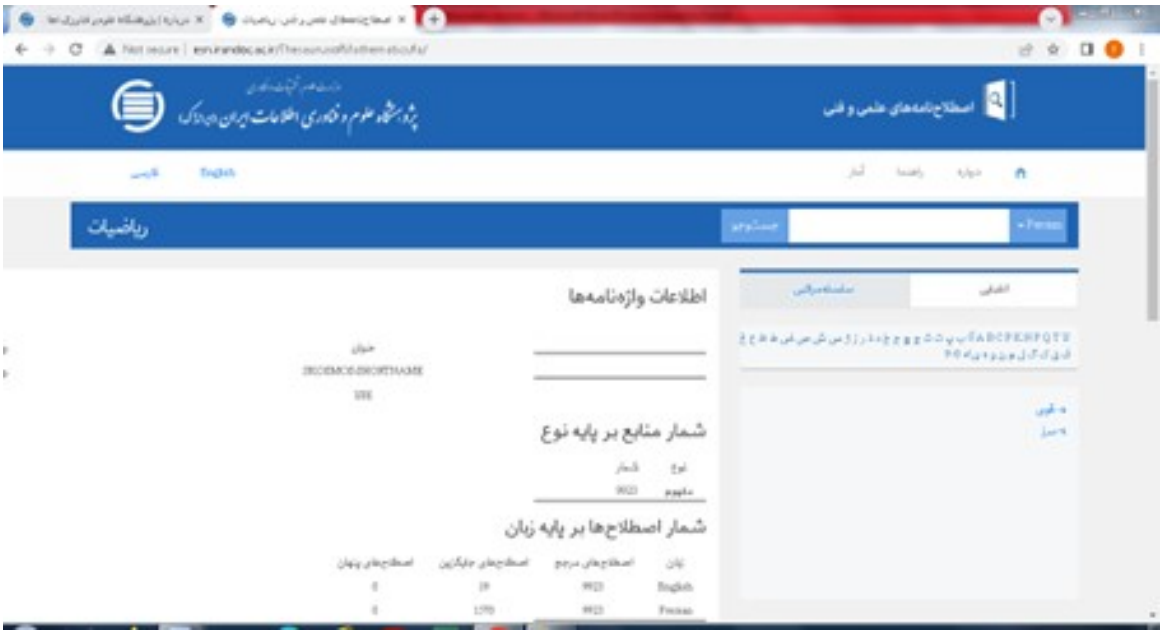


شکل ۱: واژه‌نامه برخط ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران



شکل ۲: اصطلاحات ریاضی واژه‌نامه برخط که با حرف p آغاز می‌شود

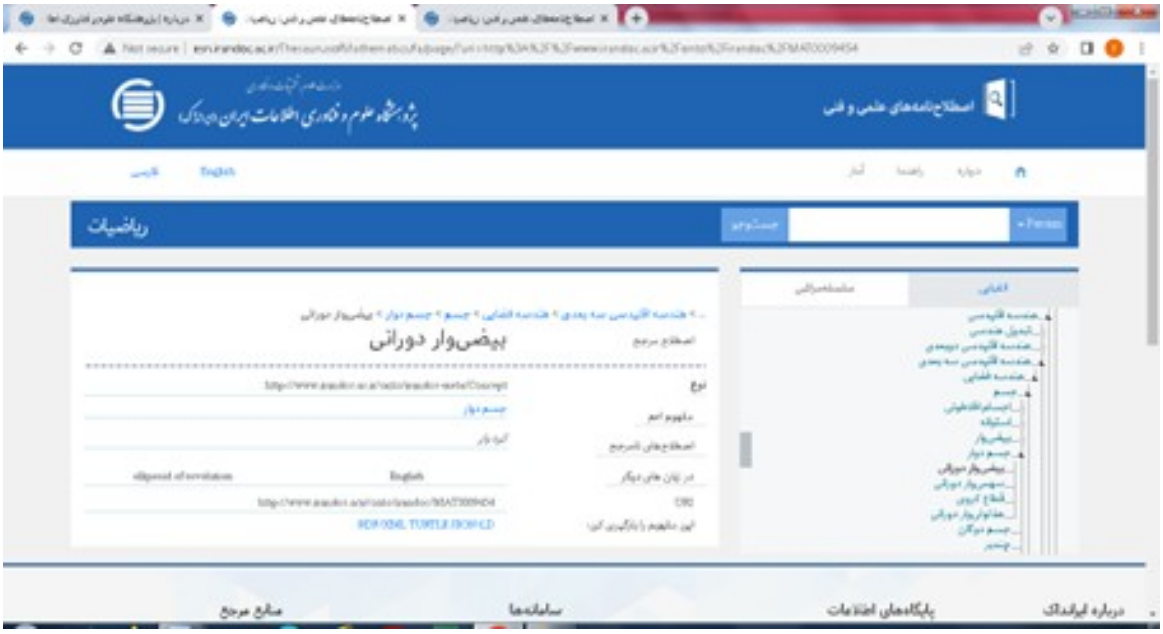
اصطلاحنامه معمولاً تخصصی و محدود به یک حوزه خاص است و به ندرت اصطلاحنامه عمومی یافت می‌شود [۳] و روابط از پیش تعیین شده بین مفاهیم (مانند اعم و اخص) را نشان می‌دهد [۴]. اصطلاحنامه نه تنها روابط سلسله مراتبی بلکه روابط وابستگی اصطلاحات، ارجاعات از اصطلاح نامرجح و یادداشت‌های لازم هر اصطلاح را نیز به نمایش می‌گذارد [۵]. در اصطلاحنامه رایج‌ترین اصطلاح، به عنوان اصطلاح مرجح، مشخص شده و رابطه معنایی آن با سایر اصطلاحات و غالباً با نظم الفبایی، سلسله‌مراتبی و گردان به تصویر کشیده می‌شود [۱]. با مراجعه به وبگاه ایرانداک بخش اطلاعات علمی و فنی، می‌توان به اصطلاحنامه‌ها دسترسی یافت. با انتخاب اصطلاحنامه ریاضی، امکان جستجوی واژگان تخصصی ریاضی به دو زبان انگلیسی و فارسی ممکن است. همانطور که در اطلاعات مرتبط با اصطلاحنامه ریاضیات دیده می‌شود، اصطلاحنامه ریاضی فقط کمی کمتر از ده‌هزار اصطلاح ریاضی را شامل می‌شود.



شکل ۳: اصطلاحنامه برخط ریاضی ایرانداک

در اصطلاحنامه ریاضی، با جستجوی اصطلاحات تخصصی ریاضی مانند اصطلاح «بیضی‌وار دورانی»، تمام اصطلاحات مرتبط با آن ظاهر شده و با انتخاب هر کدام از آنها هم نمایش سلسله‌مراتبی و هم الفبایی با معادل مناسب‌تر، معادل انگلیسی، واژه‌ها و مفاهیم مرتبط با آن و حتی با توضیحات لازم نمایش داده می‌شود. اصطلاحنامه برخط حتی اصطلاحات نامرجح را نیز در اختیار پژوهشگر قرار می‌دهد مانند اصطلاح «بیضی‌وار دورانی» که اصطلاح نامرجح آن «کروه‌وار» است (تصویر ۴).

بنابراین در اصطلاحنامه ریاضی نه تنها معادل‌های متفاوت یک مفهوم دیده می‌شود، بلکه بهینه‌ترین اصطلاح نیز معرفی می‌شود.



شکل ۴: جستجوی اصطلاح بیضی‌وار دورانی در اصطلاحنامه برخط ایرانداک

۵ مقایسه هزارواژه فرهنگستان، واژه‌نامه برخط انجمن و اصطلاحنامه ایرانداک

با بررسی هزارواژه فرهنگستان، واژه‌نامه برخط و اصطلاحنامه برخط، یافته‌های پژوهش حاضر به قرار زیر است:

۱.۵ پوشش واژگانی

اصطلاحنامه برخط، واژه‌نامه برخط و هزارواژه هر کدام به ترتیب، دارای حدوداً ده‌هزار، هشت هزار، و هزار اصطلاح است. این در حالی است که از آنجا که فرهنگستان اکنون حدود هزار واژه ریاضی و آمار را تصویب کرده است، بهتر است که در واژه‌نامه برخط و اصطلاحنامه برخط، واژه‌های مصوب فرهنگستان مشخص و معرفی شوند تا پژوهشگران با مراجعه به آنها با این مصوبات آشنا گردند. با بررسی هر سه مرجع می‌توان دید که یکی از نقاط قوت اصطلاحات ریاضی آن است که تقریباً در اکثر موارد برای هر مفهوم ریاضی یک معادل فارسی به کار رفته است. این موضوع از اهمیت بسزایی برخوردار است، چرا که تناظر یک‌به‌یک بین مفهوم و واژه، به معنای شفافیت متون علمی این حوزه از دانش است [۶]. در بین واژگان تخصصی ریاضی مواردی از هم‌معنایی هم دیده شد که در جدول ۱، به برخی از آنها اشاره شده است.

جدول ۱: هم‌معنایی در واژگان تخصصی ریاضی و آمار

شماره	اصطلاح انگلیسی	هزارواژه	اصطلاحنامه برخط	واژه‌نامه برخط
۱	fraction	کسر، بَرخه	کسر	کسر
۲	point Singular	نقطه تکین، تکینه	نقطه تکین، نقطه منفرد	نقطه تکین، تکینه
۳	function Concave	تابع کاو، تابع مقعر	تابع کاو، تابع مقعر	تابع مقعر
۴	extremum	کرانگینه، فرینه	اکسترمم، فرین	کرانگینه، فرینه
۵	supremum	زبرینه، سوپرمم	زبرینه، کوچکترین کران بالا	زبرینه، سوپرمم
۶	minimum	کمینه، مینیمم	مینیمم، حداقل	کمینه، مینیمم
۷	variance	وردایی، واریانس	واریانس، پراشی	واریانس

۲.۵ نزدیکی معادل‌ها

از جدول ۱ می‌توان دید که هزارواژه فرهنگستان و واژه‌نامه برخط از لحاظ واژگان معادل، به یکدیگر نزدیک‌تر از اصطلاحنامه هستند. از آنجا که مصوّبات فرهنگستان پس از تأیید و ابلاغ توسط ریاست جمهوری لازم‌الاجرا است، بنابراین چه در واژه‌نامه و چه در اصطلاحنامه، معادل‌های فرهنگستان باید به عنوان معادل مرجح معرفی شوند.

۳.۵ اصطلاحات تخصصی ناموجود

با جستجوی برخی از اصطلاحات تخصصی هزارواژه در واژه‌نامه برخط و اصطلاحنامه برخط، مانند سه اصطلاح ،covering countable abscissa و spheroid مشاهده شد که این واژگان در دو منبع مذکور موجود نیست. قاعدتاً هیچکدام از این اصطلاحات نمی‌توانند از اصطلاحات هسته حوزه ریاضی باشند و جز اصطلاحات فرعی حوزه ریاضی و آمار به شمار می‌روند. اما به علت لازم‌الاجرا بودن مصوبات هزارواژه، این واژگان باید به دو مرجع برخط اضافه شوند.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر سه مرجع واژگانی مهم حوزه ریاضی به پژوهشگران معرفی شد و سپس نقاط ضعف و قوت هرکدام مشخص گردید. دیدیم که از لحاظ پوشش واژگانی اصطلاحنامه از دو مرجع دیگر بزرگتر است، اگرچه معادلهای به کار رفته در واژه‌نامه به هزارواژه قرابت بیشتری دارد. بنابراین پیشنهاد می‌شود که انجمن ریاضی و ایرانداک مصوبات فرهنگستان را به عنوان واژه مرجح مشخص نمایند و پژوهشگران نیز در معادل‌یابی ابتدا به هزارواژه، و در صورت نیافتن معادل مناسب به ترتیب به واژه‌نامه برخط و اصطلاحنامه برخط مراجعه نمایند.

مراجع

[۱] رهادوست، فاطمه (۱۳۷۷). اصطلاحنامه پزشکی فارسی. تهران: کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران.

[۲] شقاقی، ویدا (۱۳۸۸). بررسی وضعیت وندها در زبان علم. مجموعه مقالات همایش یکصد و پنجاهمین سالگرد آراء و اندیشه سید جمال الدین اسدآبادی: ۵۰۳-۵۲۱.

[3] Broughton, Vanda (2006). *Essential Thesaurus Construction*. London: Facet Publishing.

[4] Aitchison, Jean; Dextre Clarke, Stella (2004). The Thesaurus: a Historical Viewpoint, with a Look to the Future. *Cataloging & Classification Quarterly*, 37 (3-4), 5-21.

[5] Hedden, Hearher (2008). Comparative Evaluation of Thesaurus Creation Software. *The Indexer*, 26 (2), 50-59.

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

نقد و بررسی مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی از منظر کاربرد واژگان تخصصی

فاطمه احمدی‌نسب [۱] زهره‌سادات ناصری [۲]

[۱,۲] گروه زبان و ادبیات انگلیسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

امروز پژوهشگران هر حوزه‌ای از دانش، با جستجوی کلیدواژه‌های علمی در پایگاه‌ها و وبگاه‌های علمی، مقالات علمی مرتبط را بازیابی می‌کنند، لذا انتخاب واژگان علمی مناسب در نگارش مقالات علمی از اهمیت بسزایی برخوردار است و باعث افزایش مشاهده‌پذیری و در نتیجه استناد به آن می‌شود. این مهم به‌ویژه در ارتباط با ریاضیات که در بسیاری از حوزه‌های دانش کاربرد دارد، از جایگاه بسزایی برخوردار بوده و لذا انتخاب معادلهای تخصصی مناسب در آموزش و ترویج این حوزه از دانش دارای اهمیت دوچندان است. در همین راستا، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی بر اساس فرهنگ هزارواژه فرهنگستان زبان و ادب فارسی و واژه‌نامه برخط انجمن ریاضی ایران مطالعه شده است. طبق یافته‌ها، مجله مذکور به هزارواژه و واژه‌نامه برخط پایبند بوده و تنها موارد نادری از تشتت و آشفتگی واژگانی در آن دیده می‌شود که به نمونه‌هایی از آن اشاره شده است.

کلمات کلیدی: واژگان تخصصی حوزه ریاضی، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، هزارواژه ریاضی فرهنگستان زبان و ادب فارسی، واژه‌نامه ریاضی انجمن ریاضی ایران.

۱ مقدمه

واژه مهمترین واحد زبانی است که ابزار انتقال مفاهیم به شمار می‌رود. مک‌کوئن [۱] واژه را ابزار اساسی تفکر می‌داند چرا که در فرایند تفکر نقش مهم و اساسی را ایفاء می‌کند. برای اندیشیدن به جهان و پدیده‌های آن باید بتوان جهان و پدیده‌های آن را بر اساس شباهت‌ها و تفاوت‌ها طبقه‌بندی کرد. طبقه‌بندی پدیده‌های جهانِ خارج از ذهن، نوعی سازماندهی اطلاعات است که به صورت خلق و آفرینش واژه صورت می‌گیرد. در حوزه‌های مختلف علم نیز واژگان از اهمیت خاصی برخوردارند، چرا که بخشی از انتقال موفقیت‌آمیز دانش به واژه بستگی دارد. انتقال و تبادل موفقیت‌آمیز دانش و مفاهیم علمی بر شفافیت، یک‌دستی و تا حد امکان رابطه یک‌ـ‌به‌ـ‌یک بین مفهوم و واژه استوار است.

از آنجا که در سطح بین‌الملل، زبان علم و دانش زبان انگلیسی است، پرواضح است که در نوشتجات علمی فارسی معادل‌گزینی فارسی صورت می‌گیرد و در نتیجه چندمعنایی در واژگان علمی فارسی رخ

[1] f.ahmadinasab@scu.ac.ir
[2] z.naseri@scu.ac.ir

می‌دهد. انتخاب معادل نامناسب به گفته جمالی مهمویی [۲] همیشه به همان واژه ختم نمی‌شود و اثر آن زنجیره‌وار ادامه خواهد داشت. علت در این است که غالباً کلمه مورد نظر در خوشه‌های واژگانی همراه با واژگان دیگر به صورت گروه‌های نحوی مانند ترکیب‌های اضافی و وصفی به کار می‌روند. بنابراین در معادل‌یابی برای اصطلاحات علمی باید به امکان صرف واژه و هم‌نشینی آن با واژه‌های دیگر توجه داشت.

وجود معادل‌های نامناسب و تعدد و تشتت معادل‌های گوناگون و هر گونه سهل‌انگاری در این زمینه موجب مشکلاتی در ذخیره و بازیابی اطلاعات، سردرگمی خواننده و اختلال تعامل در جریان جهانی اطلاعات می‌شود [۳، ۴]. علاوه بر این باید توجه داشت که زبانی زبان علم است که بتوان به آن زبان درباره حوزه‌های مختلف علم با واژگانی شفاف و روان به راحتی مطلب نوشت و یا به عقیده آشوری [۵] «طلب علم نمی‌تواند از طلب زبان آن و کوشش در راه آن جدا باشد». زبان علم، یک گونه نوشتاری آگاهانه است که نقش اطلاعاتی دارد و هدف آن توصیف مفاهیم در قالب زبان صریح و آسان است و بنابراین باید روشن، صدق‌بنیاد و فارغ از هرگونه ابهام باشد و لذا شفافیت، صراحت، ثبات معنایی و رابطه یک‌ـ‌به‌ـ‌یک بین مفهوم و واژه تخصصی از ضرورتهای واژگان تخصصی است [۶]، در غیر این صورت زبان علمی نارسا شده و مبادله اطلاعات به آسانی صورت نمی‌گیرد. زبان فارسی با خطر ورود انبوه واژگان علمی انگلیسی رو به روست و با توجه به اینکه معادل‌گزینی برای این واژه‌ها اغلب به صورت انفرادی و بدون خرد جمعی صورت می‌گیرد، در اکثر حوزه‌های دانش ابهام معنایی و عدم شفافیت در متون بروز می‌کند.

۲ پیشینه پژوهش

از میان پژوهش‌های انجام شده در خصوص واژگان تخصصی حوزه‌های مختلف در خارج از ایران می‌توان به [۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹] و از مطالعات داخل کشور نیز می‌توان به پژوهش‌های [۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۲۰، ۱۲] اشاره کرد. بدری‌زاده و یوحنایی [۱۲] به بررسی آماری میزان یکدستی و هماهنگی میان معادل‌های فارسی زبان‌شناسی پرداختند. طبق این پژوهش برای یک مفهوم زبانشناختی معادل‌های متنوع و متعددی به کار رفته است که ناگزیر ارتباط و تفاهم علمی بین پژوهشگران این حوزه را مختل کرده است. شعبانی [۹] ضمن بیان تاریخچه شیوه گزینش لغات به بررسی تاریخی و انتقادی واژه‌گزینی در علم کتابداری و اطلاع‌رسانی پرداخته است. فرهمند بروجنی و انصاری [۱۰] به بررسی تعدادی از واژگان هسته‌ای حوزه میراث فرهنگی در حیطه محافظت از آثار فرهنگی پرداخته‌اند. آنها با ارائه تعاریف مختلف از این واژه‌ها و تفسیر معانی آنها، به تبیین دلایل توسعه‌نیافتگی، ناکارآمدی و پیچیدگی واژگان این حوزه از دانش پرداخته‌اند. جمالی مهمویی [۲] ضمن تبیین معضل آشفتگی‌های موجود در معادل‌های برگزیده در رشته کتابداری و اطلاع‌رسانی راه‌کارهایی از قبیل تدوین واژه‌نامه‌های دوزبانه را پیشنهاد داده‌اند. شقاقی [۶] با بررسی چهار واژه‌نامه دریانوردی، ریاضی و آمار، فیزیک و مکانیک

خاک و مهندسی می‌نویسد که این چهار حوزه از زبان علم، برخی از وندها و کلمات مرده فارسی را احیا کرده است به عنوان مثال «ستیغ» و «پاد». حسینی و عزیزی [۵] می‌نویسند که برش‌های زبان فارسی از مفاهیم، طبیعت و انسان در مقایسه با زبان‌های کشورهای پیشرفته کلی و درشت‌مقیاس است و از ظرافت‌های مفهومی برخوردار نیست. احمدی نسب و ارسطوپور [۱۳] نشان می‌دهد که در برابر هر اصطلاح از حوزه علم اطلاعات و دانش‌شناسی به طور متوسط دو معادل فارسی وجود دارد. احمدی نسب [۱۴] نشان داد که مصوبات فرهنگستان مورد بی‌توجهی پژوهشگران حوزه پزشکی است و اغلب از همان اصطلاحات انگلیسی بهره می‌گیرند مخصوصاً حوزه دندانپزشکی. احمدی نسب و جوانبخت [۱۵] با بررسی واژه‌های حوزه علم‌سنجی دریافتند که در حوزهٔ علم‌سنجی مانند سایر رشته‌ها نیز ناهماهنگی، آشفتگی و گاه خطاهای زبانی در معادل‌گزینی دیده می‌شود. عامل تکروی در معادل‌گزینی باعث ایجاد معادل‌های نامناسب در کنار معادل‌های مناسب برای اصطلاحات قلمرو علم‌سنجی و در نتیجه تعدّد معادل‌ها شده است.

نگاهی کلی به پژوهش‌های انجام شده فوق نشان می‌دهد که در بسیاری از حوزه‌های علوم تناظر یک‌ـبه‌ـیک بین مفاهیم علمی و معادل‌های فارسی آنها وجود ندارد و گاه ناهماهنگی، آشفتگی و خطاهای زبانی در معادل‌یابی دیده می‌شود. پژوهش حاضر به بررسی واژگان به‌کاررفته در مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز می‌پردازد تا وضعیت واژگان تخصصی حوزه ریاضی را برای پژوهشگران این حوزه از دانش به تصویر کشد.

۳ بررسی نشریه مدل‌سازی پیشرفته ریاضی

به منظور بررسی رفتار پژوهشگران حوزه ریاضی در به‌کارگیری واژگان تخصصی حوزه ریاضی، نشریه مدل‌سازی پیشرفته ریاضی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. این نشریه که توسط دانشگاه شهید چمران اهواز منتشر می‌شود، در حوزه ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر آخرین پژوهش‌ها و دستاوردها را در اختیار پژوهشگران این حوزه‌ها قرار می‌دهد. این نشریه فعالیت خود را به صورت دوفصلنامه از سال ۹۰ شروع کرده و از سال ۱۴۰۰ به صورت فصلنامه منتشر می‌شود و از سال ۱۴۰۲ یک شماره را به مقالات انگلیسی اختصاص می‌دهد. با در نظر گرفتن این توضیحات، این نشریه تا کنون ۳۴ شماره مقاله فارسی منتشر کرده است. نویسندگان این پژوهش از هر شماره ۲ مقاله و در مجموع ۶۸ مقاله را از منظر کاربرد واژگان فارسی تخصصی حوزه ریاضی بررسی کردند. لازم به ذکر است که عنوان، چکیده و واژگان کلیدی مقالات مورد مطالعه قرار گرفتند و بدنه مقالات بررسی نشدند. انتخاب نمونه‌ها به روش نظاممند صورت گرفت. بدین معنا که اولین و آخرین مقاله هر نشریه بررسی شد. البته اگر مقاله‌های اول و آخر هر شماره نتوانست به میزان کفایت واژه تخصصی در اختیار نویسندگان قرار دهد، مقاله‌های دوم و سوم شماره بررسی شدند. انجام کار بدین صورت بود که واژگان تخصصی ریاضی و آمار از عنوان، چکیده و واژگان کلیدی استخراج شده و معادل آنها در فرهنگ هزارواژه فرهنگستان زبان و ادب فارسی به عنوان مصوبات لازم‌الاجرا و سپس واژه‌نامه برخط ریاضی و آمار انجمن ریاضی

ایران جستجو شد. قبل از پرداختن به یافته‌های پژوهش لازم است که ذکر شود، در این نشریه به علت ماهیت مدل‌سازی، واژگان تخصصی حوزه‌های مختلفی مانند کشاورزی، پزشکی، زلزله‌شناسی، سرمایه‌گذاری، جرم‌شناسی و حوزه‌های دیگر به کار رفته است. قاعدتاً صحت و درستی این واژگان نیز با توجه به مصوبات فرهنگستان باید محک زده شود. اما این واژگان در پژوهش حاضر موضوعیت ندارند. با جستجوی واژگان تخصصی ریاضی در هزارواژه فرهنگستان و واژه‌نامه برخط مشخص شد که معادل‌ها و اصطلاحات تخصصی فارسی به کاررفته در مقالات نشریه مدل‌سازی پیشرفته ریاضی مطابقت بسیار بالایی با مصوبات فرهنگستان و واژه‌نامه برخط ریاضی دارد. از واژگان بررسی شده، تنها تعداد معدودی با واژگان مصوب فرهنگستان و واژه‌نامه برخط مطابقت نداشت که در جدول ۱، برخی از آنها آورده شده است:

جدول ۱: اصطلاحات ریاضی به کاررفته در مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، هزارواژه فرهنگستان و واژه‌نامه برخط

شماره	اصطلاح انگلیسی	معادل در هزارواژه	معادل در واژه‌نامه برخط	معادل در مجله
۱	regression	وایازش	رگرسیون	رگرسیون
۲	grid	-	تور	مشبکه
۳	ideal	آرمانه	ایده‌آل، آرمانه	ایدآل
۴	quaternion	-	چهارگان	کواترنیون
۵	sequentia	دنباله‌ای	دنباله‌ای	متوالی
۶	class	رده	رده	دسته
۷	extension	-	گسترش، توسیع	تعمیم

از جدول ۱ پرواضح است که خوشبختانه اولاً تعداد واژگانی که از مصوبات فرهنگستان پیروی نمی‌کنند، اندک است. دوم آنکه این واژگان از واژگان هسته‌ای حوزه ریاضی به‌شمار نمی‌روند و باعث ایجاد اختلال در ارتباط علمی بین پژوهشگران این حوزه نمی‌شود. در ادامه به چند نکته در خصوص واژگان تخصصی ریاضی که با بررسی آنها در مجله به دست آمد اشاره می‌شود:

۱. تعدادی از واژگان تخصصی به کاررفته در مجله، در هزارواژه و یا واژه‌نامه برخط یافت نشد مانند دو واژه semiring و collocation method که برای آنها به ترتیب از معادل‌های «نیم‌حلقه» و «روش هم‌محلی» استفاده شده است.

۲. در مورد برخی از اصطلاحات از دو املای متفاوت برای آنها استفاده شده است مانند «ایدآل» و «ایده‌آل» در برابر اصطلاح ideal و «چوله» و «چاوله» در برابر skew. اگر چه به واسطه این تفاوتها، در خواندن متن مشکلی ایجاد نمی‌شود، اما ذخیره و بازیابی اطلاعات را مختل می‌کند. بنابراین یکدستی در املای واژگان هم از اهمیت بسزایی برخوردار است.

۳. در مورد برخی از واژگان به نظر می‌رسد که قواعد صرفی فارسی رعایت نشده است مانند Semi-Hilbert space. باید توجه داشت که وند semi به واژه مرکب Hilbert space متصل شده

است، نه صرفاً اسم خاص Hilbert. بنابراین معادل «فضای نیم‌هیلبرت» که در نشریه به کار رفته است نادرست بوده و به جای آن باید اصطلاح «نیم‌فضای هیلبرت» را به کار برد.

۴ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی از منظر کاربرد واژگان تخصصی حوزه ریاضی بررسی شد که نشان دهنده عملکرد یکسان پژوهشگران در بهره‌گیری از اصطلاحات فارسی ریاضی است. البته به موارد نقض مجله نیز اشاره شد که خوشبختانه اندک هستند. علاوه بر این به اهمیت کاربرد املای یکسان در واژگان تخصصی به عنوان ابزار اصلی جستجو و بازیابی مدارک علمی مرتبط اشاره شد.

مراجع

[۱] نعمت‌زاده، شهین (۱۳۸۲). واژه‌گزینی، تلاش برای آشنایی با جهان. فصلنامه فرهنگستان. دوره ۶ شماره ۱۴: ۲-۴.

[۲] جمالی مهمویی، حمیدرضا (۱۳۸۸). معادل‌گزینی، ترجمه و آشفتگی زبان فارسی در حوزه علوم کتابداری و اطلاع‌رسانی. کتاب ماه: کلیات. تیرماه ۱۳۸۸. شماره ۱۳۹.

[۳] حسینی بهشتی، ملوک‌السادات (۱۳۷۵). ترجمه فارسی اصطلاحنامه اسپاینز. اطلاع‌رسانی. دوره ۱۲. شماره ۱.

[۴] حسن‌زاده، محمد و علیرضا نوروزی چاکلی (۱۳۸۲). غلامک‌شناسی تن‌شناسی، مخاطب: نگاهی به جریان جهانی اطلاعات و واژه‌سازی مترجمان ایرانی. همشهری. ۲ مرداد.

[۵] حسینی، امیر؛ عزیزی، محمود (۱۳۸۹). واژه‌سازی، وجه فراموش شده در ترجمهٔ اصطلاحات علمی و فنی. مطالات ترجمه. سال ۸. شماره ۲۹: ۲۷-۴۲.

[۶] شقاقی، ویدا (۱۳۸۸). بررسی وضعیت وندها در زبان علم. مجموعه مقالات همایش یکصد و پنجاهمین سالگرد آراء و اندیشه سید جمال‌الدین اسدآبادی: ۵۰۳-۵۲۱.

[۷] کافی، علی (۱۳۷۴). مبانی علمی واژه‌سازی و واژه‌گزینی. نامه فرهنگستان. شماره ۲: ۴۹-۶۷.

[۸] نعمت‌زاده، شهین (۱۳۷۹). استدلال در واژه‌گزینی. فصلنامه فرهنگستان. شماره ۱۶: ۱۲۸-۱۳۴.

[۹] شعبانی، احمد (۱۳۸۱). روند واژه‌گزینی در علم کتابداری و اطلاع‌رسانی در زبان فارسی. مجلة پژوهشی علوم انسانی دانشگاه اصفهان. جلد سیزدهم. شماره ۱. ص. ۲۴۸-۲۳۵.

[۱۰] فرهمند بروجنی، حمید؛ انصاری، مجتبی (۱۳۸۲). سخنی درباره‌ی توسعه واژگان و اصطلاحات تخصّصی در حوزه‌ی دانش محافظت از آثار فرهنگی: برداشتها و تعابیر متفاوت. مجموعه مقالات ششمین همایش حفاظت و مرمت اشیاء تاریخی‌ـفرهنگی و تزیینات وابسته به معماری. صص ۷-۱۴.

[۱۱] منشی‌زاده، مجتبی؛ شریف، بابک (۱۳۸۴). بررسی واژه‌های عمومی مصوّب فرهنگستان زبان و ادب فارسی. زبان و ادب. شماره ۲۴: ۱۸-۴۳.

[۱۲] بدری‌زاده، فضل‌الله و منیژه یوحنایی (۱۳۸۱). اصطلاحات زبان‌شناسی و مشکل تعدّد معادل‌ها در زبان فارسی. پژوهش زبان‌های خارجی. شماره ۱۳. پاییز و زمستان ۱۳۸۱. ص. ۳-۱۷.

[۱۳] احمدی نسب، فاطمه؛ ارسطوپور، شعله (۱۳۹۴). بررسی فرایندهای واژه‌گزینی اصطلاحات و واژگان تخصصی حوزه علم اطلاعات و دانش‌شناسی. پژوهشنامه کتابداری و اطلاع‌رسانی. ۵ (۲): ۲۴۵-۲۶۲.

[۱۴] احمدی نسب، فاطمه (۱۳۹۸). بررسی و نقد وضعیت نشریات حوزهٔ پزشکی در به‌کارگیری واژگان مصوّب فرهنگستان زبان و ادب فارسی بر اساس فرهنگ هزارواژهٔ پزشکی. نامه فرهنگستان. شماره ۲و۳: ۲۱۷-۲۴۴.

[۱۵] احمدی نسب، فاطمه؛ جوانبخت، میثم (۱۳۹۹). آسیب‌شناسی معادل‌گزینی اصطلاحات تخصصی در حوزهٔ علم‌سنجی در حوزه علم سنجی در ایران. مطالعات کتابداری و علم اطلاعات. ۱۲ (۲): ۱۴۴-۱۵۹.

[16] Malmkjar, Kirsten (2004). *The Linguistics Encyclopedia*; 2nd edition, USA: Routledge.

[17] Rogers, Margaret (2007). Eu-High-Level Scientific Conference Series. Mu-Tra 2007- LSP Translation Scenarios: Conference Proceedings.

[18] Stolze, Radegundis (2009). Dealing with Cultural Elements in Technical Texts for Translation. *The Journal of Specialized Translation*. Issue 11 January. 124-142.

[19] Khuwaileh, Abdullah A. (2010). IT Terminology and Translation: Cultural, Lexicographic and Linguistic Problems. *LSP Journal*, Vol. 1, No. 2. 15-22.

[20] Khodabakhshi, Morteza (2009). *A Comparative-Contrastive Study of the Secondary Term-Formation Processes Adopted by the 1st & 3rd Academies of Persian Language and Letters*. Allameh Tabataba'i University: MA thesis.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC
Islamic World Science Citation Center
۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

بررسی مقایسه‌ای برآوردهای بیزی پارامترهای توزیع GU-XE تحت توابع زیان مختلف

ناهید سنجری فارسی‌پور [۱] کوثر تقوی نسب [۲]

[۱,۲] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا، تهران، ایران

چکیده

در این پژوهش، برآوردهای بیزی برای پارامترهای توزیع XE-GU تحت توابع زیان مختلف مقایسه شده‌اند. توابع زیان مورد بررسی شامل زیان مربع خطا، زیان قدرمطلق، زیان الینکس و زیان آنتروپی هستند. هدف از این مقایسه، ارزیابی دقت و پایداری برآوردهای بیزی و بررسی میزان تأثیر انتخاب تابع زیان بر نتایج است. روش تحقیق شامل استفاده از داده‌های واقعی، برآورد بیزی و اعمال توابع زیان مختلف بر روی برآوردها است. نتایج نشان می‌دهند که برآوردهای حاصل از توابع زیان آنتروپی و قدر مطلق خطا، دقیق‌ترین برآورد، و تابع زیان الینکس کارآمدترین آن‌ها هستند.

کلمات کلیدی: توابع زیان، توزیع XE-GU، برآورد پارامترها، آمار بیزی

۱ مقدمه

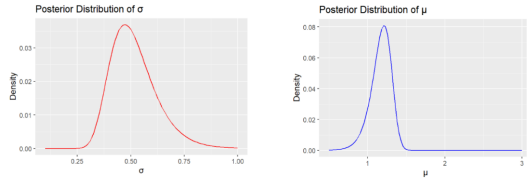
در این پژوهش، از روش بیزی برای برآورد دو پارامتر توزیع XE-GU استفاده شده است و تأثیر توابع زیان مختلف بر برآوردهای بیزی بررسی شده است. در این مطالعه، چهار تابع زیان مربع خطا، قدرمطلق خطا، الینکس و آنتروپی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. هدف اصلی پژوهش، مقایسه‌ی برآوردهای حاصل از این توابع زیان و تحلیل پایداری و دقت آن‌ها است.

۲ روش تحقیق

۱.۲ مدل توزیع مورد استفاده

توزیع XE-Gu یک توزیع جدید است که در مجله‌ی [۱] معرفی شده است. در این مطالعه، توزیع XE-Gumbel (XE-Gu) به عنوان مدل پایه در نظر گرفته شده است. این توزیع یکی از اعضای

[1] nahidsanjari@gmail.com
[2] kosartaghavinasab@gmail.com



شکل ۱: نمایش توابع چگالی توزیع های پسین پارامتر های مجهول

جدول ۱: مقادیر برآوردهای درست‌نمایی پارامترهای مجهول

پارامتر	MLE(SE)
μ	۱/۶۵ (۰/۱۲۷)
σ	۰/۴۱ (۰/۱۱۸)

خانواده توزیع‌های X-Exponential-G (XE-G) است. در این مدل، تابع توزیع تجمعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x) = ۱ - e^{-xG(x;\kappa)}, \quad x > ۰$$

که در آن، $G(x;\kappa)$ نمایانگر تابع توزیع تجمعی توزیع پایه است. تابع چگالی احتمال (PDF) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(x) = [xg(x;\kappa) + G(x;\kappa)]\, e^{-xG(x;\kappa)}$$

در حالت خاص، اگر در این خانواده، توزیع گامبل به عنوان توزیع پایه انتخاب شود، توزیع XE-Gumbel (XE-Gu) به دست می‌آید. در این حالت، تابع چگالی احتمال (PDF) و تابع توزیع تجمعی (CDF) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f(x) = \left[۱ + xe^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}\right] \exp\left[-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} - xe^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}}\right], \quad x, \mu, \sigma > ۰,$$

$$F(x) = ۱ - \exp\left[-xe^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}}\right]$$

۲.۲ توصیف مجموعه داده

مجموعه داده مورد بررسی، شامل ۲۰ مشاهده مربوط به زمان تسکین درد بیماران تحت درمان با یک مسکن خاص است. داده‌ها در اصل توسط [۲] ثبت شده‌اند و مدت زمان (بر حسب دقیقه) را نشان می‌دهند که بیماران پس از دریافت مسکن، احساس تسکین داشته‌اند. داده‌های ثبت‌شده به شرح زیر

جدول ۲: برآوردهای بیزی برای پارامترهای توزیع $XE-Gu$ تحت توابع زیان مختلف

تابع زیان	$\mu\ (SEs)$	$\sigma\ (SEs)$
مربع خطا	۱/۱۶۸ (۰/۱۱۵)	۰/۵۱۵ (۰/۰۸۱)
لاینکس ($c = ۰/۷$)	۱/۱۶۲ (۰/۵۱۱)	۰/۵۱۱ (۰/۰۸۰)
آنتروپی	۱/۱۹۱ (۰/۱۰۸)	۰/۴۸۳ (۰/۰۷۶)
قدر مطلق خطا	۱/۱۹۷ (۰/۱۰۸)	۰/۴۸۳ (۰/۰۷۶)

هستند:

$$۲/۰, ۱/۶, ۲/۳, ۱/۷, ۳/۰, ۱/۴, ۱/۲, ۱/۵, ۱/۸, ۴/۱,$$
$$۲/۷, ۱/۷, ۲/۲, ۱/۶, ۱/۸, ۱/۹, ۱/۷, ۱/۳, ۱/۴, ۱/۱.$$

در مقاله مرجع، این داده‌ها با توزیع XE-Gu برازش شده‌اند. همچنین در مقاله مرجع، برای برآورد پارامترهای این مدل، از روش ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) استفاده شده که به صورت جدول ۲ گزارش شده است.

۳.۲ معرفی توزیع پیشین و پسین

توزیع پیشین منتخب برای μ و σ به صورت زیر است: $\mu \sim N(۱/۶۵, ۰/۷۵)$ و $\sigma \sim \text{Gamma}(۳, ۴/۸۸)$.

۳ نتایج و تحلیل آن‌ها

۱.۳ بررسی دقت برآوردهای بیزی با استفاده از خطای استاندارد

نتایج نشان داد که برآوردهای حاصل از توابع زیان آنتروپی و قدر مطلق خطا برای μ و σ دارای کمترین SE بودند، که نشان‌دهنده‌ی پایداری و دقت بیشتر و نوسان کمتر نسبت به سایر روش‌ها است.

۴ مراجع

References

[1] Mohammad, S. X-exponential-g family of distributions with applications. *International Journal of Statistics and Probability*, 13(1):40, 2024.

[2] Gross, A. J. and Clark, V. *Survival Distributions: Reliability Applications in the Biomedical Sciences*. 1975.

دومین کنفرانس بین‌المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

پیش‌بینی حجم رواناب ورودی به مخزن سد زاینده‌رود با استفاده از مدل‌های سری زمانی SARIMA

حمید قربانی [۱]

[۱] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

چکیده

میانگین ماهانه حجم روزانه ورودی آب به مخزن سد زاینده رود (بر حسب میلیون متر مکعب) برای یک دوره آماری ۲۴ ساله با شروع از آبان ۱۳۷۷ بوسیله مدل‌های فصلی-ضربی سریما مدل‌بندی شده است. قبل از برازش مدل و در مرحله پردازش داده‌ها به دلیل تاثیر مخرب داده‌های پرت بر برازش، ابتدا داده‌های پرت شناسایی و جایگزین شدند. بهترین مدل $\text{SARIMA}(۱,۰,۰)\times(۲,۱,۰)_{۱۲}$ بر اساس معیار نیکوئی برازش آکائیک از بین مدلهای سریما با پارامترهای مختلف انتخاب گردید. در پایان بر اساس بهترین مدل، پیش‌بینی میزان حجم ورودی آب به سد برای یک دوره ۲۴ ماهه انجام شده است. برای انجام تحلیل از امکانات نرم افزار R استفاده شده است.

کلمات کلیدی: آبدهی، مدل‌های سری زمانی SARIMA، معیارهای نیکوئی برازش، تحلیل مانده‌ها

۱ مقدمه

مقدار متوسط بارش سالیانه در جهان ۷۵۰ میلیمتر و در ایران متوسط سالانه حدود ۲۵۰ میلیمتر در سال است، یعنی متوسط بارندگی در ایران در طول سال از یک سوم میزان بارندگی در جهان نیز کم تر است. در حدود ۸۳ درصد از مناطق ایران را می‌توان در زمره مناطق کم‌بارش قرار داد که میزان بارندگی در آنها در حدود ۱۸۸ میلیمتر اندازه گرفته شده است. بخش پربارش کشور بیشتر در محدود کرانه‌های دریای خزر در حدود ۹۰۰ الی ۱۰۰۰ میلیمتر است. همچنین ۱/۱ درصد از وسعت خشکی‌های جهان در ایران قرار دارد به‌طوری که ۲۵ درصد خاک ایران در مناطق فراخشک، ۴۰ درصد در مناطق خشک و ۲۵ درصد در مناطق نیمه‌خشک قرار دارد [۳].

حوضه آبریز زاینده‌رود با وسعت ۲۷ هزار کیلومتر مربع گیرنده بخش عمده‌ای از حوضه آبریز گاوخونی است که خود جزئی از حوضه آبریز کویر مرکزی ایران است. حوضه زاینده‌رود از شمال به حوضه آبریز دریاچه نمک از غرب و جنوب غرب به حوضه آبریز کارون و دز از شرق به حوضه آبریز دق سرخ و کویر سیاه‌کوه و از جنوب به حوضه آبریز شهرضا محدود می‌شود. مرتفع‌ترین نقطه حوزه کوه کربوش

[1] hamidghorbani@kashanu.ac.ir

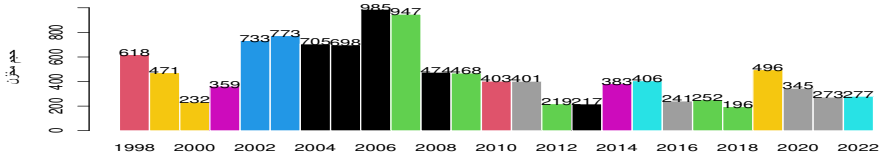
با ارتفاع ۳۹۷۴ متر از سطح دریا و کم ارتفاع‌ترین نقطه حوضه تالاب گاوخونی با ارتفاع ۱۴۵۰ متر از سطح دریاست. تغییرات آب و هوا در این حوزه بسیار چشمگیر است درحالیکه ناحیه چلگرد در غرب حوزه دارای بارش بیش از ۱۴۰۰ میلیمتر است، در شرق حوزه در کنار تالاب گاوخونی بارش متوسط حدود ۱۰۰ میلیمتر می‌باشد. از نظر جمعیت نیز طبق نتایج سرشماری سال ۹۵ جمعیت حوزه حدود ۴/۶ میلیون نفر بوده که از این تعداد حدود ۹۸ درصد در محدوده استان اصفهان و حدود ۲ درصد آن نیز در محدوده استان چهارمحال و بختیاری ساکن‌اند [۲]. آبدهی رودخانه یکی از مهمترین داده‌های ورودی حوضه آبریز، برای استفاده در مدل‌های هیدرولوژیکی می‌باشد. همچنین بارش به عنوان مهمترین منبع تغذیه ورودی حوضه آبریز، از پارامترهای بسیار تأثیرگذار در مدیریت منابع آب و امور مرتبط با مهندسی آب در هرحوضه آبریز ایفا می‌کند. جریان ورودی به مخزن سد زاینده رود متأثر از آبدهی رودخانه‌های بالادست سد زاینده رود و خصوصاً میزان بارش در کوهرنگ به‌عنوان سرچشمه اصلی حوضه آبریز زاینده رود می‌باشد.

۲ استان اصفهان و وضعیت خشکسالی

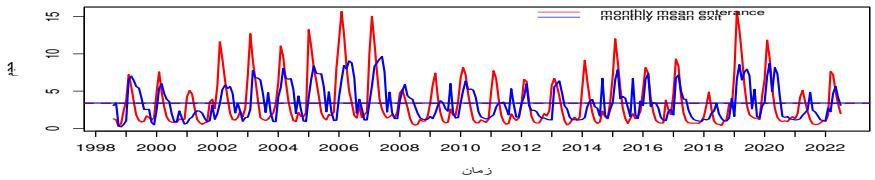
استان اصفهان، واقع در منطقه مرکزی کشور، در مختصات جغرافیایی ۳۰ درجه و ۴۳ دقیقه تا ۳۴ درجه و ۲۷ دقیقه عرض شمالی و ۴۹ درجه و ۳۸ دقیقه تا ۵۵ درجه و ۳۲ دقیقه طول شرقی قرار دارد که مساحت آن حدود ۱۰۷۱۴۵ کیلومتر مربع (معادل ۶/۵۷ درصد از مساحت کشور) و ارتفاع متوسط منطقه ۱۵۵۰ متر از سطح دریا می‌باشد. میانگین بارندگی برابر ۱۳۰ میلیمتر در سال و بیشتر آن در فصل زمستان و ابتدای بهار می‌بارد. این مقدار بارندگی نزدیک به نصف میانگین سالانه بارندگی در کشور و یک‌ششم میانگین جهانی است. در حالی که تبخیر و تحقیق تعرق پتانسیل در حوضه ۱۵۰۰ میلیمتر می‌باشد. این استان به دلیل موقعیت جغرافیایی و وجود مناطق خشک و نیمه‌خشک مستعد روبرو شدن با خشکسالی‌های شدید می‌باشد. بر اساس گزارش اداره تحقیقات هواشناسی استان اصفهان، تحلیل شاخص استاندارد بارش تبخیر و تعرق دوره ده ساله تا پایان اسفند ۱۴۰۰ بیانگر آن است که درجات خفیف تا بسیار شدید خشکسالی بلند مدت بسیاری از مناطق استان اصفهان را فرا گرفته به گونه ای که ۸۶/۸ درصد از مساحت استان درگیر خشکسالی بوده و تنها ۱۳/۲ درصد از مساحت استان شرایط نرمال تا ترسالی متوسط را داشته است. از مجموع ۸۶/۸ درصد مساحت درگیر خشکسالی ، ۱۷/۹ درصد خشکسالی خفیف، ۲۰/۳ درصد خشکسالی متوسط، ۱۶/۵ درصد خشکسالی شدید و ۱۳/۲ درصد خشکسالی بسیار شدید می‌باشد. در پایان اسفند ماه ۱۴۰۰ از ۳۵ دشتی موجود در استان اصفهان، ۱۷ دشت در بخش آزاد و ۱۰ دشت در وضعیت بحرانی و ۸ دشت در قسمت ممنوعه در استان قرار گرفته‌اند [۱]. به‌همین دلیل پایش وضعیت دبی ورودی به مخزن سد زاینده رود می‌تواند به توسعه یک سیستم هشدار اولیه کمک کند تا به کمک آن خسارات ناشی از خشکسالی را به حداقل رسانید.

۳ داده‌ها

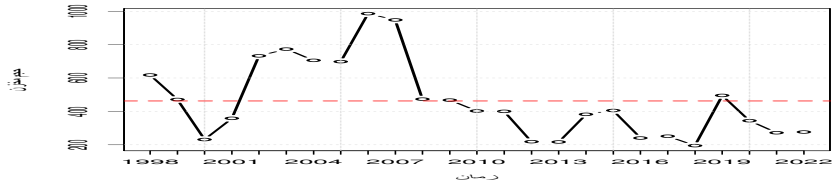
در این مطالعه، داده‌ها از اداره آب منطقه‌ای اصفهان دریافت شد. به طور کلی برای انجام یک بررسی آماری با دقت قابل اطمینان، دوره آماری داده‌ها بایستی به اندازه کافی طولانی باشد. داده‌های دریافت شده در این مطالعه، حجم روزانه ورودی آب به مخزن سد زاینده رود طی یک دوره ۲۴ ساله بوده است که میانگین ماهانه داده‌ها محاسبه و وارد تحلیل شده‌اند. به عنوان نمونه در یک پژوهش مشابه برای مدل‌کردن سری زمانی مربوط به میانگین بارش سالانه، طول دادهٔ آماری داده‌ها برابر ۱۱۵ سال با شروع از سال ۱۹۰۱ بوده است [۴]. توجه کنید در مورد این داده‌ها، طول آماری به زمان شروع به‌کار تاسیسات اندازه‌گیری یا به‌طور کلی شروع زمان ثبت آنها بستگی داشته است.
شکل ۱ تغییرات سالانه حجم مخزن سد زاینده‌رود و شکل ۲ میانگین ماهانه حجم ورودی و خروجی آب سد زاینده‌رود و همچنین شکل ۳ میانگین حجم مخزن در ماه را برای سال‌های مختلف بدست می‌دهند.



شکل ۱: تغییرات سالانه میانگین روزانه حجم مخزن سد زاینده‌رود بر حسب میلیون متر مکعب



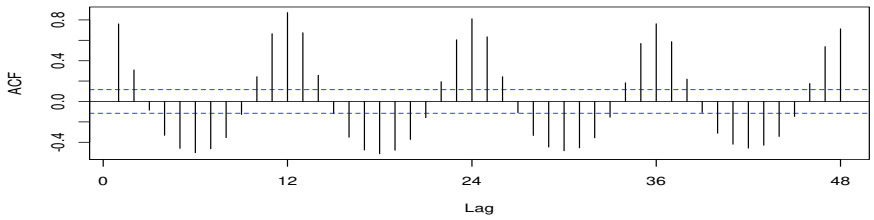
شکل ۲: مقایسه میانگین ماهانه حجم ورودی و خروجی آب سد زاینده‌رود برای سال‌های مختلف، میانگین‌های بلند مدت برابرند



شکل ۳: میانگین روزانه حجم مخزن سد زاینده‌رود در سال، همراه با میانگین دراز مدت

۴ مدل سریما

شکل ۴ تابع خودهمبستگی نمونه‌ای سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد را طی سال‌های مختلف نشان می‌دهد. همانطور که انتظار داشتیم، این نمودار نمایانگر اثر فصلی با دوره $S = ۱۲$



شکل ۴: نمودار خودهمبستگی نمونه‌ای سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود

برای مشاهدات است [۵]، زیرا همانطور که ملاحظه می‌شود در تأخیرهای زمانی با فاصله ۱۲ ماه، مودار رفتار مشابه از خود نشان می‌دهد و مقدار خودهمبستگی از حدود اطمینان معنی‌دار است یعنی از حدود اطمینان خارج شده است. برای برازش بهترین مدل سریما بر اساس معیار اطلاع آکائیکه، AIC، از دستور auto.arima بسته forecast استفاده می‌کنیم [۳]. برای اعمال معیار AIC در عمل، ما با مجموعه‌ای از مدل‌های کاندید شروع می‌کنیم و سپس مقادیر AIC مربوط به مدل‌ها را پیدا می‌کنیم. تقریباً همیشه اطلاعاتی به دلیل استفاده از یک مدل کاندید برای نشان دادن 'مدل واقعی' یعنی فرآیندی که داده‌ها را تولید کرده است، از دست می‌رود. ما می‌خواهیم از بین مدل‌های کاندید، مدلی را انتخاب کنیم که از دست دادن اطلاعات را به حداقل می‌رساند. هرچند نمی توانیم با اطمینان بهترین مدل را انتخاب کنیم، اما می توانیم از بین مدل‌های کاندید، مدلی را انتخاب کنیم که به ازای آن دست دادن اطلاعات تخمین زده شده را به حداقل برسانیم. در واقع، این مدل، مدلی است که کمترین مقدار AIC را دارد. قبل از برازش مدل‌ها و انتخاب بهترین آنها، لازم است داده‌ها را از نظر وجود داده‌های پرت ممکن بررسی کنیم. در بسته forecast از دستور tsoutliers برای این منظور استفاده می‌کنیم. این دستور علاوه بر تشخیص داده‌های پرت، مقادیری را برای جایگزینی آنها پیشنهاد می‌دهد. برای جایگزینی داده‌ها با مقادیر پیشنهاد شده، از دستور tsclean استفاده می‌کنیم. بهترین مدل برازش شده به داده‌های جدید و براورد پارامترهای آن به صورت زیر است:

```
  Series: monthly_meanenterancevolume_new "
ARIMA (1,0,0) (2,1,0) [12]"
Coefficients:"
 ar1 sar1 sar2"
 0.7462 -0.5733 -0.3200"
s.e. 0.0403 0.0591 0.0586"
sigma2 = 0.626: log likelihood = -328.42"
```

```
AIC=664.84 AICc=664.99 BIC=679.32"
```

۵ تحلیل مانده‌ها

شکل ۳ سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود و سری زمانی مقادیر برازش شده با بهترین مدل براساس معیار AIC را نشان می‌دهد. مانده‌ها، یعنی اختلاف مقادیر مشاهده شده و مقادیر برازش شده، که در این نمودار قابل مشاهده هستند، یک معیار برای دقت مدل در پیش‌بینی مقادیر آینده است. جذر میانگین مربعات خطا که آنرا با نماد RMSE نشان می‌دهیم، یکی از معیارهای سنجش دقت مدل برای پیش‌بینی است. این معیار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$RMSE = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} {e_i}^{۲},$$

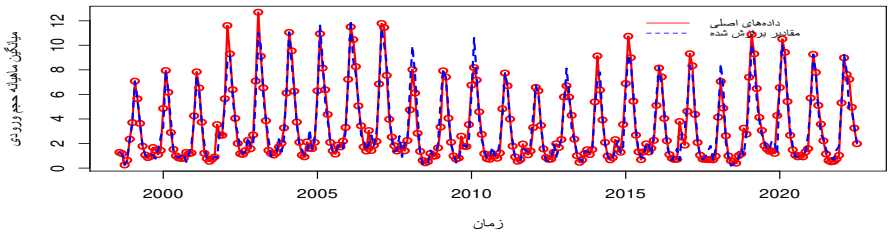
که در آن e_i ها، مانده‌های مدل هستند. از جمله دیگر معیارهای دقت مدل می‌توان به میانگین قدر مطلق خطا (MAE)، میانگین درصد خطا (MPE)، میانگین قدر مطلق درصد خطا (MAPE) و میانگین قدر مطلق خطای مقیاس شده (MASE) با تعاریف زیر اشاره کرد:

$$\begin{aligned}
MAE &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} |e_i|,\\
MPE &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} ۱۰۰\,\% \,\frac{e_i}{y_i},\\
MAPE &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} ۱۰۰\,\% \,\left|\frac{e_i}{y_i}\right|,\\
MASE &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} \frac{|e_i|}{\frac{۱}{(n-۱)}\sum_{j=۲}^{n} |(y_j - y_{j-۱})|}.
\end{aligned}$$

اندازه این معیارها برای مدل $\text{SARIMA}(۱,۰,۰)\times(۲,۱,۰)_{۱۲}$ برازش شده به سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود، عبارت است از:

```
   RMSE MAE MPE MAPE MASE "
 0.77 0.53 -5.2 22 0.59 "
```

’مانده‌ها‘ در یک مدل سری زمانی همان چیزی است که پس از برازش یک مدل باقی می‌ماند. برای بسیاری از مدل‌های سری زمانی (اما نه همه)، مانده‌ها برابر است با تفاوت بین مشاهدات و مقادیر



شکل ۵: مقایسه نمودارهای سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود و مقادیر برازش شده با مدل $\text{SARIMA}(۱,۰,۰)\times(۲,۱,۰)_{۱۲}$.

برازش متناظر. در واقع، مانده‌ها برای تشخیص اینکه آیا یک مدل به اندازه کافی اطلاعات موجود در داده‌ها را دریافت کرده است، مفید می‌باشند. یک مدل مناسب برای پیش‌بینی، مانده‌هایی با ویژگی‌های زیر به‌دست می‌دهد:

- مانده‌ها خودهمبستگی ندارند. اگر همبستگی بین مانده‌ها وجود داشته باشد، اطلاعاتی در مانده‌ها باقی می‌ماند که باید در پیش‌بینی‌های محاسباتی استفاده شوند.
- میانگین مانده‌ها صفر است. اگر مانده‌ها میانگینی غیر از صفر داشته باشند، پیش‌بینی‌ها اریب هستند.

هر مدلی که این ویژگی‌ها را برآورده نمی‌کند، می‌تواند بهبود یابد. با این حال، این بدان معنا نیست که مدل‌هایی که این ویژگی‌ها را برآورده می‌کنند، نمی‌توانند بهبود یابند. ممکن است چندین مدل برای یک مجموعه داده وجود داشته باشد که همه این ویژگی‌ها را برآورده می‌کنند. بررسی این ویژگی‌ها برای اینکه ببینیم آیا یک روش از تمام اطلاعات موجود استفاده می‌کند مهم است، اما روش خوبی برای انتخاب بهترین مدل برای پیش‌بینی نیست. علاوه بر این خواص ضروری، مفید (اما نه ضروری) است که مانده‌ها دو خاصیت زیر را نیز داشته باشند.

- مانده‌ها دارای واریانس ثابت باشند.
- مانده‌ها داری توزیع نرمال باشند.

این دو ویژگی، محاسبه فواصل پیش‌بینی را آسان‌تر می‌کنند. با این‌حال، مدلی که این ویژگی‌ها را برآورده نمی‌کند، لزوماً نمی‌تواند بهبود یابد. گاهی اوقات استفاده از تبدیل باکس‌ـ کاکس ممکن است به برقراری این ویژگی‌ها کمک کند، اما در غیر این‌صورت معمولاً کاری زیادی نمی‌توان انجام داد تا اطمینان حاصل شود که مانده‌های دارای واریانس ثابت و توزیع نرمال شوند.

علاوه بر بررسی نمودار ACF، همچنین می‌توانیم با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از مقادیر خودهمبستگی در تأخیر k، یعنی r_k، به‌عنوان یک گروه، به جای اینکه هر کدام را جداگانه بررسی کنیم، آزمون آماری صحیح‌تری برای خودهمبستگی انجام دهیم. وقتی با بررسی نمودار ACF، دنبال بررسی این هستیم که آیا میله‌ها در محدوده‌های لازم قرار دارد یا خیر، به طور ضمنی در حال انجام آزمون‌های فرض

متعددی هستیم که نتیجه هر یک با احتمال کمی مثبت کاذب است. هنگامی که به تعداد کافی از این آزمون‌ها ها انجام شود، احتمالاً نتیجه حداقل یکی از آنها مثبت کاذب است، و بنابراین ممکن است نتیجه بگیریم که در الگوی مانده‌ها خودهمبستگی معنی‌داری وجود دارد، در حالی که در واقع چنین نیست. به منظور غلبه بر این مشکل، آزمون می کنیم که آیا اولین k خودهمبستگی به‌طور قابل توجهی با آنچه از یک فرآیند نویز سفید انتظار می رود متفاوت است یا خیر. چنین آزمونی که بر روی گروهی از خودهمبستگی‌ها انجام می‌شود، آرمون پورتمانتو نامیده می‌شود که یک کلمه فرانسوی است و یک چمدان یا کمد شامل چندین لباس را توصیف می‌کند. آزمون لیونگ‌ـباکس نوعی از از آزمون پورتمانتو با آماره آزمون زیر است:

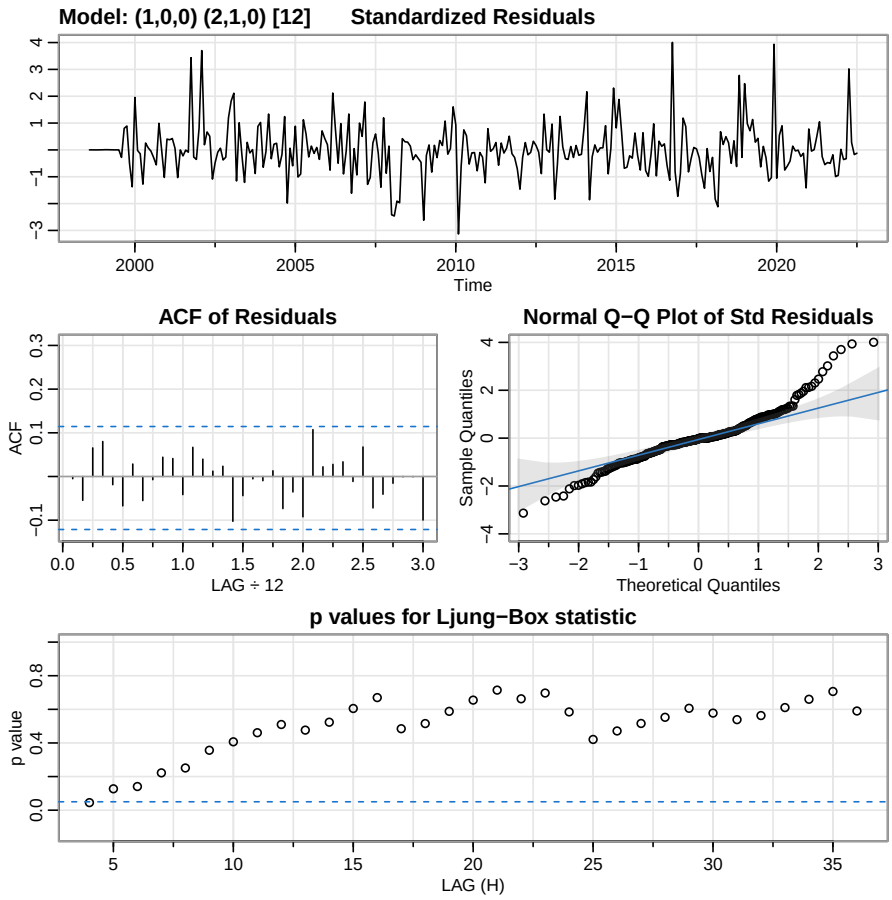
$$Q^* = n(n+۲)\sum_{k=۱}^{h}(n-k)^{-۱}r_k^۲.$$

مقادیر بزرگ Q^* بیانگر این است که فرض صفر مبنی بر مستقل بودن داده‌ها رد و فرض مقابل مبنی بر وجود خودهمبستگی در داده‌ها پذیرفته می‌شود. تحت فرض صفر Q^* دارای توزیع کای دو با $h-K$ درجه آزادی است که K تعداد پارامترهای مدل می‌باشد.
شکل ۶ تحلیل مانده‌های بهترین مدل سریمای برازش شده به سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود را نشان می‌دهد. نمودار بالایی در این شکل، سری زمانی مانده‌های استاندارد شده است. اگر توزیع مانده‌ها نرمال باشد، انتظار داریم تقریبا ۹۵ درصد مانده‌های استاندارد شده در بازه $(-۲, ۲)$ قرار گیرند. برای مانده‌های این مدل، تعداد ۸ تا از انها خارج بازه فوق قرار می‌گیرند که با توجه به اینکه طول سری ۲۸۸ است، درصد مانده‌ها خارج بازه فوق به طور تقریبی برابر سه درصد است. از اینرو در سری زمانی مانده، رفتار خارج از قاعده نرمال مشاهده نمی‌شود. البته توجه کنید که با توجه به نمودار چندک‌ـچندک مانده‌های استاندارد شده، توزیع مانده‌ها نرمال نیست. هر چند انحراف از نرمال بودن مانده‌ها از روی این نمودار واضح است، ولی نتیجه آزمون شاپیرو‌ـویلک برای آزمودن نرمال بودن مانده‌ها به صورت زیر است:

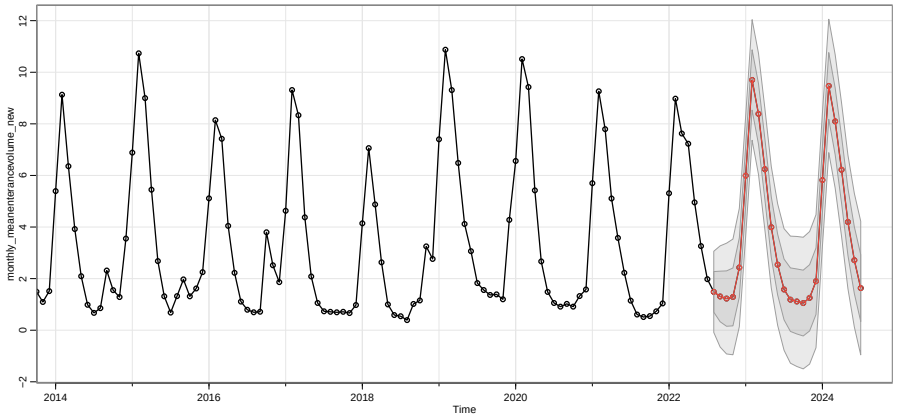
```
   Shapiro-Wilk normality test"
W = 0.93847, p-value = 1.394e-09"
```

با توجه به $p-$مقدار، فرض نرمال بودن مانده‌ها قویا رد می‌شود. همچنین با توجه به نمودار خودهمبستگی مانده‌ها هیچکدام از نمودارهای میله‌ای خارج حدود اطمینان نمی‌افتند و لذا مانده‌های این مدل، رفتار تصادفی دارند. در همین راسا، نتیجه آزمون لیونگ‌ـباکس روی گروه ۳۶ تایی از خودهمبستگی‌ها به‌صورت زیر است. $p-$مقدار مربوط به این آزمون، همان مقداری است که در نمودار پایینی شکل ۶ به‌ازای تأخیر زمانی $h = ۳۶$ نشان داده شده است.

```
   Box-Ljung test"
X-squared = 30.658, df = 32, p-value = 0.5344"
```



شکل ۶: تحلیل مانده‌های مدل $\text{SARIMA}\ (۱,۰,۰) \times (۲,۱,۰)_{۱۲}$ برازش شده به سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود .



شکل ۷: پیش‌بینی ۱۴ ماهه میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود با استفاده از مدل $\text{SARIMA}(۱,۰,۰) \times (۲,۱,۰)_{۱۲}$ همراه با کران‌های خطای پیش‌بینی.

مراجع

[۱] اداره کل هواشناسی استان اصفهان، اداره تحقیقات هواشناسی کاربردی، گزارش تحلیلی خشکسالی استان اصفهان، (۱۴۰۰).

[۲] س. صالحیان، ع. رحمانی فضلی، بررسی پیامدهای محیطی ناپایداری منابع آب در حوضه آبریز رودخانه زاینده رود، نشریه پژوهش‌های جغرافیایی (۱۳۹۷)، ۵۰(۲) ، ۳۹۱-۴۰۶.

[۳] پ. کردوانی، خشکسالی و راه‌های مقابله با آن در ایران، آب: در کشاورزی، صنعت و شهر، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۸۶.

[4] Chifurira, R. (2018), *Modelling Mean Annual Rainfall for Zimbabwe*, Bloemfontein, South Africa, PhD Thesis.

[5] Cryer, J. D. and Chan, K-S. (2008), *Time Series Analysis: With Applications in R*, Springer, Berlin.

[6] Hyndman, R. and Athanasopoulos, G. and Bergmeir, C. and Caceres, G. and Chhay, L. and O'Hara-Wild, M. and Petropoulos, F. and Razbash, S. and Wang, E. and Yasmeen, F. (2022), *forecast: Forecasting functions for time series and linear models*, R package version 8.16, https://pkg.robjhyndman.com/forecast/.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC
Islamic World Science Citation Center
۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

پیش‌بینی حجم رواناب ورودی به مخزن سد زاینده‌رود با استفاده از مدل‌های شبکه عصبی NNAR و MLP و مقایسه کارایی آنها با مدل SARIMA

حمید قربانی [۱]

[۱] گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان

چکیده

میانگین ماهانه حجم روزانه ورودی آب به مخزن سد زاینده رود (بر حسب میلیون متر مکعب) برای یک دوره آماری ۲۴ ساله با شروع از آبان ۱۳۷۷ بوسیله دو مدل مبتنی بر شبکه عصبی چند لایه پیشخور با یک لایه پنهان (NNAR) و همچنین پرسپترون چند لایه (MLP) شامل ۵ نرون پنهان مدل‌بندی شده است. در جای دیگری مدل $\text{SARIMA}(۱,۰,۰)\times(۲,۱,۰)_{۱۲}$ به‌عنوان بهترین مدل سریما برا اساس معیار AIC به‌همین داده‌ها برازش داده شد. در این مقاله نشان داده می‌شود که با توجه به معیار جذر میانگین مربعات خطا، بین مدل‌های برازش شده مبتنی بر هوش مصنوعی در این مقاله و بهترین مدل سریما، مدل مبتنی بر (MLP) کارایی بهتری نسبت به دو مدل دیگر دارد. در پایان بر اساس بهترین مدل، پیش‌بینی میزان حجم ورودی آب به سد زاینده رود برای یک دوره ۲۴ ماهه انجام شده است. برای انجام تحلیل از امکانات نرم افزار R استفاده شده است.

کلمات کلیدی: آبدهی، مدل‌های سری زمانی SARIMA، معیارهای نیکوئی برازش، تحلیل مانده‌ها

۱ مقدمه

پایش ورودی آب به مخزن سد نه تنها برای اطمینان از عملکرد کارآمد سد، بلکه برای کاربردهای مرتبط با ادغام طرح‌های مدیریت مخزن، شناسایی عوامل اصلی مؤثر بر تغییرات سطح آب سد، تعیین تأثیرات تغییرات اقلیمی جهانی بر سیستم‌های هیدرولوژیکی حوضه آبریز و اطمینان از تأمین آب شیرین کافی نیز مهم است [۴]. علاوه بر این، پایش و پیش‌بینی دقیق سطح آب سد مهم است زیرا به پارامترهایی مانند جریان‌های ورودی به سدها، ذخیره آب سد و رهاسازی آب از مخازن سد، تبخیر و نفوذ مربوط می‌شود. این پارامترها عدم قطعیت‌های مخزن سد را تشکیل می‌دهند و در عملکرد و مدل‌سازی سد اهمیت دارند. علاوه بر این حجم ورودی آب به سد و اهمیت ذخیره موجود آب در مخزن یک سد بر تولید انرژی‌های تجدیدپذیر قابل توجه است.

در سال‌های اخیر، شبکه‌های عصبی مصنوعی (ANNs) و سایر روش‌های محاسباتی مبتنی بر هوش مصنوعی در پیش‌بینی سری‌های زمانی در هیدرولوژی توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند [۱] و

[1] hamidghorbani@kashanu.ac.ir

[۹]. شبکه‌های عصبی در مقایسه با مدل‌های مختلف سری زمانی سنتی، رقیب قابل قبولی به نظر می‌رسند. اولین بار در [۸] از شبکه‌های عصبی برای مدل‌سازی سری‌های زمانی غیرخطی استفاده شده است . پیش‌بینی سری‌های زمانی برای دهه‌ها تحت سلطه روش‌های خطی بوده است. توسعه و پیاده‌سازی روش‌های خطی آسان است و همچنین درک و تفسیر آنها نسبتاً ساده است. با این حال، درک محدودیت‌های مدل‌های خطی مهم است. آنها قادر به ثبت روابط غیرخطی در داده‌ها نیستند. علاوه بر این، تقریب مدل‌های خطی به روابط غیرخطی پیچیده همیشه رضایت‌بخش نیست، هرچند نتایج به وضوح نشان می‌دهد که هیچ مدلی به صرف نوع مدل بهترین نیست و بهترین عملکرد به داده‌ها و سایر شرایط بستگی دارد [۱۰].

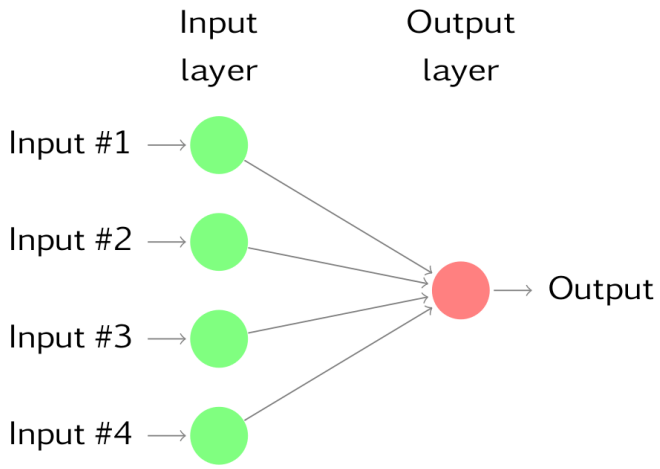
۲ مدل‌های شبکه عصبی مصنوعی

شبکه‌های عصبی مصنوعی که امروزه کاربردهای فراوانی از خود نشان داده‌اند. یکی از قابلیت‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی توانایی زیاد در مدل‌سازی و پیش‌بینی سری‌های زمانی غیرخطی در هیدرولوژی و مهندسی منابع آب می‌باشد که به دلیل خاصیت غیرخطی ذاتی و انعطاف‌پذیری، این مدل‌ها برای مدل‌سازی بسیار مفید می‌باشند. از جمله مزایای شبکه‌های عصبی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

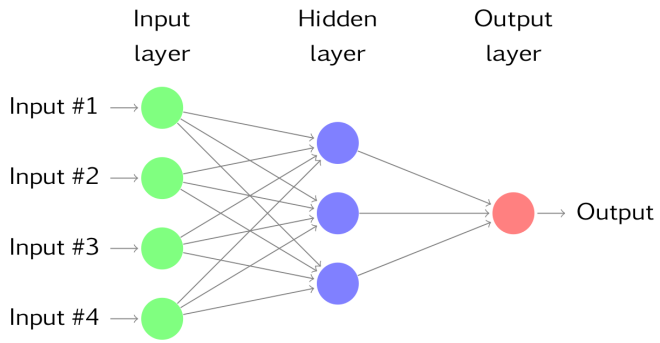
- آن‌ها قادرند رابطه بین متغیرهای ورودی و خروجی را بدون ملاحظات فیزیکی به‌طور واضح تشخیص دهند،
- حتی زمانی که داده‌های ورودی حاوی نویز و خطاهای اندازه‌گیری باشند، به‌خوبی کار می‌کنند،
- می‌توانند در طول زمان با راه‌حل‌ها سازگار شوند تا شرایط در حال تغییر را جبران کنند،
- در این گونه مدل‌ها بدون در نظر گرفتن معادلات پیچیده غیرخطی، می‌توان دینامیک حاکم بر سیستم را استخراج نموده و از این طریق، خروجی‌های مدل را پیش‌بینی نمود.

شبکه‌های عصبی مصنوعی روش‌های پیش‌بینی هستند که مبتنی بر مدل‌های ریاضی ساده حاکم بر مغز هستند. آنها اجازه می دهند روابط غیرخطی پیچیده ای بین متغیر پاسخ و پیش بینی کننده های آن وجود داشته باشد.
از نظر ساختار، یک شبکه عصبی را می‌توان به عنوان شبکه‌ای از ’نرون ها‘ که به آنها ’گره‌ها‘ نیز گفته می‌شود، در نظر گرفت که در لایه‌هایی سازماندهی شده‌اند. پیش‌بینی کننده‌ها (یاورودی‌ها) از لایه پایین، و پیش‌بینی ها (یا خروجی‌ها) لایه بالایی را تشکیل می‌دهند. همچنین ممکن است لایه‌های میانی شامل ’نرون‌های پنهان‘ باشد. ساده‌ترین نوع شبکه‌ها فاقد لایه‌های پنهان و معادل رگرسیون خطی هستند.
شکل ۱ نسخه شبکه عصبی یک رگرسیون خطی با چهار متغیر پیش‌بینی کننده را نشان می دهد. ضرایب مربوط به این پیش‌بینی کننده‌ها ’وزن‘ نامیده می‌شوند. پیش‌بینی‌ها با ترکیب خطی ورودی‌ها

به دست می‌آیند. وزن‌ها در شبکه عصبی با استفاده از یک "الگوریتم یادگیری" انتخاب می شوند که یک 'تابع هزینه' مانند میانگین مربعات خطا را به حداقل می رساند. البته در این مثال ساده می توان از رگرسیون خطی استفاده کرد که روش بسیار کارآمدتری برای آموزش مدل است. هنگامی که یک لایه میانی با نرون‌های پنهان به شبکه عصبی اضافه می‌کنیم، شبکه عصبی غیرخطی می‌شود. یک مثال ساده در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۱: ساختار ساده‌ترین نوع شبکه‌های عصبی که فاقد لایه‌های پنهان و معادل رگرسیون خطی می‌باشند



شکل ۲: یک شبکه عصبی با چهار ورودی و یک لایه پنهان با سه نرون پنهان

شبکه چندلایه پیشخور (FNN) شبکه‌ای است، که در آن هر لایه از گره‌ها، ورودیهای لایه‌های قبلی را دریافت می‌کند. خروجی گره‌ها در یک لایه، ورودی لایه بعدی هستند. ورودی‌های هر گره با استفاده از یک ترکیب خطی وزن‌دار ترکیب می‌شوند. سپس نتیجه، قبل از تبدیل شدن به خروجی، توسط یک تابع غیرخطی اصلاح می‌شود. برای مثال، ورودی‌های نرون پنهان j در شکل ۲ با فرمول

زیر به صورت خطی ترکیب شده‌اند:

$$z_j = b_j + \sum_{i=۱}^{۴} w_{i,j} x_i.$$

که در لایه پنهان، سپس با استفاده از یک تابع غیرخطی مانند $S-$وار (سیگموئید) به‌صورت:

$$s(z) = \frac{۱}{۱ + e^{-z}},$$

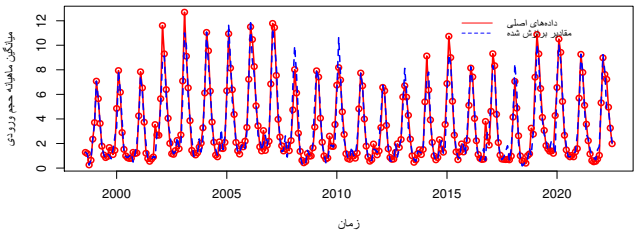
اصلاح می‌شود تا ورودی برای لایه بعدی را به‌دست دهد. نتیجه این اصلاح، کاهش اثر مقادیر ورودی پرت و مقاوم کردن شبکه نسبت به تاثیر نقاط پرت است. پارامترهای b_i و همچنین وزنهای $w_{i,j}$ از داده‌ها 'یادگرفته' می‌شوند. مقادیر وزن‌ها اغلب برای جلوگیری از بزرگ‌شدن آنها کراندار فرض می‌شود. پارامتری که وزن‌ها را محدود می‌کند به عنوان 'پارامتر میرایی' شناخته می‌شود و مقدار آن، اغلب برابر با ۰/۱ در نظر گرفته می‌شود. وزن‌ها برای شروع مقادیر تصادفی می‌گیرند و سپس با استفاده از داده‌های مشاهده شده به‌روز می شوند. در نتیجه، یک عنصر تصادفی در پیش‌بینی‌های تولید شده توسط یک شبکه عصبی وجود دارد. بنابراین، شبکه معمولا چندین بار با استفاده از نقاط شروع تصادفی مختلف آموزش داده شده و سپس از نتایج میانگین‌گیری می‌شود.
تعداد لایه‌های پنهان و تعداد گره‌ها در هر لایه پنهان باید از قبل مشخص شود که می‌توان از اعتبارسنجی متقابل برای این منظور استفاده کرد [۲].

۱.۲ مدل شبکه عصبی اتورگرسیو

برای داده‌های سری زمانی همانطور که از متغیرها با تأخیر زمانی در مدل اتورگرسیو استفاده می‌کنیم، می‌توان به‌عنوان ورودی شبکه عصبی نیز از متغیرها با تاخیر زمانی استفاده کرد که آن را مدل اتورگرسیو شبکه عصبی یا NNAR می‌نامیم. در این پژوهش ما فقط شبکه‌های پیش‌خور را با یک لایه پنهان در نظر گرفته و از علامت NNAR(p,k) برای نشان دادن آن استفاده می‌کنیم که در آن p تعداد ورودی‌ها با تأخیر زمانی و k تعداد گره‌ها در لایه پنهان است. به‌عنوان مثال، یک مدل NNAR(9 5) یک شبکه عصبی پیش‌خور با ۹ مشاهده آخر $y_{t-۱}$، $y_{t-۲}$، ...، $y_{t-۹}$ به عنوان ورودی برای پیش‌بینی خروجی y_t و با ۵ نرون در لایه پنهان است، با این اوصاف مدل NNAR(p,0) معادل مدل ARIMA(p,0,0) است که در آن دیگر محدودیت‌ها، روی پارامترهای مدل اتورگرسیو برای اطمینان از مانایی وجود ندارد.
برای داده های فصلی، اضافه کردن آخرین مقادیر مشاهده شده از فصل آخر به عنوان متغیر ورودی مفید است. به عنوان مثال، یک مدل NNAR $(3,1,2)_{12}$ دارای ورودی $y_{t-۱}$، $y_{t-۲}$، $y_{t-۳}$ ، ...، $y_{t-۱۲}$ و دو نرون در لایه پنهان است. به‌طور کلی مدل NNAR $(\mathrm{p,P,k})_m$ دارای ورودی‌های $y_{t-۱}$، $y_{t-۲}$، ...، y_{t-p} و y_{t-m}، $y_{t-۲m}$، ...، y_{t-Pm} و k نرون در لایه پنهان می‌باشد. مدل NNAR

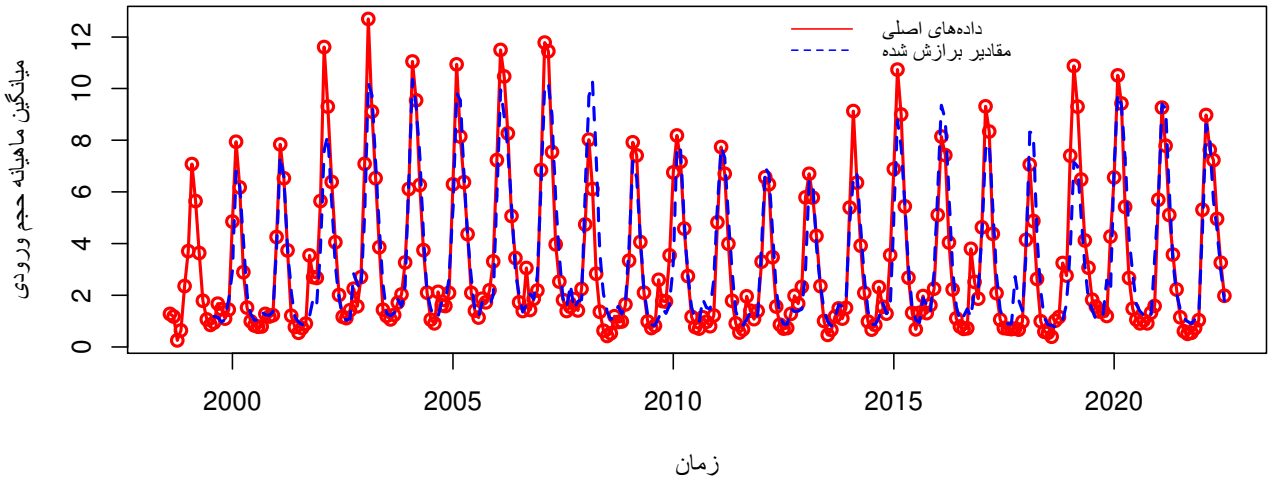
(p,P,0)_m معادل مدل $\text{SARIMA}(p,۰,۰)\times(P,۰,۰)m$ است که در آن دیگر، روی پارامترهای مدل اتورگرسیو محدودیت‌هایی برای اطمینان از مانایی وجود ندارد. با استفاده از تابع nnetar() در بسته forecast می‌توان مدل (p,P,k)_m NNAR را برازش داد. اگر مقادیر p و P مشخص نشده باشند، به صورت خودکار انتخاب می‌شوند. برای سری زمانی غیر فصلی، پیش فرض تعداد بهینه از تأخیر، مطابق با AIC برای یک مدل $AR(p)$ خطی است. برای سری زمانی فصلی، مقدار پیش فرض $P = ۱$ و p از مدل خطی بهینه برازش شده به داده‌های که مولفه فصلی آنها حذف شده، انتخاب می‌شود. اگر k مشخص نشده باشد، برابر $\frac{p+P+۱}{۲}$ قرار داده می‌شود (درصورت اعشاری بودن حاصل کسر، مقدار به نزدیکترین عدد گرد می‌شود).

برای‌پیش بینی یک گام جلوتر، از ورودی‌های گذشته موجود و برای پیش بینی دو گام جلوتر، از پیش‌بینی یک گام به همراه داده‌های گذشته، به عنوان ورودی استفاده می‌شود. این فرآیند تا محاسبه همه پیش‌بینی‌های لازم، ادامه می‌یابد. شکل ۴ سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود



شکل ۳: مقایسه نمودارهای سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود و مقادیر برازش شده با مدل $\text{SARIMA}(۱,۰,۰)\times(۲,۱,۰)_{۱۲}$

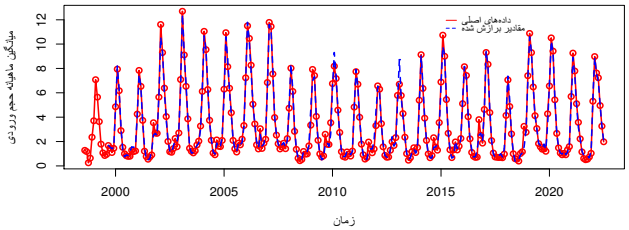
و سری زمانی مقادیر برازش شده با مدل $\text{NNAR }(1,1,2)_{12}$ را نشان می‌دهد.



شکل ۴: مقایسه نمودارهای سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود و مقادیر برازش شده با مدل $\text{NNAR }(1,1,2)_{12}$

۲.۲ مدل شبکه عصبی پرسپترون چندلایه

در ادامه از شبکه عصبی دیگری به نام پرسپترون چندلایه (MLP) نیز استفاده شده است. یک مدل پرسپترون چند لایه شامل حداقل سه لایه گره می‌باشد که یک لایه ورودی، یک لایه پنهان و یک لایه خروجی است. به جزء گره‌های ورودی، هر گره یک نرون است که از یک تابع فعال‌سازی غیرخطی استفاده می‌کند. مدل پرسپترون چند لایه از تکنیک یادگیری نظارت شده به نام بازپرداخت برای آموزش استفاده می‌کند. برای برازش این مدل از بسته نرم‌افزاری nnfor استفاده می‌کنیم [۷]. شکل ۵ سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود و سری زمانی مقادیر برازش شده با مدل MLP شامل ۵ نرون پنهان را نشان می‌دهد.



شکل ۵: مقایسه نمودارهای سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود و مقادیر برازش شده با مدل MLP

۳ مقایسه کارایی مدل سریما و هوش مصنوعی

شکل ۳ سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود و سری زمانی مقادیر برازش شده با مدل $\text{SARIMA}(۱,۰,۰)\times(۲,۱,۰)_{۱۲}$ به‌عنوان بهترین مدل سریما براساس معیار AIC را نشان می‌دهد. همچنین شکل ۴ سری زمانی میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود و سری زمانی مقادیر برازش شده با مدل $\text{NNAR}(۱,۱,۲)_{۱۲}$ را نشان می‌دهد. با مقایسه این دو نمودار به نظر می‌رسد که در کل، باقیمانده‌های مدل NNAR برازش شده بزرگتر از مدل سریمای برازش شده هستند. در مدل NNAR، فقط $y_{t-۱}$ و $y_{t-۱۲}$ و دو نرون در لایه پنهان در پیش‌بینی گام بعد مورد استفاده قرار گرفته است که البته نباید از این مدل انتظار عملکرد خوبی در پیش‌بینی داشت. جذر میانگین مربعات خطا برای این مدل برابر ۱/۰۷ و برای مدل سریمای برازش شده برابر ۰/۷۷ است. با توجه به این مقایسه، نتیجه می‌گیریم که این مدل عملکرد بهتری نسبت مدل سریمای برازش شده ندارد.

مقایسه نمودارهای ۳ و ۵ نشان می‌دهد، به‌طور کلی باقیمانده‌های مدل MLP برازش شده کمتر از مدل سریمای برازش شده هستند. جذر میانگین مربعات خطا برای مدل MLP برابر ۰/۳۵ است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که مدل MLP برازش شده، عملکرد بهتری نسبت به به مدل NNR و مدل سریمای برازش شده دارد.

پیش‌بینی ۲۴ ماه آینده میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود بر اساس مدل شبکه عصبی MLP

برازش شده، در جدول ۱ آمده است.

	date	predict
t+1	2022-08-23	1.45
t+2	2022-09-23	1.61
t+3	2022-10-23	1.71
t+4	2022-11-23	1.54
t+5	2022-12-23	2.86
t+6	2023-01-23	6.30
t+7	2023-02-23	10.62
t+8	2023-03-23	9.31
t+9	2023-04-23	6.95
t+10	2023-05-23	4.07
t+11	2023-06-23	2.68
t+12	2023-07-23	1.38
t+13	2023-08-23	1.35
t+14	2023-09-23	1.55
t+15	2023-10-23	1.17
t+16	2023-11-23	1.50
t+17	2023-12-23	1.94
t+18	2024-01-23	5.58
t+19	2024-02-23	9.92
t+20	2024-03-23	8.37
t+21	2024-04-23	5.88
t+22	2024-05-23	3.67
t+23	2024-06-23	2.10
t+24	2024-07-23	1.10

جدول ۱: پیش‌بینی ۲۴ ماه آینده میانگین ماهیانه حجم ورودی سد زاینده‌رود

مراجع

[1] Hamoudia, M., Makridakis, S. and Spiliotis, E. (2023), *Forecasting with Artificial Intelligence, Theory and Applications*, Springer, Switzerland .

[2] Hyndman, Rob J. and Athanasopoulos, G. (2018), *Forecasting: Principles and Practice*, OTexts.

[3] Hyndman, R. and Athanasopoulos, G. and Bergmeir, C. and Caceres, G. and Chhay, L. and O'Hara-Wild, M. and Petropoulos, F. and Razbash, S. and Wang, E. and Yasmeen, F. (2022), *forecast: Forecasting functions for time series and linear models*, R package version 8.16, url = https://pkg.robjhyndman.com/forecast/.

[4] Hu, W. and Zhai, S. and Zhu, Z. and Han, H. (2008), *Impacts of the Yangtze River water transfer on the restoration of Lake Taihu*, Ecol. Eng. 2008, 34, 30–49.

[5] Jain A., Kumar, A. M. (2007), *Hybrid neural network models for hydrologic time series forecasting*, Appl Soft Comput 7, 585–592.

[6] Kisi, O. (2008), *River flow forecasting and estimation using dif- ferent artificial neural network techniques*, Hydrol Res. 39(1), 27–40.

[7] Kourentze, N. (2022), *nnfor: Time Series Forecasting with Neural Networks*, R package version 0.9.8, url = https://CRAN.R-project.org/package=nnfor.

[8] Lapedes, A., Farber, R. (1987), *Nonlinear signal processing using neural networks: Prediction and system modeling*, Technical Report LA-UR-87-2662, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM.

[9] Ouma, Y. O. and Moalafhi, D. B. and Anderson, G. and Nkwae, B. and Odirile, P. and Parida, B. P. and Qi, J. (2022), *Dam Water Level Prediction Using Vector AutoRegression, Random Forest Regression and MLP-ANN Models Based on Land-Use and Climate Factors*, Sustainability, 14(22), 14934.

[10] Rozenberg, R. and Bäck, T. and Kok, J. N. (2012), *Handbook of Natural Computing:4 vol set*, Springer, Heidelberg.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

حل عددی معادلات انتگرال تصادفی منفرد نوع آبل با تکنیک ماتریس عملیاتی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته

آتنا غیاثی [۱]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور تهران- ایران

چکیده

در این مطالعه، روشی برای حل عددی معادلات انتگرال تصادفی خطی منفرد از نوع آبل ارائه شده است. این رویکرد، مبتنی بر تبدیل معادله انتگرالی به یک سیستم معادلات جبری خطی با بهره‌گیری از چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته است. ویژگی برجسته این تبدیل، ظهور یک ماتریس عملیاتی متعامد مثلثی است که منجر به تسهیل محاسبات و افزایش کارآمدی روش حل می‌گردد. به منظور ارزیابی عملی و نمایش قابلیت‌های روش، چندین مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته و نتایج آن‌ها ارائه شده است.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال ایتو- ولترا، معادلات انتگرال نوع آبل، چند جمله ای های لژاندر انتقال‌یافته.

۱ مقدمه

چکی ابزاری قدرتمند در مدل‌سازی و تحلیل پدیده‌های گوناگون ظهور کرده‌اند. از نخستین کاربردهای آن‌ها در مسائل مکانیک کلاسیک گرفته تا نقش محوری‌شان در توصیف سیستم‌های پیچیده در فیزیک پلاسما، تئوری الاستیسیته و اخترفیزیک، این معادلات توانایی بی‌نظیری در به تصویر کشیدن روابط بین کمیت‌های مختلف از طریق انتگرال‌ها از خود نشان داده‌اند.

در این میان، معادلات انتگرال تصادفی، به ویژه در دهه‌های اخیر، به دلیل توانایی‌شان در در نظر گرفتن عدم قطعیت و نوسانات تصادفی موجود در سیستم‌های واقعی، توجه فزاینده‌ای را به خود جلب کرده‌اند. این معادلات، که در آن‌ها حداقل یک قست شامل یک فرآیند تصادفی است، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر سناریوهای دنیای واقعی را فراهم می‌آورند و در زمینه‌های متنوعی از مهندسی [۱] ، مالی و علوم زیستی [۲] گرفته تا پردازش سیگنال و کنترل سیستم‌ها [۳] کاربرد یافته‌اند.

یکی از زیرشاخه‌های مهم معادلات انتگرال تصادفی، معادلات انتگرال منفرد هستند که در آن‌ها هسته انتگرال دارای نقاط تکینگی بوده یا بازه انتگرال‌گیری نامحدود است. این نوع معادلات،

[1] Ghiasi.atena@pnu.ac.ir

علی‌رغم پیچیدگی‌های تحلیلی، به طور طبیعی در بسیاری از مسائل فیزیک ریاضی رخ می‌دهند و خواص منحصربه‌فردی را به نمایش می‌گذارند. در میان معادلات انتگرال منفرد، معادلات انتگرال تصادفی از نوع آبِل جایگاه ویژه‌ای دارند. این معادلات، که به دلیل ساختار خاص هسته خود شناخته می‌شوند، در مدل‌سازی مسائلی نظیر انتقال حرارت، نفوذ و مسائل مربوط به حافظه در مواد ویسکوالاستیک کاربرد دارند.

با وجود اهمیت روزافزون معادلات انتگرال تصادفی منفرد از نوع آبِل [۴] در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی، تحقیقات پیرامون یافتن روش‌های عددی کارآمد و دقیق برای حل آن‌ها همچنان یک حوزه فعال و رو به رشد است. چالش‌های ناشی از وجود تکینگی در هسته انتگرال و ماهیت تصادفی معادلات، نیازمند توسعه تکنیک‌های نوینی است که بتوانند با این پیچیدگی‌ها مقابله کرده و تقریب‌های قابل اعتمادی از حل ارائه دهند. صمدیار و فرشید میرزایی در [۵] معادلات انتگرالی تصادفی منفرد از نوع آبل را با استفاده از روش هم محلی براساس چندجمله‌ای برنولی متعامد اجرا کرده اند. یوسفی [۶] نیز با بهره‌گیری از تقریب موجک‌های لژاندر، روش عددی برای حل معادلات انتگرال آبِل به عنوان معادلات انتگرال ولترا منفرد ارائه داده است.

در این پژوهش با این هدف یک روش تقریبی برای حل معادلات انتگرال تصادفی ایتو–ولترا منفرد از نوع آبِل ارائه می‌شود. این روش بر پایه استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر انتقال‌یافته و خواص منحصربه‌فرد آن‌ها در تشکیل ماتریس‌های عملگر استوار است. انتظار می‌رود که روش پیشنهادی، علاوه بر ارائه تقریب‌های دقیق، از مزایایی نظیر سهولت پیاده‌سازی و کارایی محاسباتی نیز برخوردار باشد و گامی مؤثر در جهت حل عددی این دسته از معادلات مهم بردارد.

تمرکز اصلی بر تحلیل و حل عددی معادله انتگرال تصادفی ایتو–ولترا از نوع آبل به فرم زیر است

$$X(t) = f(t) + \lambda_1 \int_0^t \frac{X(s)}{(t-s)^\alpha} ds + \lambda_2 \int_0^t K(s,t)X(s)dB(s), \quad t \in [0,1] \quad (1)$$

در این معادله، $f(t)$ و $k(t,s)$ توابع معلوم، λ_1, λ_2 ثابت‌های حقیقی، و $0 < \alpha < 1$ می‌باشند. همچنین، $X(t)$ فرآیند تصادفی مجهولی است که به دنبال تعیین آن هستیم و $B(t)$ یک فرآیند حرکت براونی استاندارد تعریف شده بر روی فضای احتمال (Ω, F, P) است. به منظور بررسی جامع این معادله، ساختار ادامه مقاله به شرح زیر تنظیم شده است: در بخش‌های آتی، ابتدا تعاریف و مفاهیم اساسی مورد نیاز ارائه خواهند شد. سپس، یک روش عددی کارآمد برای تقریب حل این معادله توسعه داده می‌شود. در ادامه، آنالیز خطای روش پیشنهادی به صورت نظری مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای ارزیابی عملکرد عملی روش، مثال‌های عددی متنوعی ارائه و نتایج حاصل تحلیل خواهند شد. در نهایت، بخش نتیجه‌گیری به جمع‌بندی یافته‌های پژوهش و ارائه چشم‌اندازهای آتی اختصاص خواهد یافت.

۲ تعاریف و مقدمات

تعریف ۱.۲. چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته

چندجمله‌ای‌های لژاندر $L_n(s)$ در بازه $[-۱, ۱]$ متعامد هستند و خاصیت تعامد آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\int_{-۱}^{۱} L_n(s)L_m(s)ds = \frac{۲}{۲n+۱}\delta_{nm}, (\delta_{nm}$ **دلتا کرونکر**$)$

با اعمال تغییر متغیر خطی $s = ۲t - ۱$، می‌توان چندجمله‌ای‌های لژاندر را به بازه$[۰, ۱]$ منتقل کرد. چندجمله‌ای‌های حاصل، با نماد$LG_n(t)$ نشان داده می‌شوند و به چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته موسوم هستند [۷]. این چندجمله‌ای‌ها از درجه n بوده و با روابط بازگشتی زیر تولید می‌شوند که

$$LG_{i+۱}(t) = \frac{(۲i+۱)(۲t-۱)}{i+۱}LG_i(t) - \frac{i}{i+۱}LG_{i-۱}(t), \quad i = ۱, ۲, ...$$

با دو جمله آغازین $LG_۰(t) = ۱$ و $LG_۱(t) = ۲t - ۱$. با توجه به خاصیت تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر در بازه $[-۱, ۱]$ و اعمال تغییر متغیر $s = ۲t-۱$، چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته $LG_n(t)$ نیز در بازه $[۰, ۱]$ متعامد هستند. خاصیت تعامد آن‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$\int_{۰}^{۱} LG_n(t)LG_m(t)dt = \frac{۱}{۲n+۱}\delta_{nm}$

مقادیر چندجمله‌ای‌های لژاندر منتقل‌شده در نقاط مرزی بازه $[۰, ۱]$عبارتند از:$t = ۰$، $LG_n(۰) = (-۱)^n$ و $t = ۱$، $LG_n(۱) = ۱$. در ادامه، با بهره‌گیری از روابط بازگشتی حاکم بر این چندجمله‌ای‌ها، به استخراج فرم‌های برداری و ماتریسی آن‌ها خواهیم پرداخت.

$$LG_n(t) = \sum_{i=۰}^{n} (-۱)^{n+i}\frac{(n+i)!}{(n-i)!}\frac{t^i}{(i!)^۲}$$

$$LG(t) = [LG_۰(t), LG_۱(t), ..., LG_n(t)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & -۶ & ۶ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & ۰ \\ (-۱)^{n+۰}\frac{(n+۰)!}{(n-۰)!(۰!)^۲} & (-۱)^{n+۱}\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!(۱!)^۲} & \cdots & \cdots & \cdots & (-۱)^{n+n}\frac{(n+n)!}{(n-n)!(n!)^۲} \end{bmatrix}$$

$$A \times \begin{bmatrix} ۱ \\ t \\ t^۲ \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \Rightarrow LG(t) = AT_n(t)$$

قضیه ۱.۲. تقریب ماتریس عملیاتی انتگرال با هسته آبل

اثبات. با در نظر گرفتن عملگر انتگرالی با هسته آبل که در رابطه ۱ با مرتبه $۰ < \alpha < ۱$ تعریف شده است، می‌توان تقریب ماتریسی برای این عملگر بر اساس رابطه فوق ارائه نمود.

$$\int_۰^t \frac{LG(s)}{(t-s)^\alpha} ds = A \int_۰^t \frac{T_n(s)}{(t-s)^\alpha} ds$$

$$\int_۰^t \frac{s^i}{(t-s)^\alpha} ds = \frac{\Gamma(۱-\alpha)\Gamma(۱+i)}{\Gamma(i+۲-\alpha)} t^{i+۱-\alpha} \Rightarrow \int_۰^t \frac{T_n(s)}{(ts)^\alpha} ds$$

$$\int_۰^t \frac{T_n(s)}{(t-s)^\alpha} ds = [\frac{\Gamma(۱-\alpha)}{\Gamma(۲-\alpha)} t^{۱-\alpha}, \frac{\Gamma(۱-\alpha)}{\Gamma(۳-\alpha)} t^{۲-\alpha}, ..., \frac{\Gamma(۱-\alpha)\Gamma(۱+n)}{\Gamma(n+۲-\alpha)} t^{n+۱-\alpha}]^T = \Psi \hat{T}$$

که Ψ مارتیس $(n+۱) \times (n+۱)$ و بردار $\hat{T}_n(t) = [t^{۱-\alpha}, t^{۲-\alpha}, ..., t^{n+۱-\alpha}]^T$ می باشد به طوریکه تابع $t^{i-\alpha}$ برای $i = ۱, ..., n+۱$ را به صورت زیر تقریب میزنیم $t^{i-\alpha} \simeq E_i^T LG(t)$ از طرفی

$$E_i = \int_۰^۱ t^{i-\alpha} \Phi(t) dx = [\int_۰^۱ t^{i-\alpha} \phi_{۰,n}(t) dt, \int_۰^۱ t^{i-\alpha} \phi_{۱,n}(t) dt, ..., \int_۰^۱ t^{i-\alpha} \phi_{n,n}(t) dt]^T$$

با تعریف یک ماتریس از مرتبه $n+۱$ به صورت $E = [E_۱, ..., E_{n+۱}]$

$$\int_۰^t \frac{T_n(s)}{(t-s)^\alpha} ds = \Psi E^T \Phi(t) \Rightarrow \int_۰^t \frac{\Phi(s)}{(t-s)^\alpha} dt = A \Psi E^T LG(t)$$

تقریب زدن $X(t)$ با استفاده از $(n+۱)$ جمله اول سری لژاندر آن منجر می‌شود به:

$$X(t) \simeq \sum_{k=۰}^{n} x_k LG_k(t) = X^T LG(t) = LG^T(t) X, \qquad (۲)$$

که در آن $X = [x_۰, x_۱, ..., x_n]^T$ بردار ضرایب لژاندر و $LG(t) = [LG_۰(t), LG_۱(t), ..., LG_n(t)]^T$ بردار پایه لژاندر است. برای جایگزینی تابع هسته با تقریب تیلوردرجه n،

$k(t,s) = \sum_{i=۰}^{n} \sum_{j=۰}^{n} k_{i,j} t^i s^j; \quad k_{i,j} = \frac{۱}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} k(۰,۰)}{\partial t^i \partial s^j}; i,j = ۰,۱,...,n$
$k(t,s) = LG(t) K LG^T(s)$
$\int_۰^t LG_n(s)ds = \frac{۱}{۲(۲n+۱)}[LG_{n+۱}(t) - LG_n(t)]; \quad \int_۰^t LG(s)ds =$
$PLG(t) - \frac{۱}{۲(۲n+۱)} LG_{n+۱}(t),$

P ماتریس عملیاتی انتگرال سازی چندجمله ای ها می باشد که

$$P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & & ۰ & \\ \frac{-۱}{۶} & ۰ & \frac{۱}{۶} & ۰ & \cdots & ۰ & & ۰ & \\ ۰ & \frac{۱}{۱۰} & ۰ & \frac{۱}{۱۰} & \cdots & ۰ & & ۰ & \\ ۰ & ۰ & \frac{-۱}{۱۴} & ۰ & \cdots & ۰ & & ۰ & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \vdots & ۰ & & \frac{۱}{۲(۲n-۳)} & \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \vdots & \frac{-۱}{۲(۲n-۳)} & ۰ & & \end{bmatrix}$$

$\int_۰^t LG(s)ds \simeq PLG(t)$

□

قضیه ۲.۲. ماتریس عملیاتی تصادفی چندجمله ای های انتقال یافته لژاندر

اثبات. ماتریس عملیاتی تصادفی ایتو انتگرال بردار $LG(t)$ را به صورت زیر یعنی P_s تعریف می

کنیم، که در آن P_s از مرتبه $(n+۱)\times(n+۱)$ است

$$\int_۰^t LG(s)dW(s) = P_sLG(t);\quad t\in[۰,۱]$$

$$\int_۰^t LG(s)dW(s) = \int_۰^t AX(s)dW(s) = A\left[\int_۰^t dW(s), \int_۰^t sdW(s),\dots,\int_۰^t s^ndW(s)\right]^T$$

$$= A\left[W(t)Y(t) - \left[۰,\int_۰^t dW(s),\dots,\int_۰^t s^{n-۱}dW(s)\right]^T\right] = A\lambda_i, i = ۰,۱,\dots$$

$$\varphi_i = t^iW(t) - \int_۰^t s^{i-۱}W(s)ds, i = ۰,۱,\dots,N$$

$$\varphi_i = t^iW(t) - \frac{t^i}{۴}\left(۲\left(\frac{t}{۲}\right)^{i-۱}W\left(\frac{t}{۲}\right) + t^{i-۱}W(t)\right)$$

$$= \left[\left(۱-\frac{i}{۴}\right)W(t) - \frac{i}{۲}W\left(\frac{t}{۲}\right)\right]t^i.$$

$W(\frac{۱}{۲}), W(\frac{۱}{۴})$ مقادیر تقریبی برای $W(t), W(\frac{t}{۲})$ به ازای $t\epsilon[۰,۱]$ هستند. از این رو $A\varphi_i =$

$$A\Phi_s\begin{pmatrix}۱\\ t\\ \vdots\\ t^n\end{pmatrix}$$

$$\Phi_s = \begin{bmatrix} W(\frac{۱}{۲}) & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۴}W(\frac{۱}{۲}) - \frac{۱}{۲}W(\frac{۱}{۴}) & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & (۱-\frac{N}{۴})W(\frac{۱}{۲}) - \frac{N}{۲^N}W(\frac{۱}{۴}) \end{bmatrix}$$

$A\varphi_i = A\Phi_sT_n(t) = A\Phi_sA^{-۱}LG(t) = P_sLG(t) \Rightarrow \int_۰^t X(s)dW(s) =$
$\int_۰^t X^TLG(s)dW(s) = X^TP_sLG(t); i = ۰,۱,...,N$
$\int_۰^t k(t,s)X(s)dB(s) = \int_۰^t LG^T(t)KLG(s)LG^T(s)XdB(s) =$
$LG^T(t)K\hat{X}\int_۰^t LG(s)LG^T(s)dB(s) = LG^T(t)K\hat{X}P_sLG(t)$

□

۳ شرح روش

در بخش‌های پیشین، به منظور تحلیل فرایند تصادفی $X(t)$ و هسته $k(s,t)$، از روش تقریب با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندرانتقال یافته بهره گرفته شد. در این راستا، فرایند $X(t)$ با بردار ضرایبX و هسته $k(s,t)$ با ماتریس تبدیل K متناظر شده‌اند که این ضرایب و ماتریس، مؤلفه‌های بسط این توابع بر حسب پایه‌ی چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته را در بر می‌گیرند. این نمایش جبری امکان مطالعه و تحلیل کارآمدتر ویژگی‌های فرایند تصادفی و ساختار هسته را فراهم می‌سازد. با جایگزاری در روابط ۱ و ۲

$$X^T LG(t) = f(t) + \lambda_1 X^T A\Psi E^T LG(t) + \lambda_2 LG^T(t) K\hat{X} P_s LG(t)$$

با اعمال روش هم‌مکانی و انتخاب نقاط هم‌محلی به صورت $t_i = \frac{2i+1}{2(n+1)}; i = 0, 1, ..., n$ مسئله مورد بررسی به یک سیستم جبری خطی با ابعاد $(n+1) \times (n+1)$ تبدیل می‌گردد. این سیستم معادلات خطی، که در این نقاط هم‌محلی برقرار است، ارتباط بین ضرایب بسط توابع مجهول و معلوم را تعیین نموده و امکان حل عددی مسئله را فراهم می‌سازد.

$$X^T LG(t_i) = f(t) + \lambda_1 X^T A\Psi E^T LG(t_i) + \lambda_2 LG^T(t_i) K\hat{X} P_s LG(t_i) \qquad (3)$$

۴ آنالیز خطا

با در نظر گرفتن معادله انتگرال ایتو–ولترا منفرد از نوع آبل ۱ و فرض اینکه $X_n(t)$ جواب تقریبی حاصل از روش چندجمله‌ای لژاندر انتقال‌یافته باشد، علاوه بر این، داریم

$$X(t) = f(t) + \lambda_1 \int_0^t \frac{X(s)}{(t-s)^\alpha} ds + \lambda_2 \int_0^t k(s,t) X(s) dB(s),$$

$$X_n(t) = f(t) + \lambda_1 \int_0^t \frac{X_n(s)}{(t-s)^\alpha} ds + \lambda_2 \int_0^t k_n(s,t) X_n(s) dB(s),$$

$$e_n(t) = X(t) - X_n(t) =$$

$$\lambda_1 \int_0^t \frac{X(s) - X_n(s)}{(t-s)^\alpha} ds + \lambda_2 \int_0^t \left(k(s,t)X(s) - k_n(s,t)X_n(s)\right) dB(s);$$

$$\lambda_1 \left(X(\varepsilon) - X_n(\varepsilon)\right) \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds = \frac{\lambda_1 (X(\varepsilon) - X_n(\varepsilon))}{1-\alpha} t^{(1-\alpha)}$$

قضیه ۱.۴. یک تابع پیوسته و h تابعی انتگرال پذیر باشد که در بازه $[r,m]$ تغییر علامت نمیدهد آنگاه $\varepsilon \epsilon [r,m]$ وجود دارد که $\int_r^m g(x)h(x)dx = g(\varepsilon) \int_r^m h(x)dx$ [۸]

آنگاه

t_i	$Exact(n=۶)$	$Approx(n=۶)$	$Exact(n=۱۲)$	$Approx(n=۱۲)$
۰	۰/۰۸۳۳۳۴	۰/۰۶۰۹۷۱۲	۰/۰۸۳۳۳۴	۰/۰۲۵۰۷۴۰
۰/۱	۰/۰۷۸۲۳۳	۰/۰۵۷۶۹۵	۰/۰۴۴۳	۰/۰۲۱۶۹۴۱
۰/۲	۰/۰۷۶۱۸۴۰	۰/۰۵۴۳۵۹۴	۰/۰۳۴۱	۰/۰۱۸۵۳۵۴
۰/۳	۰/۰۷۴۶۹۷	۰/۰۵۱۳۵۵۷	۰/۰۲۶۶	۰/۰۱۵۶۳۶۹
۰/۴	۰/۰۷۳۴۳۰۶	۰/۰۴۸۹۳۷۸	۰/۰۲۲۸	۰/۰۱۳۰۵۳۰
۰/۵	۰/۰۷۲۳۴۳۱	۰/۰۴۷۱۸۸۱۴	۰/۰۲۰۶	۰/۰۱۰۸۳۳۹
۰/۶	۰/۰۷۱۳۵۸۹	۰/۰۴۵۹۸۵۵	۰/۰۱۹۵	۰/۰۰۸۹۶۱۱
۰/۷	۰/۰۷۰۴۹۴۸	۰/۰۴۴۹۷۲۶۴	۰/۰۳۲۰	۰/۰۰۷۱۶۲۱۲
۰/۸	۰/۰۶۹۶۹۰۶۷	۰/۰۴۳۵۲۱۷۷	۰/۰۱۶۵	۰/۰۰۴۴۴۲۵۱
۰/۹	۰/۰۶۸۹۳۴۳۷	۰/۰۴۰۷۰۰۹	۰/۰۱۴۰	۰/۰۰۱۹۸۳۱۴

$$\|k(t,s)-k_n(t,s)\|\le M_۱,\qquad \hat{K}=\sup_{(t,s)}\left\|\frac{\partial^{۲n}k(t,s)}{\partial t^n\partial s^N}\right\|_{L^۲}\le M_۲$$

$$\| e_n(t)\|\le|\lambda_۱|\,\|\frac{X(\varepsilon)-X_n(\varepsilon)}{۱-\alpha}\mid t^{(۱-\alpha)}+\mid\lambda_۲\mid\|B(t)\|$$

$$(\lambda(n)\| e_n(t)\|+M_۲\| e_n(t)\|+M_۱\lambda(n))\Rightarrow$$

$$\| e_n(t)\|\le\frac{\lambda_۱\,\|\frac{X(\varepsilon)-X_n(\varepsilon)}{۱-\alpha}\mid t^{(۱-\alpha)}+\mid\lambda_۲\mid\|B(t)\|M_۱\lambda(n)}{۱-\mid\lambda_۲\mid\|B(t)\|(\lambda(n)+M_۲)};$$

$$\| e_n(t)\|=E(\mid e_n(t)\mid^۲)\Rightarrow E(\mid e_n(t)\mid^۲)\to ۰$$

از این رو همگرایی برقرار می گردد.

۵ مثال های عددی

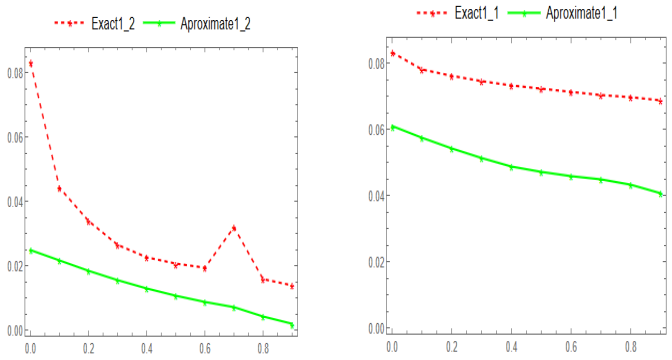
مثال ۱.۵. انتگرال ایتوـ ولترا منفرد ضعیف زیر را در نظر میگیریم :

$$X(t)=\frac{۱}{۱۲}-\int_۰^t\frac{۱}{\sqrt{t-s}}X(s)ds-\int_۰^t sin(s)X(s)dB(s);\quad t\epsilon[۰,۱]$$

جواب دقیق مساله به صورت زیر است و سپس در جدول و نمودارهای ترسیم شده مقادیر دقیق و تقریبی برای معادله انتگرال به ازای $n=۶,۱۲$ مورد بررسی قرار گرفته است.

$$X(t)=\frac{۱}{۱۲}exp\left(-\frac{t}{۴}+\frac{sin(۲t)}{۸}-۲\sqrt{t}-\int_۰^t sin(s)X(s)dB(s)\right)$$

مثال ۲.۵. انتگرال ایتوـ ولترا منفرد ضعیف زیر را در نظر میگیریم :



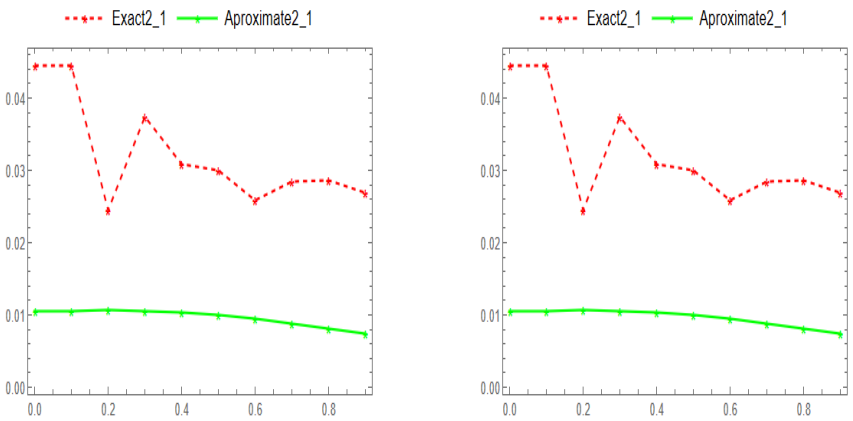
شکل ۱: نمودار سمت راست $n = ۶$ و نمودار سمت چپ $n = ۱۲$

t_i	$Exact(n = ۶)$	$Approx(n = ۶)$	$Exact(n = ۱۲)$	$Approx(n = ۱۲)$
۰	۰/۰۴۴۴۳۴۵۵	۰/۰۱۰۴۵۰۸۷	۰/۰۴۴۴۳۴۵	۰/۰۲۰۳۳
۰/۱	۰/۰۴۴۵۵۲۶۹	۰/۰۱۰۶۰۱۵۳	۰/۰۴۴۵۵۲۶۹	۰/۰۲۰۳۴۳
۰/۲	۰/۰۲۴۴۱۷۷۲۰	۰/۰۱۰۶۵۸۲۳	۰/۰۲۴۴۱۷۷	۰/۰۲۰۳۵۱
۰/۳	۰/۰۳۷۵۰۳۵۳۱	۰/۰۱۰۵۷۹۹۳	۰/۰۳۷۵۰۳۵	۰/۰۲۰۳۱۹۹
۰/۴	۰/۰۳۰۸۹۱۹۲۷۹۱	۰/۰۱۰۳۴۴۰۰	۰/۰۳۰۸۹۱۹۲	۰/۰۲۰۱۷۴۸
۰/۵	۰/۰۲۹۹۹۴۹۷۶	۰/۰۰۹۹۴۷۹۹	۰/۰۲۹۹۹۴۹۷	۰/۰۱۹۷۸۰
۰/۶	۰/۰۲۵۸۳۸۲۶۷	۰/۰۰۹۴۱۱۱۳۸	۰/۰۲۵۸۳۸۲۶	۰/۰۱۸۹۱۳
۰/۷	۰/۰۲۸۴۶۶۲۳۷	۰/۰۰۸۷۷۵۲۸۲	۰/۰۲۸۴۶۶۲۳	۰/۰۱۷۲۴۳
۰/۸	۰/۰۲۸۵۵۶۶۲۴	۰/۰۰۸۱۰۵۵۰۱۷	۰/۰۲۸۴۶۶۲۳	۰/۰۱۴۳۵۲
۰/۹	۰/۰۲۶۹۲۵۶۸۰۹	۰/۰۰۷۴۹۰۲۲۸۷	۰/۰۲۸۵۵۶۶۲	۰/۰۰۹۸۶۴۵

$$X(t) = \frac{۱}{۲۴} - \int_{۰}^{t} \frac{۱}{\sqrt{t-s}} X(s)ds - \int_{۰}^{t} (s+۴)\sqrt{cos(s)}X(s)dB(s); \quad t\epsilon[۰, ۱]$$

جواب دقیق مساله به صورت زیر است و سپس در جدول و نمودارهای ترسیم شده مقادیر دقیق و تقریبی برای معادله انتگرال به ازای $n = ۶, ۱۲$ مورد بررسی قرار گرفته است.

$$X(t) = \frac{۱}{۲۴} exp\left(-۲\sqrt{t} - \frac{۱}{۲}(t^{۲} + ۸t + ۱۴)sin(t) - (t+۴)cos(t) + ۴ - \int_{۰}^{t} (s+۴)\sqrt{cos(s)}X(s)dB(



شکل ۲: نمودار سمت راست $n = ۶$ و نمودار سمت چپ $n = ۱۲$

۶ نتیجه گیری

در این پژوهش، روشی مبتنی بر تقریب چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته و ماتریس‌های عملیاتی برای حل عددی معادلات انتگرال تصادفی منفرد نوع آبل به کار گرفته شد. ارزیابی‌های عددی با استفاده از $Mathematica$ و بررسی نتایج برای درجات تقریب $n = ۶, ۱۲$ صورت پذیرفت. تحلیل نظری نیز جنبه‌های همگرایی این رویکرد را مورد مطالعه قرار داد. این بررسی، کاربرد روش ماتریس‌های عملیاتی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته را در حل این دسته از معادلات نشان می‌دهد.

مراجع

[1] W.M. Visscher , A.S. Goldman , Estimating the distribution of spherical particles from plane sections: an optimal algorithm for solution of the Abel integral equation, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 4 (2) (1983) 280–290 .

[2] M. Khodabin, K. Maleknejad, M. Rostami, and M. Nouri. (2012). Interpolation solution in generalized stochastic exponential population growth model. Applied Mathematical Modelling, 36(3), 1023–1033.

[3] Q. Chen and N. Wong, "A Stochastic Integral Equation Method for Resistance Extraction of Conductors with Random Rough Surfaces," 1 in 2006 International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems (ISPACS2006), Tottori, Japan, 2006, pp.

[4] F. Gakhov, Boundary value problems. International series of monographs in pure and applied mathematics, vol. 85, 1966.

[5] N.SamadyarandF.Mirzaee,OrthonormalBernoullipolynomialscollocationapproachforso stochastic I ˆ to- Volterra integral equations of Abel type, Int. J.Numer. Model. 33 (2020), e2688.

[6] S.A. Yousefi, Numerical solution of Abel's integral equation by using Legendre wavelets, Appl. Math. Comput. 175 (1) (2006) 574–580. 1

[7] H.D. Azodi, Using shifted Legendre scaling functions for solving fractional biochemical reaction problem, Caspian J. Math.Sci. 7(1) 2018, 88-101.

[8] W.Rudin Principles of Mathematical Analysis. 3rd ed. New York (NY): McGraw-Hill Book Company; 1976.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

حل عددی خطی معادلات انتگرال با هسته تکین بر پایه چندجمله‌ای‌های برنشتاین

آتنا غیاثی [۱]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور تهران- ایران

چکیده

در این پژوهش، یک روش عددی کارآمد بر مبنای چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعارف برای تقریب حل معادلات انتگرال ولترا-آبل معرفی شده است. این روش با تبدیل مسئله انتگرالی به یک دستگاه معادلات جبری خطی ساده، امکان دستیابی به حل‌های تقریبی دقیق برای معادلات با هسته‌های تکین و دارای تکینگی ضعیف را فراهم می‌آورد. یافته‌های این مطالعه مؤید آن است که روش پیشنهادی، ابزاری مؤثر و کارآمد در حل این دسته از مسائل حائز اهمیت در زمینه‌های علوم و مهندسی به شمار می‌رود.

کلمات کلیدی: معادله انتگرالی آبِل- ولترا، چندجمله‌ای‌های برنشتاین، معادله انتگرالی، انتگرال با هسته تکین و هسته تکین ضعیف.

۱ مقدمه

معادلات انتگرالی تکین، به واسطه نقش محوری خود در تبیین و مدل‌سازی پدیده‌های گوناگون علمی و مهندسی، همواره در کانون توجه پژوهشگران قرار داشته‌اند. گستره کاربردهای این معادلات از تحلیل رفتارهای الاستیک و ویسکوالاستیک مواد گرفته تا مطالعه جریان‌های هیدرودینامیکی، بر اهمیت یافتن روش‌های کارآمد برای حل آن‌ها می‌افزاید. چالش اساسی در مواجهه با این دسته از معادلات، ماهیت پیچیده و اغلب غیرقابل دسترس بودن حل‌های تحلیلی آن‌هاست. این امر، ضرورت توسعه رویکردهای عددی نوآورانه و دقیق را بیش از پیش نمایان می‌سازد.

در طول تاریخچه پژوهش در این حوزه، تلاش‌های متعددی به منظور غلبه بر این چالش صورت گرفته است. محققان با به‌کارگیری ابزارهای متنوع ریاضی، از جمله سری‌های توانی، روش‌های گوناگون همانند روش هم‌محلی که [۱] در به آن اشاره کرده است، و روش‌هایی مبتنی بر چندجمله‌ای‌ها و موجک‌ها در [۲] اسدزاده آن را بیان کرده است، و نیز با بهره‌گیری از تکنیک‌های تبدیل انتگرالی و فرمول‌های جمع‌بندی، سعی در ارائه تقریب‌های قابل اعتماد برای حل این معادلات داشته‌اند. هر یک از این روش‌ها، با ویژگی‌ها و محدودیت‌های خاص خود، در حل دسته‌ای از مسائل موفقیت‌هایی را به همراه داشته‌اند.

[1] Ghiasi.atena@pnu.ac.ir

در این میان، چندجمله‌ای‌های برنولی که میرزایی و صمدیار در [۳] به کاربرد آن‌ها پرداخته‌اند، به عنوان یک ابزار قدرتمند در تحلیل و حل مسائل مختلف ریاضی، از جمله معادلات انتگرالی، جایگاه ویژه‌ای یافته‌اند. ویژگی‌های منحصر به فرد این چندجمله‌ای‌ها، از جمله سادگی ساختار و قابلیت تقریب توابع مختلف با دقت مناسب، آن‌ها را به گزینه‌ای جذاب برای توسعه روش‌های عددی تبدیل کرده است.

میرزایی یک روش عددی کارآمد بر پایه چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعارف در [۴] برای حل معادلات انتگرالی ارائه کرده است. در این پژوهش نیز، نوآوری کلیدی در استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعارف برای تبدیل مسئله معادله انتگرالی با هسته تکین به یک سیستم جبری خطی ساده است. این تبدیل، امکان محاسبه حل‌های تقریبی با دقت بهتر را فراهم می‌سازد. همچنین، با اعمال فرضیاتی ساختاری بر هسته تکین، از مشکلات ناشی از تکینگی اجتناب شده است. ارزیابی کارایی روش پیشنهادی از طریق بررسی مثال‌های عددی و مقایسه نتایج با روش‌های موجود، نشان می‌دهد که روش برنشتاین متعارف با ارائه تقریب‌های همگرا به حل دقیق، عملکردی برتر دارد. سهولت پیاده‌سازی محاسباتی در محیط‌هایی مانند $MATHEMATICA$ و تحلیل همگرایی روش، پتانسیل بالای آن را در حل مسائل کاربردی با این نوع معادلات انتگرالی آشکار می‌سازد.

بسیاری از معادلات انتگرالی تکین دارای حل تحلیلی بسیار پیچیده‌ای هستند که استفاده از آن‌ها را دشوار می‌سازد. از این رو روش‌های عددی زیادی برای حل معادلات انتگرالی تکین ضعیف، به ویژه معادلات انتگرالی ولترا با هسته از نوع آبل، توسعه یافته‌اند.

در این مقاله، چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای ساختن حل تقریبی معادلات انتگرالی با هسته تکین و تکین ضعیف پیشنهاد شده‌اند. این معادلات به‌صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$U(t) = U_{\cdot} + \int_a^t K(t,s)U(s)\,ds \qquad (۱)$$

برای نمایش توابع معلوم پیوسته در بازه $[a,b]$ از $U_{\cdot}$ و تابع مجهول تعریف شده در $L^{۲}[a,b]$ از $U(t)$ و تابع هسته تکین یا تکین ضعیف از $K(t,s)$ استفاده می‌شوند، توجه کنید که هسته داده شده به شکل زیر است:

$$k(t,s) = \frac{۱}{(t-s)^{\alpha}}, \quad ۰ < \alpha < ۱$$

ساختار این مقاله به این شرح است: در بخش ۲، چندجمله‌ای برنشتاین و برخی تعاریف لازم ذکر می شود.در بخش ۳ روش پیشنهادی ارائه می گردد. بخش‌های ۴ تحلیل همگرایی روش پیشنهادی بیان می شود. در بخش ۵، روش پیشنهادی برای حل چند مثال مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بخش پایانی، نتایج به دست آمده را عنوان می کنیم

۲ تعاریف و مقدمات

تعریف ۱.۲. چندجمله‌ای‌های برنشتاین

چند جمله ای های پایه برنشتاین از درجه n یک مبنای کامل را در بازه $[۰, ۱]$ تشکیل می دهند و به صورت زیر معرفی می شوند.

$$B_{j,n}(t) = \binom{n}{j} t^j (۱-t)^{n-j}; \quad j = ۰, ۱, ..., n \qquad (۲)$$

جایی که t یک پارامتر است. با این حال، چندجمله‌ای‌های برنشتاین را می‌توان تا یک بازه دلخواه $[a, b]$ تعمیم داد. با نرمال کردن t در بازه $[a, b]$، یعنی $t = \frac{x-a}{b-a}$ رابطه جدیدی می توان از چندجمله ای های برنشتاین ایجاد کرد

$$B_{j,n}(x) = \binom{n}{j} \frac{(x-a)^j (b-x)^{n-j}}{(b-a)^n}; \quad j = ۰, ۱, ..., n \qquad (۳)$$

این چند جمله ای ها طبق تساوی $B_{j,n}(x) = B_{n-j,n}(۱-x)$، $B_{j,n}(x) \geq ۰$ متقارن و نیز دنباله مثبت می باشند در بازه $[a, b]$ سری واحدی به صورت $\sum_{j=۰}^{n} B_{j,n}(x) = ۱$ را تشکیل می دهند. علاوه بر این، دارای خواص مفید دیگر نیز می باشند.

تعریف ۲.۲. چند جمله ای های متعارف برنشتاین

پس از اعمال فرآیند گرم‌ـاشمیت بر روی مجموعه هایی از چند جمله ای های برنشتاین از درجه های مختلف n و سپس با تجزیه و تحلیل این چندجمله ای ها نمایش صریحی از چندجمله ای های متعارف برنشتاین، که در اینجا با $(\phi_{j,n}(t))$ نشان داده می شود، حاصل می گردد . به عنوان مثال، برای $n = ۸$، $\phi_{j,۸}(t)$ با ساده کردن توابع حاصل، مجموعه چندجمله ای های متعامد زیر را بدست می آوریم.

$$\phi_{۰,۸}(t) = \sqrt{۱۷} - ۸\sqrt{۱۷}t + ۲۸\sqrt{۱۷}t^۲ - ۵۶\sqrt{۱۷}t^۳ + ۷۰\sqrt{۱۷}t^۴ - ۵۶\sqrt{۱۷}t^۵ + ۲۸\sqrt{۱۷}t^۶ - ۸\sqrt{۱۷}t^۷ + \sqrt{۱۷}t^۸$$

$$\phi_{۱,۸}(t) = -\sqrt{۱۵} + ۲۴\sqrt{۱۵}t - ۱۴۰\sqrt{۱۵}t^۲ + ۳۹۲\sqrt{۱۵}t^۳ - ۶۳۰\sqrt{۱۵}t^۴ + ۶۱۶\sqrt{۱۵}t^۵ - ۳۶۴\sqrt{۱۵}t^۶ + ۱۲۰\sqrt{۱۵}t^۷ - ۱۷\sqrt{۱۵}t^۸$$

$$\phi_{۲,۸}(t) = \sqrt{۱۳} - ۳۸\sqrt{۱۳}t + ۳۴۳\sqrt{۱۳}t^۲ - ۱۳۱۶\sqrt{۱۳}t^۳ + ۲۶۹۵\sqrt{۱۳}t^۴ - ۳۲۰۶\sqrt{۱۳}t^۵ + ۲۲۳۳\sqrt{۱۳}t^۶ - ۸۴۸\sqrt{۱۳}t^۷ + ۱۳۶\sqrt{۱۳}t^۸$$

$$\phi_{۳,۸}(t) = -\sqrt{۱۱} + ۵۰\sqrt{۱۱}t - ۵۹۵\sqrt{۱۱}t^۲ + ۲۹۴۰\sqrt{۱۱}t^۳ - ۷۴۵۵\sqrt{۱۱}t^۴ + ۱۰۶۲۶\sqrt{۱۱}t^۵ - ۸۶۴۵\sqrt{۱۱}t^۶ + ۳۷۶۰\sqrt{۱۱}t^۷ - ۶۸۰\sqrt{۱۱}t^۸$$

$$\phi_{۴,۸}(t) = ۳ - ۱۸۰t + ۲۵۸۰t^۲ - ۱۵۳۰۰t^۳ + ۴۶۰۳۵t^۴ - ۷۶۶۰۸t^۵ + ۷۱۶۱۰t^۶ - ۳۵۲۸۰t^۷ + ۷۱۴۰t^۸$$

$$\phi_{۵,۸}(t) = -\sqrt{۷} + ۶۸\sqrt{۷}t - ۱۱۰۸\sqrt{۷}t^۲ + ۷۴۷۶\sqrt{۷}t^۳ - ۲۵۵۴۵\sqrt{۷}t^۴ + ۴۸۰۴۸\sqrt{۷}t^۵ - ۵۰۴۱۴\sqrt{۷}t^۶ + ۲۷۶۶۴\sqrt{۷}t^۷ - ۶۱۸۸\sqrt{۷}t^۸$$

$$\phi_{۶,۸}(t) = \sqrt{۵} - ۷۴\sqrt{۵}t + ۱۳۱۵\sqrt{۵}t^۲ - ۹۶۹۲\sqrt{۵}t^۳ + ۳۶۲۰۵\sqrt{۵}t^۴ - ۷۴۴۳۸\sqrt{۵}t^۵ + ۸۵۲۶۷\sqrt{۵}t^۶ - ۵۰۹۶۰\sqrt{۵}t^۷ + ۱۲۳۷۶\sqrt{۵}t^۸$$

$$\phi_{۷,۸}(t) = -\sqrt{۳} + ۷۸\sqrt{۳}t - ۱۴۶۳\sqrt{۳}t^۲ + ۱۱۳۹۶\sqrt{۳}t^۳ - ۴۵۰۴۵\sqrt{۳}t^۴ + ۹۸۰۹۸\sqrt{۳}t^۵ - ۱۱۹۱۱۹\sqrt{۳}t^۶ + ۷۵۵۰۴\sqrt{۳}t^۷ - ۱۹۴۴۸\sqrt{۳}t^۸$$

$$\phi_{۸,۸}(t) = ۱ - ۸۰t + ۱۵۴۰t^۲ - ۱۲۳۲۰t^۳ + ۵۰۰۵۰t^۴ - ۱۱۲۱۱۲t^۵ + ۱۴۰۱۴۰t^۶ - ۹۱۵۲۰t^۷ + ۲۴۳۱۰t^۸$$

با تجزیه و تحلیل ضرایب دوجمله‌ای موجود در مثلث پاسکال، می‌توان الگویی را شناسایی و بر اساس آن، نمایش صریحی برای چندجمله‌ای‌های متعامد برنشتاین تعیین نمود. این الگو امکان استخراج فرمول کلی برای $\phi_{j,n}(t)$ را فراهم می‌سازد.

$$\phi_{j,n}(t) = \sqrt{۲\,(n-j)+۱}\,(۱-t)^{n-j} \sum_{k=۰}^{j} (-۱)^k \begin{pmatrix} ۲n+۱-k \\ j-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} t^{j-k} \quad (۴)$$

که بدین ترتیب، رابطه‌ای ساده و کارآمد برای تولید چندجمله‌ای‌های متعامد برنشتاین در بازه $[۰, ۱]$ حاصل می‌گردد.[۶]

$$\Phi(t) = [\phi_{۰,n}(t), \phi_{۱,n}(t), ..., \phi_{n,n}(t)]^T$$

۳ شرح روش

در این بخش، یک رویکرد عددی با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای حل معادلات انتگرالی با هسته‌های تکین (معادله (۱)) را بررسی خواهیم کرد. بدین منظور، فرض می‌کنیم:

$$U_n(t) = U^T \Phi(t) \quad (۵)$$

در این روش، حل تقریبی به صورت یک چندجمله‌ای از درجهnدر نظر گرفته می‌شود. در این نمایش،Uیک بردار مجهول با ابعاد $(n+۱) \times ۱$است و $\Phi(t)$ بردار پایه برنشتاین متعارف با ابعاد

$(n+۱) \times ۱$ است که جزئیات آن در معادله (۴) ارائه شده است. با جایگذاری این تقریب در معادله (۱)، رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$U^T\Phi(t) = U_{\cdot} + \int_a^t K(t,s)(U^T\Phi(s))ds \qquad (۶)$$

بنابراین داریم

$$U^T\Phi(t) - U^T \int_a^t K(t,s)\Phi(s)ds = U_{\cdot} \qquad (۷)$$

فرض بر این است

$$\alpha(t) = \int_a^t K(t,s)\Phi(s)ds \qquad (۸)$$

با جایگذاری معادله (۸) در معادله (۷) ، به دست می‌آوریم

$$U^T[\Phi(t) - \alpha(t)] - U_{\cdot} = ۰ \qquad (۹)$$

در گام نخست، با محاسبه انتگرال در معادله (۸)، تابع $\alpha(t)$ استخراج می‌گردد. سپس، با تجمیع ضرایب بردار مجهول U در معادله (۱۰) و متعاقباً، همسنجی ضرایب توان‌های یکسان متغیر U در دو سوی معادله حاصل، یک رابطه بازگشتی برای تعیین عناصر از بردار $u_j, j = ۰, ..., n$ حاصل می‌شود. با حل این رابطه بازگشتی، مقادیر u_j به طور یکتا تعیین می‌گردند. در نهایت، با جایگذاری این ضرایب مشخص‌شده در عبارت (۵)، شکل نهایی حل تقریبی سری به دست می‌آید.

۴ همگرایی

در این پژوهش، از نمایش چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعارف به فرم $U_n(t) = U^T\Phi(t)$ به منظور حل معادلات انتگرالی با هسته‌های تکین یا ضعیفاً تکین بهره گرفته می‌شود. برای ارزیابی دقیق‌تر روش، در هر مثال، دو حالت با درجات $n = ۴$ و $n = ۸$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. صحت و کارایی روش پیشنهادی از طریق مقایسه نتایج عددی با جواب تحلیلی و محاسبه خطای مطلق مورد تأیید قرار می‌گیرد.بر اساس نتایج حاصل از مثال‌های عددی، دنباله تقریبی $U_n(t)$ با افزایش درجه چندجمله‌ای‌ها n به حل دقیق $U(t)$ میل می‌کند. با فرض اینکه جواب دقیق $U(t)$ در فضای $L^۲[۰,t]$ قرار دارد و $U_n(t)$ بر اساس توابع پایه متعامد (۴) ساخته شده است، می‌توان نتیجه گرفت که ساختار همگرایی این دنباله با ساختار ارائه شده در مرجع [۵] مشابه است و رابطه زیر برقرار می‌باشد: (۴)

$$\lim_{n\to\infty} \|U(t) - U_n(t)\|_۲ = ۰ \qquad (۱۰)$$

این امر نشان‌دهنده همگرایی روش پیشنهادی به جواب دقیق با افزایش درجه چندجمله‌ای‌های برنشتاین است.

۵ مثال های عددی

مثال ۱.۵. معادله انتگرال آبِل نوع اول را در نظر بگیرید

$$\int_0^t \frac{U(s)}{\sqrt{t-s}}ds = \frac{۲}{۱۰۵}\sqrt{t}(۱۰۵ - ۵۶t^۲ + ۴۸t^۳), \quad ۰ \le t \le ۱$$

با فرض اینکه جواب دقیق $U(t) = t^۳ - t^۲ + ۱$ باشد. با در نظر گرفتن روش پیشنهادی برای $n = ۴$ و $n = ۸$ جواب تقریبی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_0^t \frac{\sum_{i=0}^{۸} u_i\phi_i(s)}{\sqrt{t-s}}\, ds = \frac{۲}{۱۰۵}\frac{(۱۰۵-۵۶t^۲+۴۸t^۳)}{\sqrt{t}}$$

طبق خاصیت خطی بودن برای $n = ۴$ و سپس طبق رابطه (۸) داریم:

$$\sum_{i=0}^{۴} u_i \int_0^t \frac{\phi_i(s)}{\sqrt{t-s}}\, ds = \frac{۲}{۱۰۵}\frac{(۱۰۵-۵۶t^۲+۴۸t^۳)}{\sqrt{t}}$$

$$\sum_{i=0}^{۴} \alpha_i(t) = \frac{۲}{۱۰۵}\frac{(۱۰۵-۵۶t^۲+۴۸t^۳)}{\sqrt{t}}$$
$$\alpha_i(t) = \int_0^t \frac{\phi_i(s)}{\sqrt{t-s}}\, ds; \qquad i = ۰, ..., n$$
$$\alpha_۰(t) = ۳ - ۱۲t + ۱۸t^۲ - ۱۲t^۳ + ۳t^۴$$
$$\alpha_۱(t) = -\sqrt{۷} + ۱۲\sqrt{۷}t - ۳۰\sqrt{۷}t^۲ + ۲۸\alpha_۲(t) = \sqrt{۷}t^۳ - ۹\sqrt{۷}t^۴$$
$$\alpha_۳(t) = \sqrt{۵} - ۱۸\sqrt{۵}t + ۶۹\sqrt{۵}t^۲ - ۸۸\sqrt{۵}t^۳ + ۳۶\sqrt{۵}t^۴$$
$$\alpha_۴(t) = -\sqrt{۳} + ۲۲\sqrt{۳}t - ۱۰۵\sqrt{۳}t^۲ + ۱۶۸\sqrt{۳}t^۳ - ۸۴\sqrt{۳}t^۴$$
$$\alpha_۵(t) = ۱ - ۲۴t + ۱۲۶t^۲ - ۲۲۴t^۳ + ۱۲۶t^۴$$
$$C^T = [۰/۸۶۹۴۴۶۱۱۱۱۱۱, ۰/۹۹۲۶۹۷ \times ۱۰^{-۳۰}, ۰/۴, ۱, ۰] \Rightarrow$$
$$U_۴(t) = ۱ + ۱/۷۲۵۸۹۱۸ \times ۱۰^{-۳۰}t + t^۲ - t^۳$$

برای $n = ۸$ و طبق رابطه ۸ نیز داریم:

$$\sum_{i=0}^{۸} u_i \int_0^t \frac{\phi_i(s)}{\sqrt{t-s}}\, ds = \frac{۲}{۱۰۵}\frac{(۱۰۵-۵۶t^۲+۴۸t^۳)}{\sqrt{t}}$$

$$\sum_{i=0}^{۸} \alpha_i(t) = \frac{۲}{۱۰۵}\frac{(۱۰۵-۵۶t^۲+۴۸t^۳)}{\sqrt{t}}$$

$\alpha_i(t)$ های مربوطه را مانند حالت $n = ۴$ محاسبه می کنیم و ضرایب و چندجمله ای به صورت زیر برآورد می شود

$$U^T = [۰/۸۶۹۴۴۶۱۱۱۱۱۱, ۰/۹۸۷۴۳۲۱ \times ۱۰^{-۳۰}, ۰/۴, ۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰] \Rightarrow$$
$$U_۴(t) = ۱ + ۱/۷۳۸۹۴۲۳۱ \times ۱۰^{-۳۰}t + t^۲ - t^۳$$

مثال ۲.۵. معادله انتگرال آبِل نوع دوم را در نظر بگیرید

t_i	$Present(n=۴)$	$Present(n=۸)$
۰	۰	۰
۰/۱	$۱/۷۲۵۸۹۱۸ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۱/۷۳۸۹۴۲۳۱ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۲	$۳/۴۵۱۷۸ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۳/۴۷۷۸۸ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۳	$۱/۰۳۵۵۴ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۵/۲۱۶۸۳ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۴	$۱/۰۳۵۵۴ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۶/۹۵۵۷۷ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۵	$۲/۰۷۱۰۷ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۸/۶۹۴۷۱ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۶	$۱/۲۴۲۶۴ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۱۰/۴۳۳۷ \times ۱۰^{-۳۵}$
۰/۷	$۸/۶۹۸۴۹ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۱۲/۱۷۲۶ \times ۱۰^{-۳۵}$
۰/۸	$۶/۹۵۸۸ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۱۳/۹۱۱۵ \times ۱۰^{-۳۵}$
۰/۹	$۶/۲۶۲۹۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۱۵/۶۵۰۵ \times ۱۰^{-۳۵}$
۱	$۱/۷۲۵۸۹۱۸ \times ۱۰^{-۳۳}$	$۱/۷۳۸۹۴۲۳۱ \times ۱۰^{-۳۳}$

$Error$	$present(n=۴)$	$(n=۴)$ [۶]	$present(n=۸)$	$(n=۸)$ [۶]
	$۱/۷۲۵۸۹۱۸ \times ۱۰^{-۳۳}$	$۱/۵۲۵۸۹۱۸ \times ۱۰^{-۳۳}$	$۱/۷۳۸۹۴۲۳۱ \times ۱۰^{-۳۳}$	$۱/۵۰۰۰۰ \times ۱۰^{-۳۳}$

$$U(t) = t^{۲} + \frac{۱۶}{۱۵}t^{\frac{۵}{۲}} - \int U(s)\frac{ds}{\sqrt{t-s}}$$

با توجه به اینکه حل دقیق برابر است با $U(t) = t^{۲}$ با استفاده از روش پیشنهادی برای $n = ۴$ و $n = ۸$، حل تقریبی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=۰}^{n} u_i\phi_i(s) + \int_{۰}^{t} \frac{\sum_{i=۰}^{n} u_i\phi_i(s)}{\sqrt{t-s}}\, ds = t^{۲} + \frac{۱۶}{۱۵}t^{\frac{۵}{۲}}$$

طبق خاصیت خطی بودن برای $n = ۴$ و سپس طبق رابطه (۸) داریم:

$$\sum_{i=۰}^{۴} u_i\phi_i(s) + \sum_{i=۰}^{۴} u_i \int_{۰}^{t} \frac{\phi_i(s)}{\sqrt{t-s}}\, ds = t^{۲} + \frac{۱۶}{۱۵}t^{\frac{۵}{۲}}$$

$$\sum_{i=۰}^{۴} u_i(\phi_i(t) + \alpha_i(t)) = t^{۲} + \frac{۱۶}{۱۵}t^{\frac{۵}{۲}}$$

$$U^T = [۰/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲, ۱/۰, ۱/۰, ۰, ۰, ۰]] \Rightarrow$$

$$U_۴(t) = t^{۲} - ۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$$

برای $n = ۸$ و طبق رابطه (۸) نیز داریم:

$$\sum_{i=۰}^{۸} u_i\phi_i(s) + \sum_{i=۰}^{۸} u_i \int_{۰}^{t} \frac{\phi_i(s)}{\sqrt{t-s}}\, ds = t^{۲} + \frac{۱۶}{۱۵}t^{\frac{۵}{۲}}$$

$$\sum_{i=۰}^{۸} u_i(\phi_i(t) + \alpha_i(t)) = t^{۲} + \frac{۱۶}{۱۵}t^{\frac{۵}{۲}}$$

$\alpha_i(t)$ های مربوطه را مانند حالت $n = ۴$ محاسبه می کنیم و ضرایب و چندجمله ای به صورت زیر برآورد می شود

$$U^T = [۰/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲, ۱/۰, ۱/۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰] \Rightarrow$$

$$U_۴(t) = t^۲ - ۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$$

t_i	$Present(n = ۴)$	$Present(n = ۸)$
۰	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۱	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۲	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۳	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۴	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۵	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۶	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۷	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۸	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$
۰/۹	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$
۱	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲۲ \times ۱۰^{-۳۴}$

$Error$	$present(n = ۴)$	$(n = ۴)$ [۶]	$present(n = ۸)$	$(n = ۸)$ [۶]
	$۴/۴۵\bar{۲} \times ۱۰^{-۳۴}$	$۳/۳۳۳۳۳۳۲۵۹ \times ۱۰^{-۳۴}$	$۴/۴۵\bar{۲} \times ۱۰^{-۳۴}$	$۳/۳۳۳۳۳۳۲۵۹ \times ۱۰^{-۳۴}$

۶ نتیجه گیری

بنابراین، پژوهش حاضر با به‌کارگیری روش چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعارف، راهکاری دقیق و کارآمد برای حل معادلات انتگرالی با هسته‌های تکین یا ضعیفاً تکین ارائه می‌دهد. مقایسه نتایج حاصل با مرجع [۶]، هم‌سویی قابل توجه پاسخ‌ها را نشان داده و بدین ترتیب، کارایی و دقت روش پیشنهادی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعارف را در حل این دسته از معادلات انتگرالی تأیید می‌کند. این یافته‌ها، پتانسیل روش مذکور را در تحلیل و حل مسائل مختلف مهندسی و علمی که با این نوع معادلات مدل‌سازی می‌شوند، آشکار می‌سازد.

مراجع

[1] Cai, H. A Fractional Spectral Collocation for Solving Second Kind Nonlinear Volterra Integral Equations with Weakly Singular Kernels, 1 J Sci Comput.(2019) 80, 1529–1548

[2] Asadzadeh, M. and Saray, B. N. (2022), *On a multiwavelet spectral element method for integral equation of a generalized Cauchy problem*, BIT Numer Math. 62, 1383–1416.

[3] Samadyar, N. and Mirzaee, F. (2020), Orthonormal Bernoulli polynomials collocation approach for solving stochastic Itô-Volterra integral equations of Abel type, J Numer Math. 28(1), 1–20.

[4] Mirzaee, F. and Samadyar, N. (2017), *Application of orthonormal Bernstein polynomials to construct a efficient scheme for solving fractional stochastic integro-differential 1 equation*, Int J Light Electron Opt. 134, 330–336.

[5] Momani S, Abu Arqub O, Maayah B. Piecewise Optimal Fractional Reproducing Kernel Solution and Convergence Analysis for the Atangana-Baleanu Caputo Model of the Lienard's Equation. Fractals. 2020; 28(8): 1–13.

[6] Shiralashetti, S.C., Kumbinarasaiah, S. and Mundewadi, R.A. (2019), *Bernoulli Wavelet Based Numerical Method for the Solution of Abel's Integral Equations*, Int J Eng Sci Math. 6(8), 63–70.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

طراحی و پیاده‌سازی سیستم مدیریت حافظه کش توزیع شده و خود ترمیم مبتنی بر Hashing Consistent بهبود یافته و پروتکل Gossip در معماری میکرو سرویس‌های بانکی

محمد همایون [۱] مهدی جلالوند [۲]

[۱] برنامه‌نویس در شرکت رایان پرداز کاوش

[۲] دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی، اهواز، ایران

چکیده

در معماری میکرو سرویس‌های بانکی، استفاده از Redis تک نسخه‌ای منجر به تک نقطه خرابی و تاخیر بالا می‌شود. در این پژوهش یک کش توزیع شده کاملاً بدون Master به نام GoshCache طراحی و پیاده‌سازی گردید که با ترکیب Jump Hash Consistent و Virtual Nodes، توزیع یکنواخت کلیدها را تضمین می‌کند و با پروتکل Gossip در کمتر از ۷۵۰ میلی ثانیه خرابی نودها را تشخیص و ترمیم می‌نماید. آزمایش‌ها روی خوشه ۱۲ نودی Kubernetes با بار ۵ میلیون کلید و ۱۰۰ هزار درخواست در ثانیه نشان داد تاخیر متوسط ۸/۱ میلی ثانیه، آپ‌تایم ۹۹/۹۹٪ و مصرف رم ۲۲٪ کمتر از Cluster Redis به دست آمد.

کلمات کلیدی: کلیدواژه‌ها: کش توزیع شده، پروتکل Gossip، خود ترمیم، میکرو سرویس، Cloud-Native

۱ مقدمه

در سال ۱۴۰۳ بیش از ۸۵٪ تراکنش‌های بانکی ایران از طریق میکرو سرویس انجام شد. مشکلات اصلی Redis تک نسخه‌ای: تک نقطه خرابی، تاخیر بالا در پیک، نیاز به Sentinel یا Cluster پیچیده. هدف این پژوهش ارائه جایگزین سبک، خود ترمیم و بدون هماهنگ کننده مرکزی است.

۲ مروری بر تحقیقات پیشین

سیستم‌های کش توزیع‌شده به‌عنوان بخش حیاتی در زیرساخت‌های داده‌ای مدرن، نقش مهمی در بهبود کارایی و مقیاس‌پذیری سرویس‌های تحت بار بالا ایفا می‌کنند. در سال‌های اخیر، راه‌حل‌های متعددی

[1] mohammad.homayoun1404.1@gmail.Com
[2] m.Jalalvand@scu.ac.ir

برای مدیریت کش توزیع‌شده ارائه شده‌اند که هر یک مزایا و معایب خاص خود را دارند. در این بخش، به بررسی برخی از مهم‌ترین این سیستم‌ها و اصول بنیادین آن‌ها پرداخته می‌شود.

۱.۲ سیستم‌های کش مبتنی بر معماری Master-Slave

رایج‌ترین مدل در سیستم‌های کش، معماری Master-Slave است که در آن یک گره به‌عنوان Master مسئول عملیات نوشتن و یک یا چند گره Slave مسئول تکثیر داده و سرویس‌دهی خواندن هستند. Redis Sentinel نمونهٔ بارز این دسته است. اگرچه این معماری ساده و قابل فهم است، اما دارای نقاط ضعف قابل توجهی می‌باشد:

- تأخیر در تشخیص خرابی: پروتکل‌های مبتنی بر رأی‌گیری مانند Sentinel ممکن است تا چند ثانیه برای تشخیص خرابی و ارتقاء Slave جدید زمان نیاز داشته باشند.
- پیچیدگی مدیریت: نگهداری و پیکربندی مجموعه‌ای از هاSentinel و گره‌های Redis نیازمند تخصص و نظارت مداوم است.

۲.۲ سیستم‌های کش توزیع‌شده کاملاً غیرمتمرکز

برای غلبه بر محدودیت‌های مدل Master-Slave، معماری‌های کاملاً غیرمتمرکز (Masterless) ظهور یافته‌اند. در این مدل، همه گره‌ها برابر هستند و داده به‌صورت افقی بین آن‌ها توزیع می‌شود. Redis Cluster و Ignite Apache از جمله این سیستم‌ها هستند.

Redis Cluster: داده‌ها را بین چندین گره (شارد) توزیع می‌کند و از پروتکل گوسیم برای کشف گره‌ها استفاده می‌نماید. با این حال، پیاده‌سازی آن از هش‌سازی سازگار ساده استفاده می‌کند که ممکن است منجر به توزیع نابرابر داده و نقاط داغ (Hotspots) شود. همچنین، فرآیند جابجایی داده (Resharding) در آن دستی و زمان‌بر است.

Apache Ignite: یک پلتفرم محاسباتی درون‌حافظه‌ای است که از الگوریتم‌های پیشرفته‌تری برای توزیع داده استفاده می‌کند، اما وزن اجرایی بالا و مصرف منابع زیاد آن، گزینه مناسبی برای سرویس‌های با تأخیر بسیار پایین مانند تراکنش‌های بانکی نیست.

۳.۲ الگوریتم‌های توزیع داده: هش‌سازی سازگار

پایه اصلی بسیاری از سیستم‌های کش توزیع‌شده، الگوریتم هش‌سازی سازگار (Consistent Hashing) است که نخستین بار توسط کارگر و همکاران در سال ۱۹۹۷ معرفی شد. این الگوریتم با قراردادن گره‌ها و کلیدها روی یک حلقه مجازی، میزان جابجایی داده را هنگام اضافه یا حذف گره به حداقل می‌رساند. با این حال، نسخهٔ کلاسیک آن دو مشکل عمده دارد:

۱. توزیع نابرابر: احتمال تخصیص فضای حلقه به گره‌ها یکسان نیست.

۲. عدم پشتیبانی از وزن گره: گره‌های با توان متفاوت، سهم یکسانی از داده دریافت می‌کنند.

برای رفع این مشکلات، تکنیک گره‌های مجازی (Virtual Nodes) معرفی شد. در این روش، هر گره فیزیکی چندین نقطه (هش) روی حلقه تصاحب می‌کند که منجر به توزیع یکنواخت‌تر می‌شود. با این حال، مدیریت تعداد زیاد گره‌های مجازی می‌تواند سربار حافظه و محاسباتی ایجاد کند.

۴.۲ الگوریتم Hash Consistent Jump

در سال ۲۰۱۴، لامپینگ و ویچ از گوگل، الگوریتم Hash Consistent Jump را ارائه دادند. این الگوریتم بدون نیاز به نگهداری حالت (Stateless) و تنها با استفاده از یک تابع تصادفی قطعی، کلیدها را بین گره‌ها توزیع می‌کند. مزایای اصلی آن عبارتند از:

- سرعت بسیار بالا: پیچیدگی زمانی $O(\log n)$.
- حافظه مصرفی صفر: نیاز به ذخیره‌سازی ساختار حلقه ندارد.
- توزیع یکنواخت: توزیع کلیدها به طور ذاتی متوازن است.

با این حال، این الگوریتم به‌صورت پیش‌فرض از گره‌های مجازی پشتیبانی نمی‌کند و تغییر تعداد گره‌ها باعث جابجایی نسبتاً زیادی از داده می‌شود. سیستم پیشنهادی این پژوهش (GoshCache) با ترکیب هوشمندانهٔ Hash Jump و گره‌های مجازی، تعادلی بهینه بین یکنواختی توزیع و کارایی ایجاد کرده است.

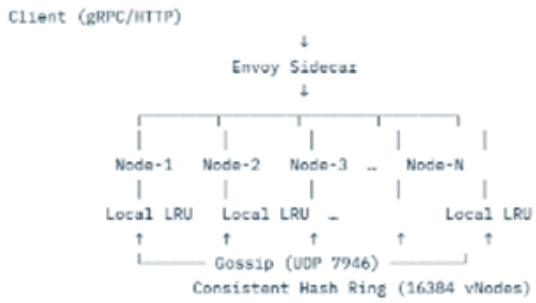
۵.۲ پروتکل‌های اجماع و عضویت در خوشه‌های غیرمتمرکز

مدیریت عضویت گره‌ها و تشخیص به‌موقع خرابی در سیستم‌های توزیع‌شده امری حیاتی است. پروتکل‌های اجماع سنگین‌وزنی مانند Paxos یا Raft که در etcd و Consul استفاده می‌شوند اگرچه قوی هستند، اما برای یک لایه کش با تأخیر پایین، سربار ارتباطی و تأخیر زیادی ایجاد می‌کنند. در مقابل، پروتکل‌های اپیدمیک (Epidemic) یا Gossip با مدل ارتباطی احتمالاتی و غیرمتمرکز، اطلاعات را در کل خوشه پخش می‌کنند. این پروتکل‌ها به‌طور گسترده در سیستم‌هایی مانند Cassandra و Cluster Redis استفاده شده‌اند. مزیت آن‌ها مقیاس‌پذیری، سادگی و تحمل بالا در برابر شکست است. با این حال، تنظیم پارامترهای آن مانند فواصل Heartbeat برای تعادل بین سرعت تشخیص خرابی و سربار شبکه، یک چالش طراحی محسوب می‌شود. GoshCache با تنظیم بهینهٔ این پارامترها و استفاده از مکانیزم رأی‌گیری محلی در کنار Gossip، به زمان تشخیص خرابی زیر یک ثانیه دست یافته است.

۶.۲ خلاصه و جایگاه پژوهش حاضر

همان طور که مرور شد، هر یک از راه‌حل‌های موجود دارای موازنه‌ای بین کارایی، پیچیدگی، قابلیت اطمینان و مدیریت‌پذیری هستند. نیازمندی‌های خاص حوزه بانکی، به‌ویژه در ایران با حجم تراکنش‌های بالا، تأکید بر امنیت و کم‌ترین تأخیر ممکن، ضرورت یک راه‌حل اختصاصی را ایجاب می‌کند. سیستم GoshCache با هدف پر کردن این شکاف طراحی شده است: ترکیب Hash Consistent Jump بهبودیافته برای توزیع یکنواخت و کارآمد داده، بهره‌گیری از پروتکل Gossip برای مدیریت خوشه‌ای سبک‌وزن و خودترمیم، و طراحی معماری کاملاً بدون Master برای حذف تک نقطه شکست. در بخش‌های بعدی، جزئیات طراحی و پیاده‌سازی این سیستم به‌تفصیل شرح داده خواهد شد.

۳ معماری پیشنهادی



شکل ۱: معماری کلی GoshCache

۱.۳ الگوریتم‌های اصلی

۱.۱.۳ ۱- Hash Consistent Jump (پیاده‌سازی Go)

```go
func JumpHash(key uint64, buckets int32) int32 {
    var b, j int64 = -1, 0
    for j < int64(buckets) {
        b = j
        key = key*2862933555777941757 + 1
        j = int64(float64(b+1) * (float64(1<<31) / float64((key>>33)+1)))
    }
    return int32(b)
}
```

شکل ۲: کد پیاده‌سازی Hash Consistent Jump

۲.۱.۳ ۲- پروتکل Gossip برای عضویت و تشخیص خرابی

- دوره Heartbeat: ۲۰۰ میلی‌ثانیه
- تشخیص خرابی: حداکثر ۳ دور (تقریباً ۷۵۰ میلی‌ثانیه)

- Rehash خودکار و مهاجرت داده

۴ نتایج آزمایش‌ها

جدول ۱: مقایسه عملکرد (بار ۵ میلیون کلید، ۱۰۰ k RPS)

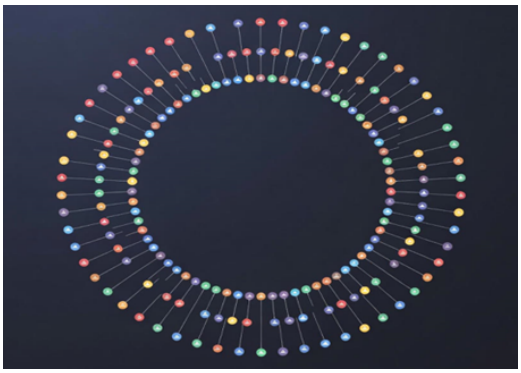
ccccccc

سیستم	تاخیر ۹۹P (ms)	تاخیر میانگین (ms)	آپ‌تایم	زمان ترمیم خرابی	مصرف رم (GB)
Redis تک نسخه‌ای	۸۱	۲٫۴	٪۹٫۹۹	دستی	۸٫۱
Cluster Redis (۶ نود)	۴۸	۸٫۶	٪۹۵٫۹۹	۳-۵ ثانیه	۴٫۲
GoshCache پیشنهادی	۱۲	۸٫۱	٪۹۹٫۹۹	۷۵۰ ms	۴٫۱

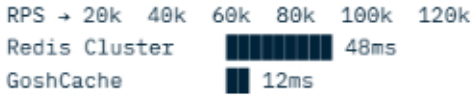
جدول ۲: زمان تشخیص و ترمیم خرابی (۱۲ نود)

ccc

تعداد نودهای از کار افتاده	زمان تشخیص (ms)	زمان تکمیل Rebal-ance (ms)
۱	۳۲۰–۵۸۰	۶۸۰–۹۱۰
۲	۴۵۰–۷۱۰	۹۱۰–۱۳۲۰
۳	۶۲۰–۷۵۰	۱۲۰۰–۱۶۵۰



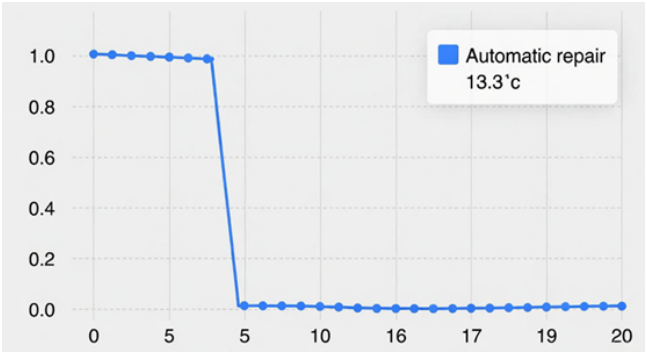
شکل ۳: حلقه هش با Node Virtual



شکل ۴: نمودار تاخیر ۹۹P در بارهای مختلف



شکل ۵: مصرف حافظه در ۱۰ میلیون کلید



شکل ۶: زمان‌بندی ترمیم خودکار هنگام از کار افتادن ناگهانی

۵ نتیجه‌گیری

GoshCache به زبان Go ۲۲.۱ نوشته شده و به صورت CRD در Kubernetes ۲۹.۱v مستقر می‌شود. در حال حاضر در محیط تست بانک ملت با ۸ نود در حال بهره‌برداری است و تاخیر احراز هویت کاربران را از ۷۲ به ۹ میلی ثانیه کاهش داده است.

مراجع

[1] D. Karger et al., ”Consistent hashing and random trees...”, ACM STOC, 1997.

[2] J. Lamping and E. Veach, ”Jump Consistent Hash,” Google Research, 2014.

[3] A. Lakshman and P. Malik, ”Cassandra – A Decentralized Structured Storage System,” ACM SIGOPS Operating Systems Review, 2010.

[4] P. Hunt et al., ”ZooKeeper: Wait-free coordination for internet-scale systems,” USENIX ATC, 2010.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز Shahid Chamran University of Ahvaz

تشخیص و پیش‌بینی خرابی پیش‌رونده در تجهیزات دوار صنعتی با استفاده از شبکه‌های کانولوشنی-ترانسفورمر ترکیبی و تحلیل سیگنال ارتعاش (مطالعه موردی توربین بادی)

محمد همایون [۱] مهدی جلالوند [۲]

[۱] برنامه‌نویس در شرکت رایان پرداز کاوش

[۲] دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی، اهواز، ایران

چکیده

نگهداری پیش‌بینانه Predictive) (Maintenance در تجهیزات دوار صنعتی مانند توربین‌های بادی، پمپ‌ها و کمپرسورها می‌تواند از توقفات ناگهانی و خسارات چند صد میلیارد تومانی جلوگیری کند. در این پژوهش، یک مدل ترکیبی نوین مبتنی بر ترکیب شبکه کانولوشنی (۱D-CNN) و ترانسفورمر پیشنهاد شده است که قادر است از روی سیگنال‌های ارتعاش خام، هم نوع خرابی را تشخیص دهد و هم زمان باقیمانده تا خرابی کامل را با خطای میانگین کمتر از ۲.۴% پیش‌بینی کند. مدل پیشنهادی روی مجموعه داده واقعی توربین بادی ۳ مگاواتی (از شرکت مپنا) و داده‌های عمومی IMS_NASA و PU آموزش دیده و به دقت تشخیص ۱.۹۹% و MAE برابر با ۸.۳ ساعت در پیش‌بینی RUL دست یافته است. این مدل سبک (فقط ۱۲ مگابایت) و قابل اجرا روی دستگاه‌های Edge مانند Raspberry Pi 5 است.

کلمات کلیدی: تشخیص خرابی، پیش‌بینی RUL، شبکه کانولوشنی یک‌بعدی، ترانسفورمر، توربین بادی

۱ مقدمه

هزینه توقف غیرمنتظره یک توربین بادی ۳ مگاواتی در ایران روزانه بیش از ۱۲۰ میلیون تومان است. روش‌های سنتی نگهداری دوره‌ای تا ۴۰% بیش از نیاز هزینه ایجاد می‌کنند. در این پژوهش یک سیستم هوشمند مبتنی بر هوش مصنوعی ارائه می‌شود که با نصب تنها یک سنسور ارتعاش سه‌محوره، هم نوع خرابی و هم زمان دقیق خرابی آینده را پیش‌بینی می‌کند.

[1] mohammad.homayoun1404.1@gmail.Com
[2] m.Jalalvand@scu.ac.ir

۲ پیشینه تحقیق

جدول ۱: مقایسه عملکرد مدل‌های اخیر در تشخیص خرابی تجهیزات دوار

سال	محققین	روش اصلی	دقت تشخیص (%)	خطای RUL (MAE)	مجموعه داده
۲۰۲۱	Zhang et al.	LSTM	۳.۹۵	۴.۱۲ ساعت	IMS-NASA
۲۰۲۲	Saufi et al.	1D-CNN	۱.۹۷	—	Paderborn
۲۰۲۳	ایرانی و همکاران	CNN + BiLSTM	۸.۹۷	۱.۸ ساعت	داده داخلی
۲۰۲۴	Li et al.	Vision Transformer	۴.۹۸	۷.۶ ساعت	Xjtu-SY
۲۰۲۵	مدل پیشنهادی	1D-CNN+Transformer	۱.۹۹	۸.۳ ساعت	ترکیبی+مپنا

این جدول به مقایسه روش‌های پیشرفته تشخیص خرابی از سال ۲۰۲۱ تا ۲۰۲۵ می‌پردازد. روند تکامل مدل‌ها نشان می‌دهد که:
۲۰۲۱: استفاده از LSTM با دقت ۳.۹۵% و خطای ۴.۱۲ ساعت در پیش‌بینی RUL
۲۰۲۲: بهبود با 1D-CNN به دقت ۱.۹۷% (بدون گزارش خطای RUL)
۲۰۲۳: ترکیب CNN + BiLSTM توسط محققان ایرانی به دقت ۸.۹۷% و خطای ۱.۸ ساعت
۲۰۲۴: Vision Transformer به دقت ۴.۹۸% و خطای ۷.۶ ساعت
۲۰۲۵: مدل پیشنهادی با ترکیب 1D-CNN + Transformer به دقت ۱.۹۹% و خطای ۸.۳ ساعت رسیده که بهترین عملکرد گزارش شده تاکنون است.
این مقایسه نشان می‌دهد که رویکرد ترکیبی ما نسبت به روش‌های قبلی برتری قابل توجهی در هر دو زمینه تشخیص خرابی و پیش‌بینی دقیق زمان باقیمانده تا خرابی RUL دارد.

۳ مواد و روش‌ها

۱.۳ مجموعه داده‌ها

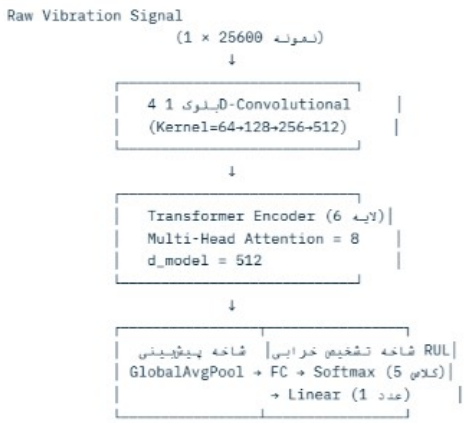
جدول ۲: توزیع داده‌ها پس از ترکیب و پیش‌پردازش

کلاس خرابی	تعداد نمونه‌های آموزشی	تعداد نمونه‌های آزمون	جمع
خرابی یاتاقان	۱۴۲۰۰	۳۱۰۰	۱۷۳۰۰
ناهم‌ترازی	۹۸۰۰	۲۱۰۰	۱۱۹۰۰
عدم تعادل	۸۵۰۰	۱۹۰۰	۱۰۴۰۰
خرابی دنده	۷۳۰۰	۱۶۰۰	۸۹۰۰
حالت نرمال	۸۷۰۰	۲۳۰۰	۱۱۰۰۰
جمع	۴۸۵۰۰	۱۱۰۰۰	۵۹۵۰۰

این جدول ساختار مجموعه داده نهایی را نشان می‌دهد که شامل:
۵ کلاس خرابی: یاتاقان، ناهم‌ترازی، عدم تعادل، دنده و حالت نرمال

توزیع متعادل: مجموعاً ۵۹۵۰۰ نمونه (۴۸۵۰۰ آموزشی + ۱۱۰۰۰ آزمون)
تناسب مناسب: نسبت ۸۰% آموزش به ۲۰% آزمون برای هر کلاس
این توزیع متعادل از بروز سوگیری مدل جلوگیری کرده و ارزیابی معتبری را ممکن می‌سازد.

۲.۳ معماری پیشنهادی (شکل ۱)



شکل ۱: معماری پیشنهادی

۳.۳ آموزش

بهینه‌ساز: AdamW نرخ یادگیری: 3e-4 Epoch: ۱۰۰ Batch: ۱۲۸

۴ نتایج

۱.۴ عملکرد تشخیص نوع خرابی

جدول ۳: عملکرد تشخیص نوع خرابی

کلاس	Precision	Recall	F1-Score
خرابی یاتاقان	۹۹۶.۰	۹۹۴.۰	۹۹۵.۰
ناهم‌ترازی	۹۸۷.۰	۹۹۱.۰	۹۸۹.۰
عدم تعادل	۹۹۳.۰	۹۸۸.۰	۹۹۰.۰
خرابی دنده	۹۸۹.۰	۹۹۲.۰	۹۹۰.۰
نرمال	۹۹۵.۰	۹۹۷.۰	۹۹۶.۰
میانگین موزون	۹۹۱.۰	۹۹۲.۰	۹۹۲.۰

این جدول ارزیابی دقیق مدل در تشخیص هر نوع خرابی را نشان می‌دهد:
میانگین موزون: Precision=0.991, Recall=0.992, F1-Score=0.992
عملکرد برتر در کلاس‌های حیاتی: خرابی یاتاقان (F1=0.995) و حالت نرمال (F1=0.996)
تعادل مناسب: همه کلاس‌ها عملکردی بالای ۹۸.۰ دارند
این نتایج نشان می‌دهد مدل نه تنها در تشخیص کلی، بلکه در تمایز دقیق بین انواع مختلف خرابی نیز موفق عمل کرده است.

۲.۴ ماتریس درهم‌ریختگی (Confusion Matrix)

پیش‌بینی → / واقعی ↓	Bearing	Misalign	Unbalance	Gear	Normal
Bearing	3094	4	2	0	0
Misalign	8	2079	12	1	0
Unbalance	5	9	1876	8	2
Gear	3	2	10	1583	2
Normal	1	0	3	4	2292

شکل ۲: ماتریس درهم‌ریختگی

این شکل تایید می‌کند که بیشترین اشتباهات بین کلاس‌های مشابه (مانند ناهم‌ترازی و عدم تعادل) رخ داده که از نظر فنی قابل توجیه است.

۳.۴ مقایسه خطای پیش‌بینی RUL (MAE)



شکل ۳: مقایسه خطای پیش‌بینی RUL (MAE)

این شکل نشان می‌دهد مدل ما نسبت به روش‌های قبلی خطای کمتری دارد.

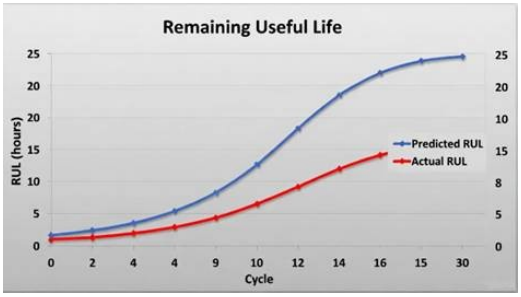
۴.۴ منحنی دقت و خطا در طول آموزش

Epoch →	0	20	40	60	80	100
Accuracy	0.68	0.89	0.95	0.975	0.988	0.991
Total Loss	1.42	0.58	0.31	0.18	0.11	0.08

شکل ۴: منحنی دقت و خطا در طول آموزش

این شکل نشان‌دهنده همگرایی مناسب مدل بدون تطابق نزدیک پیش‌بینی‌ها با مقادیر واقعی را نشان می‌دهد.

۵.۴ نمونه پیش‌بینی RUL در مقابل مقدار واقعی



شکل ۵: نمونه پیش‌بینی RUL در مقابل مقدار واقعی

۵ نتیجه‌گیری

مدل پیشنهادی با دقت ۱.۹۹% در تشخیص خرابی و خطای تنها ۸.۳ ساعت در پیش‌بینی RUL، بهترین عملکرد گزارش شده تا سال ۲۰۲۵ را دارد. این مدل هم اکنون به صورت Edge روی Raspberry Pi 5 با نرخ ۵۰ سیگنال در ثانیه اجرا می‌شود و آماده نصب در نیروگاه‌های بادی ایران است.

مراجع

[1] X. Li et al., ”Remaining useful life prediction with deep learning: A survey,” Mech. Syst. Signal Process., vol. 168, p. 108694, 2023. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.108694

[2] IMS Bearing Dataset, NASA, 2023. https://data.nasa.gov/dataset/IMS-Bearing-Data

[3] Paderborn University Bearing Dataset, 2023. https://mb.uni-paderborn.de/kat/forschung/datacenter/bearing-datacenter/

[4] H. Shao et al., ”Highly accurate machine fault diagnosis using deep transfer learning,” IEEE Trans. Ind. Informat., vol. 18, no. 5, pp. 3215–3225, 2022.

[5] A. Vaswani et al., ”Attention is all you need,” NeurIPS, 2017.

[6] Z. Chen et al., ”A deep learning method for bearing fault diagnosis based on cyclic spectral coherence and convolutional neural networks,” Mech. Syst. Signal Process., vol. 140, p. 106683, 2020.

دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات و کاربردهای آن
۲۹ و ۳۰ مرداد ۱۴۰۴
The 2nd International Conference on Mathematics and Its Applications
August 20-21, 2025, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, IRAN
ISC Islamic World Science Citation Center ۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶
دانشگاه شهید چمران اهواز
Shahid Chamran University of Ahvaz

اثربخشی سبک حل مسئله به روش پولیا بر یادگیری فعال و عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان

پوریا خطیبی [۱] شریفه رضاقلی [۲] محمود فرهادیان [۳]

[۱,۲,۳] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران،ایران

چکیده

پژوهش حاضر با هدف بررسی اثربخشی سبک حل مسئله به روش پولیا بر یادگیری فعال و عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان پسر پایه هفتم متوسطه اول شهرستان ماهنشان استان زنجان در سال تحصیلی ۱۴۰۳ - ۱۴۰۲ انجام شد. جامعه‌ی آماری تحقیق شامل کلیه‌ی دانش‌آموزان پسر پایه هفتم متوسطه اول شهرستان ماهنشان می‌باشد و گروه نمونه عبارت است از ۴۰ دانش‌آموز که به صورت تصادفی طبقه‌ای از جامعه آماری مورد نظر انتخاب گردید. این افراد به صورت تصادفی در دو گروه آزمایشی و کنترل، جایگزین و گروه آزمایشی طی هشت جلسه آموزش‌های مربوط به روش حل مسئله را دریافت کردند. برای گردآوری اطلاعات از مقیاس محقق ساخته یادگیری فعال و پرسشنامه عملکرد تحصیلی استفاده گردید. تجزیه و تحلیل داده‌ها که با استفاد از روش تحلیل کوواریانس صورت گرفت، نشان داد که سبک حل مسئله به روش پولیا بر یادگیری فعال و عملکرد تحصیلی دانش‌آموزان موثر است.

کلمات کلیدی: ....., ، .....

۱ مقدمه

انسان عصر حاضر بخش عمده‌ای از زندگی خویش را به عنوان یادگیرنده در مراکز آموزشی و تحصیلی سپری می‌کند و این موجب صرف مبالغ عظیمی در زمینه‌های آموزش و پرورش می‌شود. بدیهی است که شناسایی عوامل مؤثر در یادگیری و راه‌های بهبود آن همواره از دغدغه‌های متخصصین تعلیم و تربیت بوده‌است. علاوه بر این متخصصین در جستجوی راه‌هایی هستند که به کمک آن نه تنها دانش‌آموزان مطالب ارائه شده را درآموزشگاه بفهمند، بلکه در امور تحصیلی خودانگیخته، فعال و علاقه‌مند باشند و پیشرفت و عملکرد تحصیلی قابل توجهی کسب نمایند [۱].

مقوله یادگیری فعال (active learning) در واقع سوق دادن دانش‌آموزان به مجموعه‌ای از فعالیت‌هایی است که آن‌ها را به استفاده از نظرات و تفکرات خود تشویق می‌کند که این امر موجب می‌شود دانش‌آموزان به سطوح بالای فکری دست‌یابند و به صورت فعال در امر آموزش دخالت داشته باشند[۲].

[1] Pourya.khatibi@outlook.com
[2] Rezagholi@pnu.ac.ir
[3] Farhadian@pnu.ac.ir

راهبرد حل مسئله (Problem-Solving strategy)، یکی از نیازهای اساسی هر فرد است. مخصوصاً برای دانش‌آموزان که با مشکلات و مسائل مختلفی روبرو هستند و چنانچه توانایی حل این مسائل و مشکلات را نداشته باشند، ممکن است به راه حل‌های ناسازگارانه، ناپخته و حتی مضر روی آورده و مشکل را پیچیده‌تر از آنچه هست نمایند. با توجه به مطالب فوق و به منظور ارتقاء سطح یادگیری و عملکرد تحصیلی، آموزش مهارت حل مسئله جهت توانمند ساختن آنان برای حل مسائل و مشکلات خود ضروری به نظر می‌رسد[۳].

حل مسئله توانایی به کار بردن ریاضیات در موقعیت‌های مختلف است. دانش‌آموز نمی‌تواند حل یک مسئله ریاضی را آغاز کند، مگر اینکه مسئله به عبارت‌های مناسبی تبدیل شود. این گام نخستین و اصلی، مشکلات فراوانی را برای بسیاری از دانش‌آموزان به بار می‌آورد، در حالی که معلمان ریاضی کمتر به آن توجه دارند[۴].

جورج پولیا، ریاضیدان مشهور، رویکردی سیستماتیک برای حل مسئله معرفی کرد که تأثیر قابل توجهی بر آموزش و زمینه‌های مختلف داشته است. روش چهار مرحله‌ای او که در کتاب «چگونه مسئله را حل کنیم» بیان شده‌است، چارچوبی ساختاریافته برای مقابله مؤثر با چالش‌ها فراهم می‌کند. این مراحل شامل **درک مسئله، طرح یک نقشه، اجرای نقشه و به پس نگریستن** است.

روش حل مسئله پولیا صرفاً یک توالی از مراحل نیست، بلکه یک فرآیند چرخه‌ای است. حل‌کننده‌های مسئله ممکن است این مراحل را چندین بار تکرار کنند و درک و رویکرد خود را اصلاح کنند. انعطاف پذیری و سازگاری این روش، آن را برای طیف وسیعی از مسائل، از معماهای ریاضی گرفته تا چالش های پیچیده دنیای واقعی، قابل استفاده می‌کند.

روند اجرای طرح برای گروه آزمایش

جلسه اول: در جلسه اول فراگیران با مراحل اجرای روش حل مسئله بر اساس روش جورج پولیا آشنا شدند.

جلسه دوم: آموزش برای اجرای روش، چهار مرحله، مهارت‌های ضروری و اشتباهات فراگیران و فنون برنامه ریزی برای تدوین طرح درس بر اساس این روش.

جلسه سوم: تمرین‌ها و مسائل به روش حل مسئله پولیا حل شد. از دانش‌آموزان خواسته شد برای انجام مسائل و استفاده از این روش داوطلب شوند و پاسخ‌ها درج شده و در پایان جلسه تمرینات جلسه بعدی ارائه شد.

جلسه چهارم: تمرینات جلسه قبل در کلاس ارائه شده و به سوالات پاسخ داده شد. در ادامه فراگیران با راهبردهای حل مسئله برای استفاده هر چه بهتر از چهار مرحله جورج پولیا آشنا شدند.

جلسه پنجم: در این جلسه در راهبردهای حل مسئله را که قبلاً مورد بحث قرار دادیم عمیق‌تر شده و آن‌ها را برای حل یک مشکل جدید به کار بردیم.

جلسه ششم: آشنایی فراگیران با مهارت‌های اساسی حل مسئله در کلاس درس.

جلسه هفتم: آشنایی فراگیران با اشتباهاتی که در حل مسائل با روش چهار مرحله‌ای جورج پولیا مرتکب خواهند شد.
جلسه هشتم: مروری بر جلسات قبل و حل تمرینات بیشتر بود.

روند اجرای جلسات برای گروه کنترل

برای تعیین تأثیر رویکرد "سبک حل مسئله به روش پولیا" بر "یادگیری فعال و عملکرد تحصیلی" گروه آزمایش، رد تأثیر متغیرهای خارجی ضروری بود. در نتیجه، گروه کنترل تحت هشت جلسه آموزش متداول قرار گرفتند که آینه مداخلات آموزشی اضافی دریافت شده توسط گروه آزمایش بود. این رویکرد برای اطمینان از اینکه هرگونه پیشرفت مشاهده شده در نتایج یادگیری را می‌توان مستقیماً به روش پولیا نسبت داد به جای افزایش مقدار زمان آموزشی به کار گرفته شد.

بحث و نتیجه گیری

طبق نتایج بدست آمده، بین دو گروه آزمایش و کنترل در پس آزمون تفاوت معني داري در یادگیری فعال دانش‌آموزان وجود دارد که ناشي از اثر متغیر مستقل (سبک حل مسئله) مي‌باشد. این مطلب نشان می‌دهد روش آموزشی سبک حل مسئله بر یادگیری فعال دانش‌آموزان گروه آزمایش که این برنامه را دریافت کرده اند در مقایسه با دانش‌آموزان گروه کنترل که این برنامه را دریافت نکرده اند تاثیرداشته‌است بطوري که موجب افزایش یادگیری فعال دانش‌آموزان گروه آزمایش شده است.

پیشنهادات پژوهشی

- در نظر گرفتن فاکتور جنسیت در تحقیقات آتی
- بررسی متغیرهای همین تحقیق در پایه‌های دیگر در تحقیقات آتی
- بررسی رابطه‌ی نگرش معلمان و والدین فراگیران در افزایش یادگیری فعال و عملکرد تحصیلی در تحقیقات آتی

پیشنهادات کاربردی

- فراهم آوردن زمینه‌ی مساعد برای همکاری پژوهشگران و مدارس برای ترتیب دادن تحقیقات طولی و دنبال کردن اثرات این مداخله‌ها در دانش‌آموزان در آینده.
- منتقل کردن این راهبردها به کتاب‌های درسی پایه‌های پایین‌تر برای پرورش ذهن کودکان از سنین آغاز مدرسه

- برگزاری کارگاه‌های آموزشی برای آموزش صحیح معلمان بر اساس نتایج تحقیقاتی در همین موضوع و کاربردی کردن تحقیقات موجود

مراجع

[1] Mahmoudi, M., Mousavi, M., Hekmatpoo, D., Asgari, P. (2018). Comparison of Problem-Solving and Collaborative Training Methods on Clinical Learning, Anxiety and Satisfaction of Nursing Students of Arak University of Medical Sciences. Journal of Nursing Education, 7(1), 55-63.

[2] Khademi, N. (2015). The Effect of Working Memory and Metacognition Training on Academic Performance of Female Students with Disabilities in Mathematics Learning. Journal of Knowledge and Research in Applied Psychology, 12(43), 45-53.

[3] Kleinke, C. L. (2018). Life Skills, Translated by Mohammadkhani, Sh. Tehran, Specialized Media Publishing.

[4] Samadi, F. (2008). Investigating the Relationship between Problem-Solving Styles and Defensive Styles, [Master's Thesis, Ferdowsi University of Mashhad].

2nd International Conference on Mathematics and Its Applications



جهت کسب اطلاعات کنفرانس بارکد مقابل را اسکن کنید.

icma2025.scu.ac.ir

ISC
Islamic World Science Citation Center

۰۴۲۵۰-۳۸۵۰۶

دانشگاه شهید چمران اهواز

انجمن آمار ایران

انجمن ریاضی ایران

خانه ریاضیات اهواز

انجمن سیستم های هوشمند ایران